

1. Japonské skládačky

Fyzikální témata

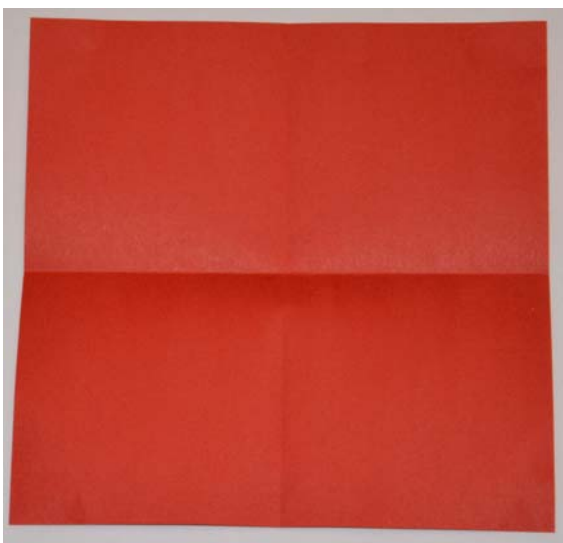
setrvačnost tělesa, třecí síly, stabilita tělesa

Příprava hračky

Autorem japonské hračky, která se též nazývá *Ta Rum Te Tum Tum*, je japonský origamista Seiro Tagekawa.

Hračka je složena z obyčejného listu papíru - je jedno, zda se použije formát A4 nebo formát čtvercový (se čtvercovým formátem papíru vypadá výsledná hračka ale lépe). Postup skládání je dokumentován na obrázcích.

Na čtvercovém formátu papíru si naznačíme dvěma na sebe navzájem kolmými překlady osy stran papíru (viz obr. 1). Jednu ze stran papíru přehneme ke střednímu pomocnému ohybu a zarýhneme (viz obr. 2). Okraje tohoto ohybu ve tvaru rovnostranného pravoúhlého trojúhelníka přeložíme ke střednímu pomocnému ohybu (viz obr. 3) a k témuž pomocnému ohybu přeložíme papír ještě jednou (viz obr. 4). Tím je jedna strana hračky hotová.



obr. 1



obr. 2



obr. 3



obr. 4

Protilehlou stranu skládané hračky přeložíme nejprve ke střednímu pomocnému ohybu; tento ohyb je pouze pomocný (viz obr. 5). Nyní přeložíme okraje ve tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka k pomocnému ohybu, který je ve čtvrtině délky strany čtverce (viz obr. 6). Pak k témuž pomocnému ohybu přeložíme papír po celé délce (viz obr. 7).

Nyní papír otočíme o devadesát stupňů a přeložíme v kolmých směrech, než jsme jej skládali dosud. Okraje papíru přehneme vždy až k pomocnému střednímu ohybu a zarýhneme (viz obr. 8). Právě zarýhnuté části mírně odklopíme a hračka je hotová.



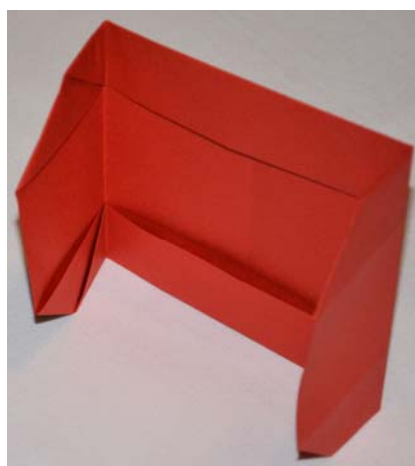
obr. 5



obr. 6



obr. 7



obr. 8

Popis experimentu

Hračku položíme na podložku tak, aby těžší strana (strana s dvojitým překladem) byla dole. Shora do hračky ve vodorovném směru strčíme. Hračka se nakloní a zastaví se. Pokud hračku položíme tak, aby těžší strana byla nahoře, a ve vodorovném směru do horní části hračky strčíme, hračka se začne otáčet. Otočí se celkem o 270 stupňů.

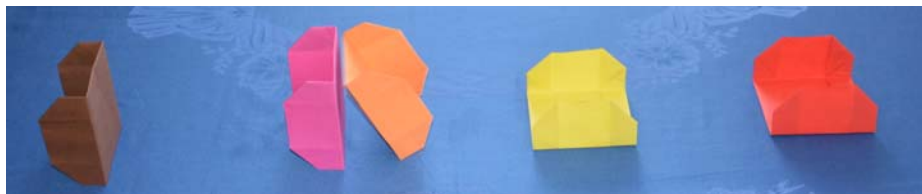
Příčinou rozdílného chování hračky v obou případech je její nesymetričnost. Je-li těžší strana hračky na počátku v horní části, pak se pohybuje vlivem tíhové síly směrem dolů. Pohyb je natolik rychlý, že se hračka vlivem setrvačnosti dokáže otočit nejen o 180 stupňů, ale ještě o dalších 90 stupňů.

Pokud se stane, že se hračka neotáčí, bude pravděpodobně příčinou malá třecí síla působící mezi papírem a podložkou. Aby se hračka mohla přetočit kolem osy procházející podstavnou hranou, musí mezi hračkou a podložkou působit dostatečně velká třecí síla. Bude-li mít třecí síla malou velikost (příliš hladká podložka), hračka se bude smýkat a neotočí se. Pro zdárný úspěch experimentu stačí na takto hladkou podložku položit obyčejný kancelářský papír.



obr. 9

Máme-li k dispozici více stejných hraček, můžeme je rozestavit do pravidelných vzájemných vzdáleností (rozestupy musí být o málo větší, než je dvojnásobek výšky hračky připravené k pohybu - viz obr. 9). Uvedeme-li do pohybu první hračku, otočí se postupně vlivem dominového efektu všechny (viz obr. 10).



obr. 10

2. Neviditelné kuličky

Fyzikální témata

průchod světla látkami, index lomu látek

Popis experimentu

V některých květinářstvích lze zakoupit gelové kuličky, které se přidávají do váz s květinami. Tam absorbují vodu a v případě, že se voda z vázy vypaří, květiny nezůstanou v suchém prostředí, ale vlhkost budou čerpat z těchto gelových kuliček.

Kuličky se prodávají v různém provedení. Lze zakoupit kuličky s průměrem přibližně 2 mm (viz obr. 11), které po přibližně třech hodinách ve vodě nabobtnají na průměr cca 1 cm (viz obr. 12), nebo lze zakoupit přibližně centimetrové kuličky (viz obr. 13), které po několika hodinách ve vodě zvětší svůj průměr zhruba na dvojnásobek (viz obr. 14).



obr. 11



obr. 12

Vodou nasáklé kuličky nejsou při běžném pohledu ve sklenici vidět. Tohoto faktu lze využít k demonstraci látky, která má index lomu stejný, jako je index lomu vody. Proto pak tato látka (tj. kuličky) nejsou ve vodě vidět.



obr. 13



obr. 14

Další experiment, který lze s těmito kuličkami provést, demonstruje lom světla na rozhraní dvou optických prostředí. K experimentu jsou nutné nádoba z čirého skla nebo plastu, gelové kuličky, lžice na snadnější manipulaci s kuličkami a papír s textem (viz obr. 15). Tento experiment provedeme ve třech krocích.

V prvním kroku ukážeme, že text na papíru je pod prázdnou skleněnou nádobou dobře čitelný (téměř jako při přímém pohledu).

Ve druhém kroku nasypeme do skleněné nádoby samotné kuličky bez vody. Pozorujeme, že text není čitelný (viz obr. 16), protože světlo odražené od papíru s textem se na povrchu kuliček (rozhraní vzduch - gel) láme a rozptyluje se.

Ve třetím kroku do nádoby s kuličkami dolijeme vodu (viz obr. 17) a text je nyní dobře čitelný (viz obr. 18). Čitelnost textu je téměř stejná, jako v případě, že se díváme na text přímo (tj. světlo odražené od papíru s textem prochází pouze vzduchem). Vzhledem k tomu, že kuličky mají index lomu téměř stejný, jako je index lomu vody, na rozhraní voda - gelová kulička nenastává lom a světlo se šíří přímočaře beze změny směru.

V případě, že chceme experiment použít jako tajemně se chovající experiment nebo motivační úlohu k přemýšlení žáků, vynecháme první krok a žákům ukážeme rovnou skleněnou nádobu plnou kuliček, přes které je text pod nádobou nečitelný.



obr. 15



obr. 16



obr. 17



obr. 18

3. Optické klamy

Fyzikální témata

optika

Popis experimentu

Mezi optické klamy lze zařadit tři pomůcky, které jsou postupně zobrazeny na obr. 19 až obr. 25.

Na obr. 19 a obr. 20 je zobrazena stejná pomůcka, která se liší uspořádáním svých částí. Pomůcka je složena ze tří částí (na obr. 19 a obr. 20 jsou tyto části odděleny černou čarou), které se skládají k sobě. Horní část lze přitom složit dvěma způsoby. A v závislosti na způsobu složení těchto částí lze pozorovat buď 14 nebo 15 skřítků.



obr. 19



obr. 20

Na obr. 21 je zobrazena jednoduchá skládačka. Na první pohled se zdá, že tmavý čtyřúhelník a světlý čtyřúhelník mají jiné rozměry. Zda tomu tak je nebo ne, se můžeme přesvědčit: čtyřúhelníky lze ze šablony vyjmout. Ač se to na první pohled nezdá, lze pak skládačku přeskládat do tvaru, který je zobrazen na obr. 22, tj. čtyřúhelníky lze navzájem zaměnit. To ovšem znamená, že jsou navzájem shodné, ačkoliv při jejich zasazení do skládačky se zdá, že mají jiné rozměry.



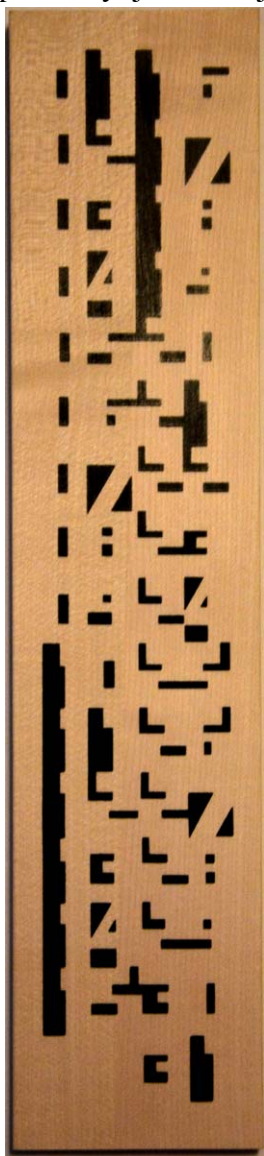
obr. 21



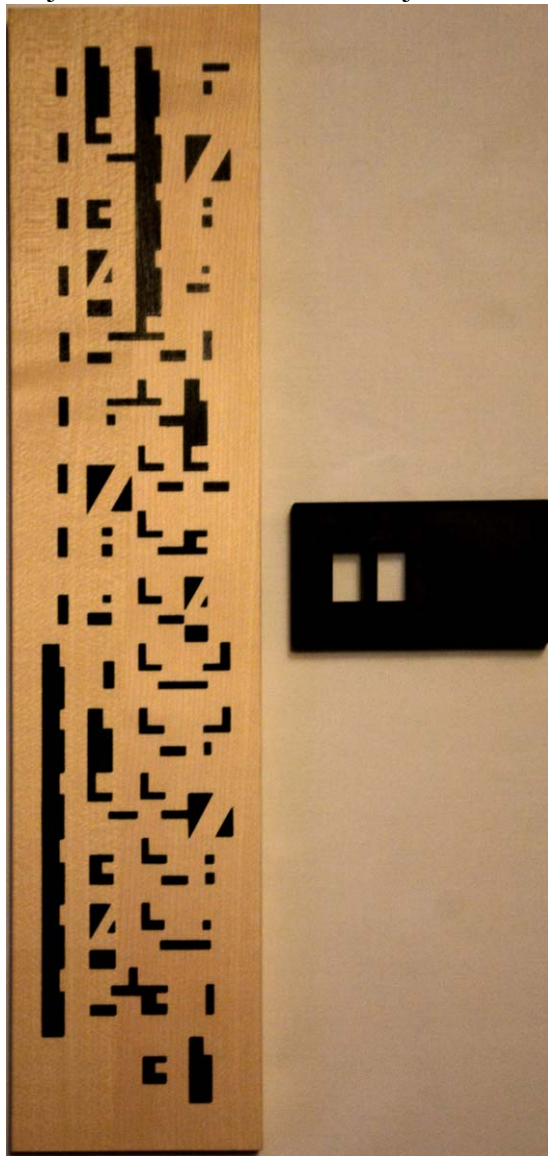
obr. 22

Další z optických klamů je zobrazen na obr. 23. Jedná se o dřevěnou pomůcku, na které jsou zdánlivě nesmyslné a na první pohled nečitelné znaky. Uvědomíme-li si, že k pomůcce patří ještě i kovová mřížka (viz obr. 24), kterou je možné na dřevěnou pomůcku nasadit (viz obr. 25), můžeme znaky natištěné na dřevě pohodlně číst. Stačí kovovou mřížku nasunout na dřevěnou pomůcku a postupně jí posouvat směrem dolů. Pak stačí pomůcku sundat, otočit jí o 180 stupňů a navléknout jí na dřevěnou pomůcku znovu. A můžeme přečíst zbytek znaků zapsaných ve druhém sloupci.

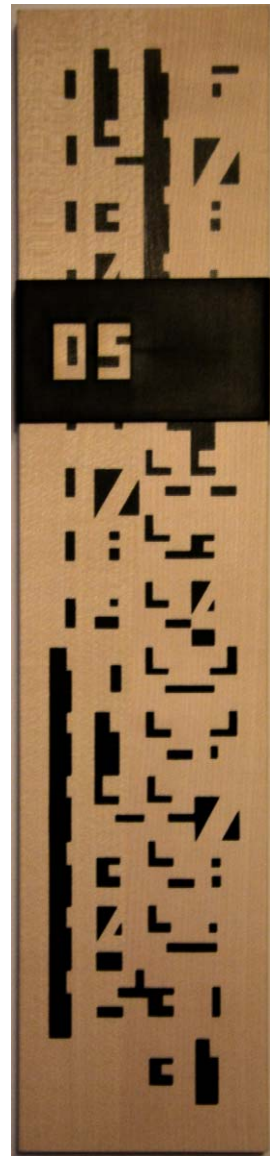
Vzhledem k tomu, že na dřevěné pomůcce je vytištěno 31 čísel, je zřejmé využití této pomůcky: je možné ji použít jako netradiční kalendář na jeden měsíc.



obr. 23



obr. 24



obr. 25

4. Vykouzlení bankovky z karet

Fyzikální témata

třecí síly

Příprava pomůcky

K předvedení níže popsaného experimentu je nutné předem připravit (vyrobiť) pomůcku ze dvou hracích karet. Dále bude potřeba lepidlo a nůžky (viz obr. 26), k samotnému experimentu bude potřeba i papírová bankovka a další karta z téže karetní hry.

Do jedné ze dvou kratších stran jedné karty vystříhneme nůžkami otvor ve tvaru půlkruhu o poloměru přibližně 1 cm (viz obr. 27). Pak natřeme z rubu této karty okraje ostatních tří stran lepidlem a kartu přilepíme na přední stranu druhé karty. Po zaschnutí lepidla získáme jakousi kapsičku z karet. Do této kapsičky vložíme složenou bankovku (např. stokorunovou bankovku - viz obr. 28).



obr. 26



obr. 27



obr. 28

Provedení experimentu

Kapsičku z karet, do které jsme zasunuli bankovku, vložíme do kapsy saka či kalhot spolu s další běžnou kartou z téže karetní hry, jako jsou karty použité na výrobu kapsičky. Karty vytáhneme před diváky z kapsy tak, že palec pravé ruky držíme na otvoru vystřiženém do jedné z karet tvořící kapsičku (viz obr. 29). Divákům ukážeme obě karty z obou stran (palcem stále zakrýváme otvor).

Připravíme si povídání např. na téma nedostatku financí (ve školství, jako kapesné, ... podle publika, kterému pokus předvádíme). Během povídání zvedneme karty přibližně do výše očí a držíme je svisle rubem k divákům tak, že delší strana karet má vodorovný směr. Karty přesouváme jednu před druhou tak, že vždy kartu k nám bližší vytáhneme levou rukou a přemístíme ji blíže k divákům za druhou kartu, kterou držíme ve druhé ruce. Bankovka je stále v kapsičce. Ke konci našeho povídání při manipulaci s kapsičkou přitiskneme palcem bankovku ke druhé (normální) kartě. Pohybem kapsičky se z ní bankovka vysune (viz obr.

30). Můžeme ještě přesunout karty zopakovat, ale poslední přesunutí karty uděláme tak, aby se bankovka ocitla mezi oběma kartami. Pro větší efekt můžeme použít nějaké „magické slovo“ případně mezi karty fouknout. Karty pak rozevřeme a mezi nimi se objeví složená bankovka.



obr. 29



obr. 30

Vysvětlení experimentu

Bankovku jsme z kapsičky vytáhli silou, kterou jsme jí přitlačili ke kartě a jejíž velikost byla větší, než velikost síly smykového tření mezi kartou a bankovkou.

5. Stabilita s kartou

Fyzikální témata

stabilita tělesa

Příprava pomůcky

Před vlastním předvedením experimentu je nutné si připravit pomůcku, se kterou experiment provedeme. K výrobě budeme potřebovat dvě hrací karty z téže hrací hry, pravítko, tužku, nůžky a lepidlo (viz obr. 31). K vlastnímu předvedení experimentu pak bude nutný ještě malý plastový kelímek (např. od nápoje z automatu).

Na lícové straně jedné hrací karty sestrojíme pravítkem osu obou kratších stran karty. Podél této osy pak přejedeme ostrým hrotem nůžek, bodcem kružítko nebo jiným ostrým předmětem, aby se karta při následném ohýbání nelámala. Pak kartu přeložíme na dvě poloviny (viz obr. 32) tak, že rubová strana je uvnitř ohybu.

Jednu polovinu takto připravené karty potřeme z lícové strany lepidlem a nalepíme na rubovou druhé běžné karty a necháme zaschnout. Po zaschnutí získáme dvojkartu, která při složení vypadá jako běžná karta, ale kterou po rozložení můžeme použít jako stojánek.



obr. 31



obr. 32

Provedení experimentu

Před vlastním provedením experimentu je dobré si experiment zkusit v prázdné místnosti, v níž jej budeme předvádět. Je totiž nutné nacvičit správnou orientaci vyrobeného stojánku z karet tak, aby diváci okamžitě neodhalili jeho tajemství.

Předem připravenou dvojkartu vložíme před zahájení představení do kapsy saka či kalhot nebo jí položíme na stůl. Při vlastním předvádění experimentu kartu uchopíme do pravé ruky a ukážeme z obou stran divákům. Ti vidí obyčejnou kartu.

Kartu nyní začínáme stavět na stůl, levou rukou stíníme pohled diváků a pravou rukou nenápadně rozevřeme stojánek. Kartu umístíme do předem připravené polohy tak, aby diváci druhou nožičku stojánku neviděli. Na takto připravený stojánek ihned položíme malý kelímek od nápoje (kelímek je vhodné předem z části naplnit vodou). I poté, co stojánek a kelímek pustíme, kelímek na kartě zůstává stát (viz obr. 33).

Vysvětlení experimentu

Tíhová síla kelímku se rozloží na obě karty, které tvoří stojánek. Tak vlastně stojánek zpevní (proto je vhodné do kelímku před provedením experimentu nalít trochu vody) a ten udrží kelímek. Ačkoliv pro diváky se zdá, že se kelímek nachází v labilní rovnovážné poloze, ve skutečnosti je v rovnovážné poloze stabilní.



obr. 33

6. Tužka procházející kartami

Fyzikální témata

tuhé těleso, (ne)deformace pevných látek

Příprava pomůcky

K provedení zajímavého triku s kartami je nutné si nejdříve připravit karty, se kterými trik poté můžeme provést. K přípravě budeme potřebovat 6 karet na kanastu, děrovačku, nůžky, tužku a lepidlo (viz obr. 34). Karty na kanastu jsou výhodné proto, že obsahují dvojice stejných karet a toho právě využijeme. Je vhodné (ale není to nutné), aby vybrané 3 karty tvořili postupku (v našem případě je to postupka karet A, K, Q). Další dvě karty musí být shodné a je vhodné, aby byly od této postupky odlišné (barvou či hodnotou); v našem případě je to karta žolíka. A poslední karta by měla být shodná s poslední kartou postupky - tj. v našem případě karta Q.



obr. 34



obr. 35

Všech šest karet zarovnáme a pomocí děrovačky do nich uděláme najednou v dolní části otvor. Průměr otvoru musí být takový, aby jím bylo možné volně protáhnout tužku. Otvor v kartách přitom nemusí mít kruhový průřez - nutné je, aby otvory ve všech kartách byly totožné.

Nyní oddělíme od ostatních karet druhou a třetí kartu postupky a jednu ze dvou karet, které jsou navíc (v našem případě se jedná o karty K, Q a o kartu žolíka). Z karty žolíka (karta, která je vzhledem k postupce navíc) odstříháme kousek její spodní části obsahující vyražený otvor (viz obr. 36). Na přesném tvaru či symetrii nezávisí. Podmínkou je, aby řez byl ostrý a jeho konce nebyly roztřepené.

Na poslední kartu postupky (v našem případě karta Q) srovnáme stříhanou kartu tak, aby otvory byly přesně na sobě. Menší část karty (část s otvorem) natřeme z rubu lepidlem a přilepíme na lícovou stranu poslední karty postupky (viz obr. 37).



obr. 36



obr. 37

Nyní potřeujeme lepidlem právě nalepený kousek karty a přilepíme k němu druhou kartu postupky (v našem případě karta K) tak, že tuto kartu přilepíme k odstříženému kousku rubem. Do jakési „kapsičky“, kterou jsme tímto způsobem vytvořili, lze vsunout zbytek karty, která je vzhledem k postupce navíc (viz obr. 38). Tím jsme získali trikovou kartu, kterou při předvádění triku neukazujeme detailně.



obr. 38

Předvedení triku

Při předvádění triku srovnáme na stole nebo do ruky karty tak, aby tvořily postupku (druhá karta postupky je triková karta složená ze tří karet). Kartu, která je vzhledem k postupce navíc, zařadíme za trikovou kartu. Posluchačům ukážeme, že máme v ruce čtyři karty - tři tvořící postupku a čtvrtou zařazenou na předposlední místo balíčku karet (viz obr. 39).



obr. 39

Nyní karty zarovnáme k sobě a otvorem protáhneme tužku. Jde to snadno. Poté tužku vytáhneme zpět a karty v balíčku začneme postupně mírně ohýbat, abychom ukázali i karty pod první kartou (viz obr. 40). Přitom ale máme na paměti, že můžeme takto ukázat pouze 4 karty - první kartu postupky (ta je na vrchu balíčku), druhou kartu postupky (vrchní kartu trikové karty), kartu, která je navíc (druhá karta trikové karty), a pod ní poslední kartu postupky (poslední karta trikové karty). Kartu, která je navíc, opatrně vytáhneme z balíčku (viz obr. 41) a do otvoru v balíčku opět zasuneme tužku (viz obr. 42).

Se slovy, že se musíme maximálně soustředit na provedení triku, zasuneme povytaženou kartu zpět na původní místo (viz obr. 43 a obr. 44). Karta prošla tužkou!

Na závěr triku karty postupně z tužky sundáme - první kartu postupky, trikovou kartu a ze spodní části balíčku i poslední kartu postupky. Tyto karty odložíme stranou a ukážeme, že karta, která byla navíc, je neporušená.



obr. 40



obr. 41



obr. 42



obr. 43



obr. 44

7. Schování nohou čtyř králů

Matematická témata

geometrická představivost

Úkol

Máme čtyři karty s obrázky králů (viz obr. 45). Bez použití dalších karet či jiných předmětů schovejte všem čtyřem králům nohy.



obr. 45

Řešení

Řešení zadaného úkolu je zobrazeno na obr. 46.



obr. 46

8. Hádání karty - výběr ze dvou balíčků

Matematická témata

postřeh

Příprava triku

Před předvedením následujícího triku rozdělíme jednohlavé mariášové hrací karty do dvou skupin podle toho, zda je nebo není na kartě zobrazena rostlina rostoucí ze země (viz příklad karet z obou skupin na obr. 47).



obr. 47

Podobné dělení lze provést podle přítomnosti resp. nepřítomnosti nakresleného zvířete na kartě. Ale toto dělení je výrazně nesymetrické - karet se zvířaty je přibližně poloviční počet, je počet karet bez zvířat, zatímco dělení podle přítomnosti rostliny vyrůstající ze země je výrazně symetričtější.

Provedení triku

Před dobrovolníka z publika položíme oba balíčky předem roztříděných karet a vyzveme ho, aby si jeden z balíčků vybral. Tento balíček před ním v ruce rozložíme do tvaru vějíře tak, aby líc karet směřoval k divákovi. Vyzveme jej, aby si jednu kartu vybral, neukazoval jí předvádějícímu triku (ale divákům v publiku ji ukázat může) a zapamatoval si jí. Mezi tím zaměníme nenápadně oba balíčky (po výběru balíčku diváka dáme druhý balíček do přihrádky pod stůl a pak se shýbneme a vyměníme s balíčkem divákovým, máme oba balíčky stále v ruce a divákovi podstrčíme druhý balíček, ...) a vyzveme diváka, aby kartu vrátil do balíčku. Balíček s kartami zamícháme a karty začneme po jedné dávat lícem nahoru na stůl. Divákovu kartu poznáme snadno, a proto po rozdání všech karet z balíčku tuto kartu zvedneme a ukážeme divákovi.

9. Karty skládané do tvaru ciferníku

Matematická témata

postřeh

Provedení triku

K následujícímu triku budeme potřebovat balíček mariášových karet. Dvanáct z nich rozložíme na stůl do tvaru připomínajícího ciferník hodin (viz obr. 48). Divákům, kteří sledují trik, oznámíme, jak jsou „hodiny z karet“ orientovány (tj. kde je dvanáctka). Jednoho z diváků pak vyzveme, aby si jednu kartu zapamatoval - a to včetně její pozice na ciferníku pomyslných hodin.



obr. 48

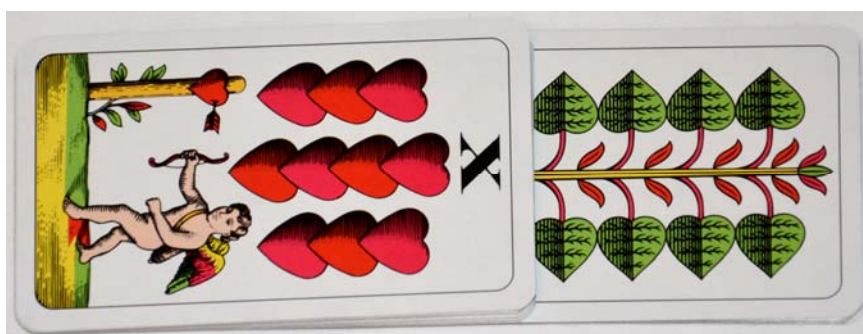
Poté začneme karty sbírat tak, že začneme od karty položené na „první hodině“ (na obrázku obr. 48 to je zelená osmička). Tato karta bude na vrchu balíčku, pod ní bude karta ležící na „druhé hodině“ (žaludské eso) a zcela vespod balíčku bude karta ležící na „dvanácté hodině“ (kulový filek). Takto poskládaný balíček karet (viz obr. 49) položíme na zbývajících karty sady lícem dolů (na obr. 50 je celý balíček zobrazen z druhé strany - tj. lícem nahoru).

Takto vytvořený balíček podáme lícem karet dolů divákovi, který si zapamatoval jednu kartu a její polohu na ciferníku, a požádáme ho, aby přemístil zespoda balíčku nahoru tolik karet, na kolikátém čísle ciferníku hodin jím vybraná karta ležela. Předvádějící triku se předtím otočí k divákovi zády, aby neviděl počet přemísťovaných karet.

Po přemístění karet divákem si od něj balíček převezmeme zpět a začneme karty rozkládat na stůl lícem dolů (jednu vedle druhé nebo po dvojicích). Pak sáhneme na jednu z karet, otočíme jí a ukážeme divákovi. Je to jím vybraná karta.



obr. 49



obr. 50

Vysvětlení triku

Pokud sebereme rozložené karty výše popsáním způsobem a umístíme je lícem dolů na zbytek balíčku karet, bude divákem zvolená karta $(13 - n)$ -tá od vrcholu balíčku, n je číslo odpovídající číslu na imaginárním ciferníku, na kterém byly karty položeny. (Pokud si divák vybral kartu z „první hodiny“, je karta v balíčku na dvanáctém místě, pokud si vybral kartu ze „dvanácté hodiny“, je na prvním místě).

Po přesunutí n karet ze spodu balíčku na vrch balíčku, bude divákova karta na třináctém místě. Proto potom předvádějícímu stačí zapamatovat si při rozkládání karet na stůl polohu třinácté karty odebrané z horní části balíčku.

10. Řazení karet do matice 4 krát 5

Matematická témata

postřeh

Provedení triku

K tomuto triku budeme potřebovat 20 hracích karet. Tyto karty vyskládáme na stůl po dvojicích (viz obr. 51) a diváky vyzveme, aby si každý z nich zapamatoval jednu dvojici karet. Poté karty sebereme do jednoho balíčku tak, aby dvojice zůstaly u sebe.



obr. 51

Nyní začneme karty vykládat na stůl do matice 4 krát 5 karet (viz obr. 52) tak, aby karty patřící do téže dvojice ležely na místech odpovídajícím stejným písmenům zobrazeným v tab. 1.

M	U	T	U	S
N	O	M	E	N
D	E	D	I	T
C	O	C	I	S

tab. 1



obr. 52

Jakmile je na stole vyloženo všech 20 karet, vyzveme diváka (případně postupně více diváků), aby označil tu řadu (resp. ty řady), v nichž se nachází jím vybraná dvojice karet. Pokud jsme karty vyložili na stůl správně, je snadné dle tab. 1 určit, o jaké dvě karty se jedná.

11. Zaručeně správné rovnosti

Matematická témata

řešení rovnic, určování definičního oboru rovnice, ekvivalentní úpravy

Zadání

V dalším textu této kapitoly jsou uvedeny úpravy výchozí rovnice (resp. nerovnice) nebo úpravy jedné rovnosti, přičemž tyto úpravy vedou k nepravdivým závěrům. To znamená, že úpravy, které na první pohled vypadají jako ekvivalentní úpravy rovnic, ekvivalentní nejsou. Úkolem je odhalit, který krok ve výpočtu způsobil nepravdivý závěr zadané rovnice, nerovnice nebo rovnosti.

Hmotnost slona = hmotnost komára

Pomocí matematických úprav můžeme dokázat i zdánlivě nemožné. Označme symbolem x hmotnost slona a symbolem y hmotnost komára. Součet obou hmotností pak označme $2v$. Platí tedy $x + y = 2v$. Z této rovnice můžeme postupně vyjádřit x i $-y$. Dostaneme tak: $x = 2v - y$ a $x - 2v = -y$. Obě tyto rovnice nyní vynásobíme tak, že násobíme pravou stranou první rovnice pravou stranu druhé rovnice; analogicky i pro levé strany.

Dostaneme tak: $x \cdot (x - 2v) = (2v - y) \cdot (-y)$

Po úpravě máme: $x^2 - 2vx = -2vy + y^2$

K oběma stranám rovnice přičteme v^2 a dostaneme: $x^2 - 2vx + v^2 = y^2 - 2vy + v^2$

S využitím algebraických vztahů můžeme psát: $(x - v)^2 = (y - v)^2$

Po odmocnění dostáváme: $x - v = y - v$ a tedy $x = y$.

Závěr: hmotnost slona se rovná hmotnosti komára. Kde je chyba?

2 = 3

Postupnými úpravami můžeme psát:

$$4 - 10 = 9 - 15$$

$$4 - 10 + \frac{25}{4} = 9 - 15 + \frac{25}{4}$$

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$$

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$$

$$2 = 3$$

Dospěli jsme zjevně k nepravdivému výroku. Kde je chyba?

2.2 = 5

Postupnými úpravami můžeme psát:

$$16 - 36 = 25 - 45$$

$$16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}$$

$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$$

$$2 \cdot 2 = 5$$

Dospěli jsme zjevně k nepravdivému výroku. Kde je chyba?

3 = 5

Postupnými úpravami můžeme psát:

$$3 - 3 = 5 - 5$$

$$3 \cdot (1 - 1) = 5 \cdot (1 - 1)$$

$$3 = 5$$

Poslední výrok je nepravdivý. Kde je chyba?

1 = 2

Výraz $a^2 - a^2$ můžeme rozepsat dvojím způsobem. Platí $a^2 - a^2 = a(a - a)$, ale také $a^2 - a^2 = (a - a) \cdot (a + a)$. Porovnáním obou výrazů, které jsme získali, dostaneme rovnost: $a(a - a) = (a - a) \cdot (a + a)$. Dalšími úpravami postupně dostaneme:

$$a = a + a$$

$$a = a \cdot (1 + 1)$$

$$1 = 2$$

Kde se stala chyba, jestliže jsme získali nepravdivý výrok?

2 > 3

Postupnými úpravami můžeme psát:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\log\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \log\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$2\log\frac{1}{2} > 3\log\frac{1}{2}$$

$$2 > 3$$

Poslední výrok je nepravdivý. Najděte chybnou úvahu!

2 > 3

Postupnými úpravami můžeme psát:

$$4 < 8$$

$$\log_{0,5} 4 < \log_{0,5} 8$$

$$-2 < -3$$

$$2 > 3$$

Poslední výrok je nepravdivý. Najděte chybnou úvahu!

-2 = 2

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Kde je chyba?

Řešení**Hmotnost slona = hmotnost komára**

Chyba nastala při odmocňování řádku: $(x-v)^2 = (y-v)^2$. Po odmocnění musíme psát správně $|x-v| = |y-v|$. Na základě označení součtu hmotností slona a komára z rovnosti $x+y=2v$ vyplývá rovnost $v = \frac{x+y}{2}$. Číslo v je tedy aritmetickým průměrem čísel x a y .

Vzhledem k označení (x je hmotnost slona a y je hmotnost komára) je zřejmé, že platí $y < v < x$. Má-li být odmocnění ekvivalentní úpravou, musíme získat kladné číslo. Proto řádek po odmocnění musíme (vzhledem k uvedené nerovnosti mezi x , y a v) psát ve tvaru $x-v = v-y$. Odtud získáme původní rovnici $x+y=2v$.

2 = 3

Pokud má být odmocnění ekvivalentní úpravou, pak po řádku $\left(2-\frac{5}{2}\right)^2 = \left(3-\frac{5}{2}\right)^2$ musí následovat řádek $\left|2-\frac{5}{2}\right| = \left|3-\frac{5}{2}\right|$. Po odstranění absolutních hodnot získáme rovnost $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, která je pravdivým výrokem.

2.2 = 5

Stejná chyba jako u úlohy „2 = 3“. Po odmocnění dostaneme $\left|4-\frac{9}{2}\right| = \left|5-\frac{9}{2}\right|$ a tedy $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

3 = 5

Rovnost $3 \cdot (1-1) = 5 \cdot (1-1)$ nelze dělit výrazem $(1-1)$, protože tento výraz je nulový.

1 = 2

Rovnici $a(a-a) = (a-a) \cdot (a+a)$ nelze dělit výrazem $(a-a)$, protože tento výraz je nulový. Další chybou je úprava rovnice $a = a \cdot (1+1)$ - tu nelze dělit neznámou a (není zaručeno, že je nenulová). Proto musíme pokračovat bez dělení rovnice neznámou. Rovnici $a = a \cdot (1+1)$ upravíme na tvar $a = 2a$ a následně zjednodušíme do konečné podoby $a = 0$.

2 > 3

Chyba vznikla dělením nerovnosti $2 \log \frac{1}{2} > 3 \log \frac{1}{2}$ výrazem $\log \frac{1}{2}$. Tento výraz je totiž záporný, a proto při dělení musíme změnit relační operátor na jiný. Správně tedy dostaneme $2 < 3$.

2 > 3

Chyba nastala hned na druhém řádku. Nerovnost jsme logaritmovali logaritmem při základu 0,5. Funkce $y = \log_{0,5} x$ je klesající na celém svém definičním oboru. Proto musíme opět změnit relační operátor a dostaneme tak: $\log_{0,5} 4 > \log_{0,5} 8$. Další úvahy jsou již správné.

-2 = 2

Chyba je v aplikaci třetí odmocniny na záporné číslo. Podle definice je n -tá odmocnina definována pouze z nezáporných čísel.

12. Přeskládání trojúhelníka

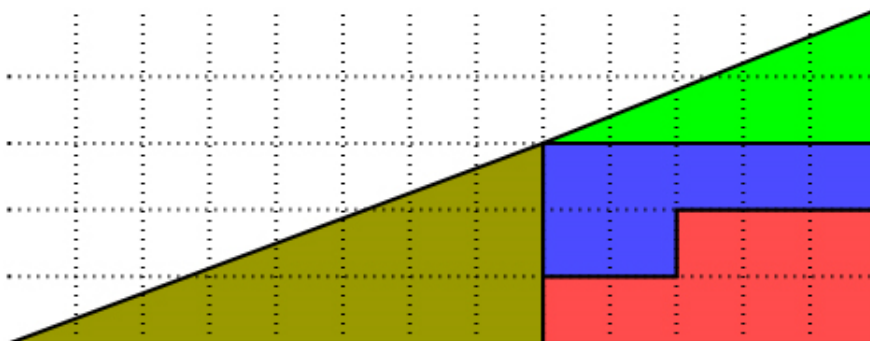
Matematická témata

obsahy rovinných obrazců

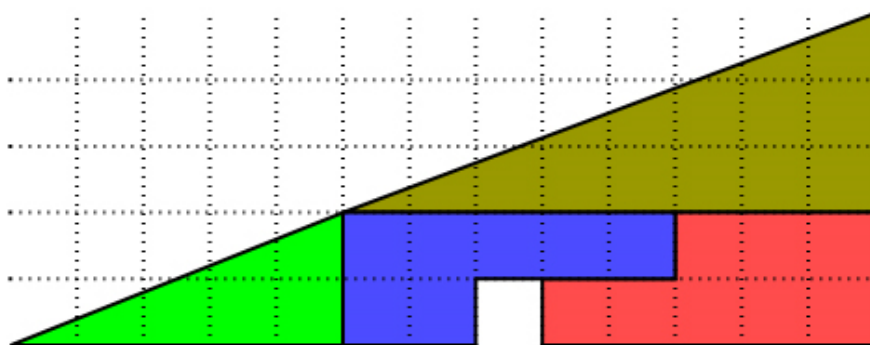
Zadání

Na obr. 53 je zobrazen trojúhelník složený ze čtyř částí. Přeskládáním těchto částí získáme útvar zobrazený na obr. 54, který má ale menší plošný obsah.

Vysvětlete, jak je to možné.



obr. 53



obr. 54

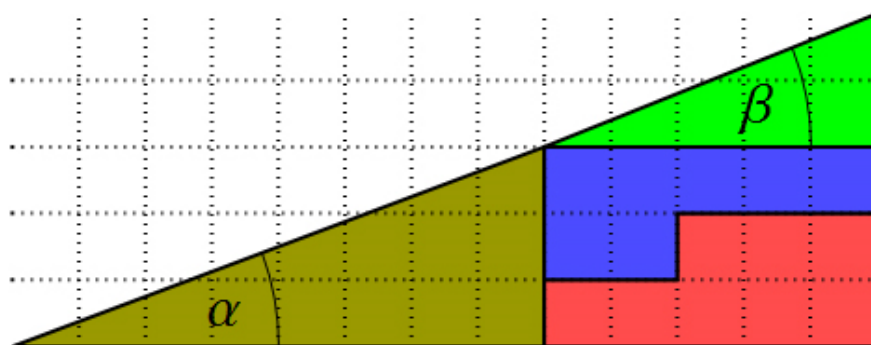
Řešení

Pouhým přerovnáním částí obrazce zobrazeného na obr. 53 nemůžeme změnit plošný obsah. Příčinu zdánlivé změny plošného obsahu nalezneme při detailnějším pohledu na původní útvar. Ten je spolu s vyznačením dvou úhlů zobrazen na obr. 55.

Na základě obr. 55 můžeme pro úhly α a β tedy psát: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{8}$ a $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{5}$. Vzhledem k tomu, že $\frac{3}{8} < \frac{2}{5}$ a vzhledem k tomu, že funkce tangens je na svém definičním oboru rostoucí, je $\alpha < \beta$. Na obr. 53 a obr. 55 tedy nejsou zobrazené pravoúhlé trojúhelníky, ale čtyřúhelníky.

Obsah tohoto čtyřúhelníku je $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 + 7 + 8 \text{ j}^2 = 12 + 5 + 15 \text{ j}^2 = 32 \text{ j}^2$.

Obsah „trojúhelníku“, za který bývá obrazec na obr. 53 považován, je mylně počítán jako $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 5 \text{ j}^2 = 32,5 \text{ j}^2$ a obsah útvaru zobrazeného na obr. 54 je mylně počítán jako $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 5 - 1 \text{ j}^2 = 31,5 \text{ j}^2$.



obr. 55

Pro zajímavost je vhodné se podívat na rozměry dvou pravoúhlých trojúhelníků, které jsou částmi obou zde diskutovaných útvarů. Délky jejich odvěsen jsou 8 j, 3 j, 5 j a 2 j. Pokud tyto délky seřadíme vzestupně, dostaneme řadu 2 j, 3 j, 5 j a 8 j. Číselné hodnoty délek stran těchto trojúhelníků tvoří za sebou jdoucí členy Fibonacciho posloupnosti.

13. Přeskládání obdélníka

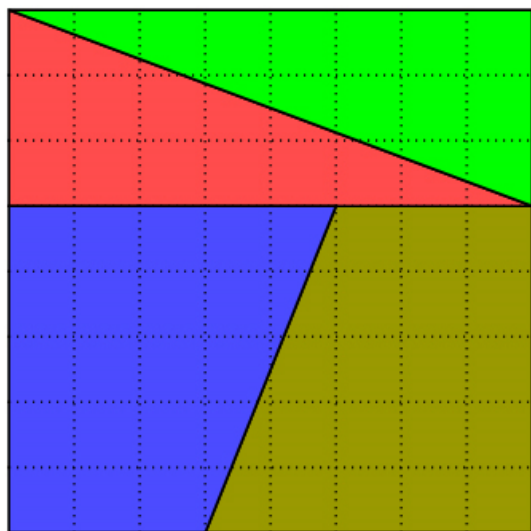
Matematická témata

obsahy rovinných obrazců

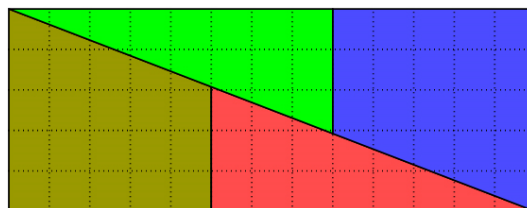
Zadání

Na obr. 56 je zobrazen čtverec složený ze čtyř částí. Strana čtverce měří 8 j. a jeho obsah tedy je 64 j^2 . Na obr. 57 je zobrazen obdélník, který vznikl ze čtverce z obr. 56 přeskládáním jeho jednotlivých částí. Rozměry obdélníka jsou 13 j. a 5 j.; jeho plošný obsah tedy je 65 j^2 . Jak je to možné? Vysvětlete.

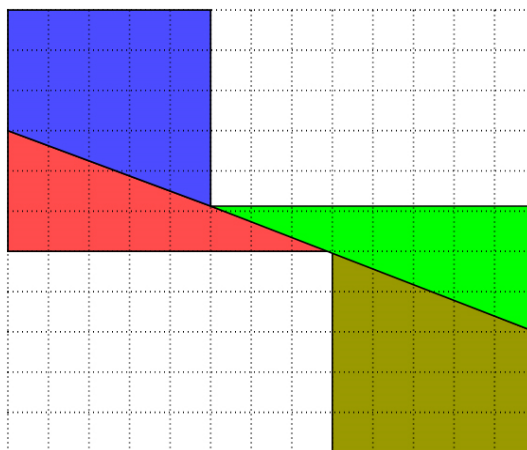
Na obr. 58 je zobrazen geometrický útvar, který vznikl opět přeskládáním z původního čtverce a který má plošný obsah $5 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 6 \text{ j}^2 = 63 \text{ j}^2$. Jak je tohle možné? Zdůvodněte.



obr. 56



obr. 57



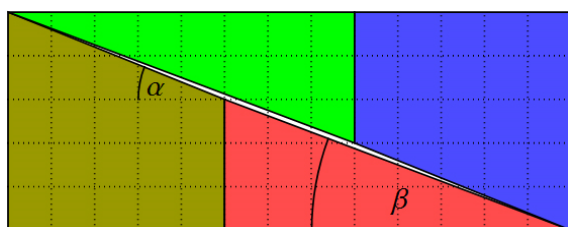
obr. 58

Řešení

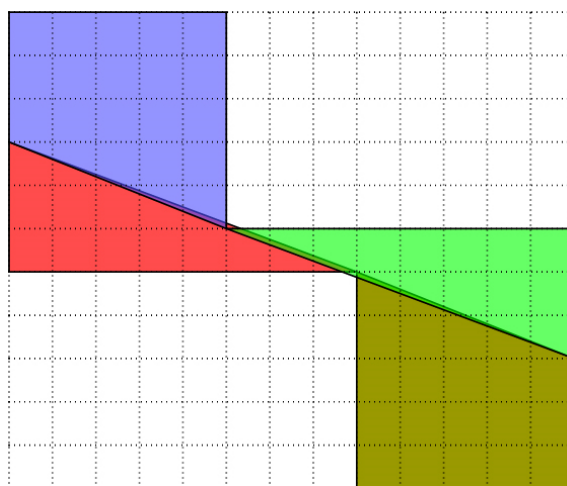
Je zřejmé, že pouhým přerovnáním částí čtverce zobrazeného na obr. 56 se nemůže změnit obsah daného obrazce. Obrazce zobrazené na obr. 57 a obr. 58 nejsou ty, které při přeskládání částí původního čtverce skutečně vzniknou. Obrazce se správnými geometrickými proporcemi jsou zobrazeny na obr. 59 a obr. 60.

Útvar, který na obr. 57 vypadá jako trojúhelník složený z trojúhelníku a lichoběžníku, je ve skutečnosti čtyřúhelník. Úhly α a β zobrazené na obr. 59 totiž nejsou stejné. Pro úhel α můžeme psát $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$, zatímco pro úhel β $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{8}$. Vzhledem k tomu, že $\frac{2}{5} > \frac{3}{8}$ a funkce tangens je rostoucí na svém definičním oboru, je $\alpha > \beta$. Strana lichoběžníku tedy stoupá strměji, než přepona pravoúhlého trojúhelníka. Proto při přeskládání čtverce na obdélník vznikne podél jeho úhlopříčky mezera, která má obsah právě $1 j^2$.

V důsledku právě uvedených faktů se části původního čtverce při přeskládání do útvaru zobrazeného na obr. 58 (resp. obr. 60) částečně překrývají.



obr. 59



obr. 60

Pro zajímavost se můžeme podívat na rozměry dvou pravoúhlých trojúhelníků, které jsou částmi zde diskutovaných útvarů. Délky jejich odvěsen jsou 8 j, 3 j, 5 j a 2 j. Pokud tyto délky seřadíme vzestupně, dostaneme řadu 2 j, 3 j, 5 j a 8 j. Číselné hodnoty délek stran těchto trojúhelníků tedy tvoří za sebou jdoucí členy Fibonacciho posloupnosti.

14. Průchod pohlednicí

Matematická témata

obsahy a obvody geometrických útvarů, kreativita

Zadání

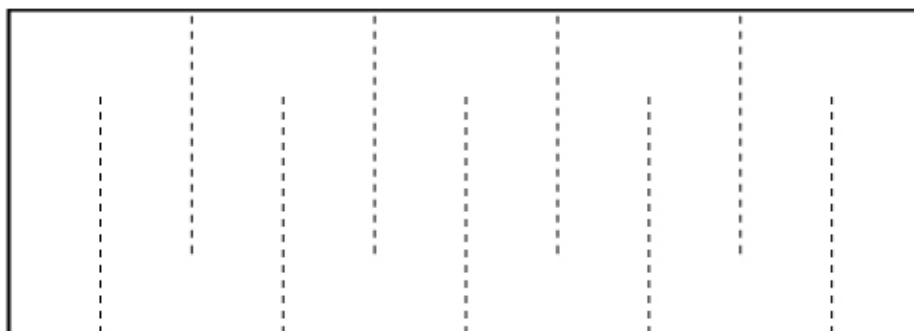
Vytvořte v papíru formátu A4 takový otvor, kterým se můžete protáhnout.

Až se vám to podaří, zkuste totéž s papírem formátu A5 či A6 (tj. formát pohlednice).

Řešení

První nápad, který nás napadne jako první, bude do papíru vystříhnout díru ve tvaru obdélníka. Rámečkem, který z papíru zbude, se ovšem neprotáhneme. Proto je nutné vymyslet jinou metodu.

Metoda, pomocí které se podaří splnit zadání úkolu, využívá k vytvoření otvoru v papíru výrazně více plochy papíru, než metoda první. Postup je přitom jednoduchý. Papír přeložíme podél jeho podélné osy na polovinu. Nyní papír pomocí nůžek nastříháme. Jednotlivé stříhy nůžkami jsou naznačeny schematicky na obr. 61. Výsledek stříhání je zobrazen na obr. 62. Abychom vytvořili v papíru skutečně otvor, je nutné přestříhnout hřbet přehybu papíru. Ale pozor! Na obou krajích musí zůstat hřbet neporušen! Pokud bychom přestříhli hřbet i na obou krajích, papír by se rozpadl. Správně rozstřižený hřbet papíru je zobrazen na obr. 63. Roztažením papíru vznikne požadovaný otvor (viz obr. 64).

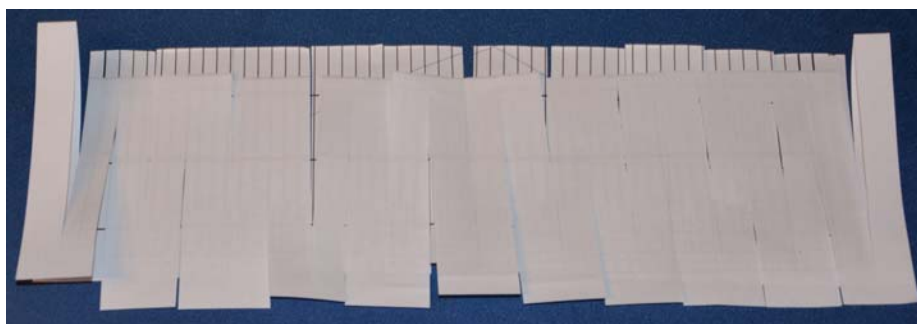


hřbet přehybu

obr. 61



obr. 62



obr. 63



obr. 64

15. Uhodnutí čísla z různých kartiček

Matematická témata

číselné soustavy s různým základem, mocniny čísel, posloupnosti

Zadání

Následující úlohu lze formulovat jako matematické kouzlo.

Posluchači si prohlédnou kartičky s čísly zobrazené v tab. 2 až tab. 7. Poté si jedno z čísel vyberou a předvádějícímu tento trik oznámí, na kterých kartičkách se vybrané číslo nachází. Předvádějící téměř okamžitě myšlené číslo oznámí.

1	11	21	31	41	51
3	13	23	33	43	53
5	15	25	35	45	55
7	17	27	37	47	57
9	19	29	39	49	59

tab. 2

2	11	22	31	42	51
3	14	23	34	43	54
6	15	26	35	46	55
7	18	27	38	47	58
10	19	30	39	50	59

tab. 3

4	13	22	31	44	53
5	14	23	36	45	54
6	15	28	37	46	55
7	20	29	38	47	60
12	21	30	39	52	

tab. 4

8	13	26	31	44	57
9	14	27	40	45	58
10	15	28	41	46	59
11	24	29	42	47	60
12	25	30	43	56	

tab. 5

16	21	26	31	52	57
17	22	27	48	53	58
18	23	28	49	54	59
19	24	29	50	55	60
20	25	30	51	56	

tab. 6

32	37	42	47	52	57
33	38	43	48	53	58
34	39	44	49	54	59
35	40	45	50	55	60
36	41	46	51	56	

tab. 7

Řešení

Myšlené číslo je dáno součtem čísel nacházejících se na prvním poli těch kartiček, na kterých se nachází myšlené číslo.

Pokud si posluchač vybral číslo 21, oznámí přednášejícímu, že se jím vybrané číslo nachází na kartičkách z tab. 2, tab. 4 a tab. 6. Přednášející v hlavě tedy sečte čísla 1, 4 a 16 a oznámí posluchači, že jím myšlené číslo je 21.

Princip, na základě kterého trik funguje, vyplývá z tab. 8, ve které jsou pro přehlednost uvedena pouze čísla od 1 do 32. V této tabulce jsou zobrazena čísla od 1 do 32 a jejich vyjádření ve dvojkové soustavě. Např. pro číslo 6 podle této tabulky platí: $6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$, a proto platí $(6)_{10} = (110)_2$.

	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1						1
2					1	0
3					1	1
4				1	0	0
5				1	0	1
6				1	1	0
7				1	1	1
8			1	0	0	0
9			1	0	0	1
10			1	0	1	0
11			1	0	1	1
12			1	1	0	0
13			1	1	0	1
14			1	1	1	0
15			1	1	1	1
16		1	0	0	0	0
17		1	0	0	0	1
18		1	0	0	1	0
19		1	0	0	1	1
20		1	0	1	0	0
21		1	0	1	0	1
22		1	0	1	1	0
23		1	0	1	1	1
24		1	1	0	0	0
25		1	1	0	0	1
26		1	1	0	1	0
27		1	1	0	1	1
28		1	1	1	0	0
29		1	1	1	0	1
30		1	1	1	1	0
31		1	1	1	1	1
32	1	0	0	0	0	0

tab. 8

Na základě tab. 8 je možné také pochopit, jak byly vytvořeny tabulky tab. 2 až tab. 7. V tab. 2, která začíná číslem 1 (tj. 2^0) jsou obsažena všechna lichá čísla - tj. ta čísla, u kterých

je v posledním sloupci tabulky tab. 8 (tj. sloupec označen symbolem 2^0) symbol 1. V tab. 3 jsou ta čísla, u kterých je v tab. 8 ve sloupci označeném 2^1 zapsán symbol 1. Analogicky se konstruuji další tabulky (tab. 4 až tab. 7).

Ze dvojkového zápisu čísel uvedených v tab. 8 je také zřejmé, proč je hádání čísel tak snadné. Tím, že posluchač nahlásí ty tabulky, ve kterých se vyskytuje jeho číslo, hlásí vlastně (ve shodě s tab. 8), pomocí jakých mocnin čísla 2 lze získat myšlené číslo jako součet.

16. 1089

Matematická témata

matematické operace s čísly

Zadání

Tuto úlohu můžeme formulovat jako matematické kouzlo. Předvádějící řekne, že si každý z posluchačů za chvíli zvolí svoje číslo, se kterým bude provádět jisté matematické operace. Ale předvádějící ještě předtím napíše výsledek těchto operací na papír tak, aby to posluchači neviděli. Na závěr pak číslo napsané na papíru ukáže posluchačům.

Nyní předvádějící vyzve posluchače, aby si zvolili libovolné trojčíferné číslo, jehož první a poslední cifra se liší alespoň o dvě. Toto číslo si každý zapíše na papír. Pod toto číslo pak každý zapíše číslo, které vznikne z původního tak, že se jednotlivé cifry napíše v opačném pořadí. Nyní tato dvě čísla od sebe odečteme (od většího čísla odčítáme menší). K výslednému rozdílu opět vytvoříme číslo, které má pořadí číslic opačné, a tato dvě čísla sečteme. Výsledkem bude (bez ohledu na volbu prvního čísla) vždy číslo 1089.

A to je i číslo, které má předvádějící napsané na papíru a které nyní posluchačům ukáže.

Důkaz

Trojčíferné číslo, které na počátku triku volíme, můžeme psát ve tvaru $c_1 = 100a + 10b + c$, kde a, b a c jsou jednocíferná přirozená čísla nebo nula, přičemž $a \neq 0$ a $|a - c| \geq 2$. Číslo, které se liší pořadím číslic, pak můžeme psát ve tvaru: $c_2 = 100c + 10b + a$. Nyní bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $a > c$. Rozdíl čísel c_1 a c_2 proto můžeme psát ve tvaru: $c_3 = c_1 - c_2 = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c)$. Číslo, které získáme po provedení rozdílu je tedy číslo dělitelné číslem 99. Do úvahy připadají tedy čísla 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 a 891.

Číslo 198 je dvojnásobkem čísla 99, číslo 891 je devíti násobkem čísla 99, číslo 297 je trojnásobkem čísla 99 a číslo 792 je osminásobkem čísla 99. Podobně můžeme v úvahách pokračovat dále. Proto můžeme číslo c_4 s opačným pořadím cifer ve srovnání s číslem c_3 psát ve tvaru: $c_4 = 99(11 - (a - c))$. Pro součet čísel c_3 a c_4 tedy dostáváme: $c_3 + c_4 = 99(a - c) + 99(11 - (a - c)) = 99 \cdot 11 = 1089$.

Bez ohledu na počáteční volbu trojčíferného čísla tak vždy vyjde poslední součet roven 1089.

17. Dürerův magický čtverec

Matematická témata

součty čísel

Popis

V roce 1514 vytvořil německý malíř Albrecht Dürer (1471 - 1528), jehož autoportrét je zobrazen na obr. 65, dřevoryt *Melancholie I.* (viz obr. 66). Na tomto dřevorytu, který je plný různých geometrických i náboženských symbolů, je také zobrazen magický čtverec (viz obr. 67). Na obr. 68 je čtverec převeden do současného způsobu zápisu.



obr. 65



obr. 66

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

obr. 67

Tento čtverec, v němž je umístěno prvních 16 přirozených čísel, je sestaven tak, že součty různých čísel v něm obsažených jsou rovny číslu 34 (viz obr. 69 až obr. 80).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

obr. 68

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

obr. 69

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

obr. 70

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

obr. 71

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

obr. 72

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

obr. 73

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

obr. 74

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

obr. 75

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

obr. 76

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

obr. 77

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

obr. 78

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

obr. 79

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

obr. 80

Poslední odkaz je pak ukryt v posledním řádku tabulky. Je v ní zakomponován nejen rok 1514, ve kterém Albrecht Dürer obraz *Melancholie I.* vytvořil, ale také čísla písmen, kterými začínají jeho jméno (A je první písmeno abecedy) a příjmení (D je čtvrté písmeno abecedy).

18. Krása matematiky ... ☺

Matematická témata

matematické operace s čísly

Popis

Matematika i fyzika udivují a fascinují její přívržence nejen svou logickou stavbou a srozumitelným jazykem, ale také svojí vnitřní krásou. Některé krásy matematiky jsou zobrazeny na obr. 81 až obr. 85.

$$1 * 8 + 1 = 9$$

$$12 * 8 + 2 = 98$$

$$123 * 8 + 3 = 987$$

$$1234 * 8 + 4 = 9876$$

$$12345 * 8 + 5 = 98765$$

$$123456 * 8 + 6 = 987654$$

$$1234567 * 8 + 7 = 9876543$$

$$12345678 * 8 + 8 = 98765432$$

$$123456789 * 8 + 9 = 987654321$$

obr. 81

$$1 * 9 + 2 = 11$$

$$12 * 9 + 3 = 111$$

$$123 * 9 + 4 = 1111$$

$$1234 * 9 + 5 = 11111$$

$$12345 * 9 + 6 = 111111$$

$$123456 * 9 + 7 = 1111111$$

$$1234567 * 9 + 8 = 11111111$$

$$12345678 * 9 + 9 = 111111111$$

$$123456789 * 9 + 10 = 1111111111$$

obr. 82

$$1^2 = 1$$

$$11^2 = 121$$

$$111^2 = 12321$$

$$1111^2 = 1234321$$

$$11111^2 = 123454321$$

$$111111^2 = 12345654321$$

$$1111111^2 = 1234567654321$$

$$11111111^2 = 123456787654321$$

$$111111111^2 = 12345678987654321$$

$$1111111111^2 = 1234567900987654321$$

obr. 83

$$9 * 9 + 7 = 88$$

$$98 * 9 + 6 = 888$$

$$987 * 9 + 5 = 8888$$

$$9876 * 9 + 4 = 88888$$

$$98765 * 9 + 3 = 888888$$

$$987654 * 9 + 2 = 8888888$$

$$9876543 * 9 + 1 = 88888888$$

$$98765432 * 9 + 0 = 888888888$$

$$987654321 * 9 - 1 = 8888888888$$

$$9876543210 * 9 - 2 = 88888888888$$

obr. 84

$$3 * 37 = 111$$

$$6 * 37 = 222$$

$$9 * 37 = 333$$

$$12 * 37 = 444$$

$$15 * 37 = 555$$

$$18 * 37 = 666$$

$$21 * 37 = 777$$

$$24 * 37 = 888$$

$$27 * 37 = 999$$

$$30 * 37 = 1110$$

obr. 85

Další krásy matematiky mají přesah i do běžného života. Na základě tab. 9 můžeme jednotlivým písmenům anglické abecedy přiřadit čísla od 1 do 26.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

tab. 9

Pokusíme se nyní pomocí součtu výše uvedených čísel dosáhnout čísla 100 (resp. co nejvíce se přiblížit číslu 100).

Můžeme tak psát:

$$8+1+18+4+23+15+18+11=98 \quad (\text{tvrdá práce})$$

H - A - R - D - W - O - R - K

$$11+14+15+23+12+5+4+7+5=96 \quad (\text{vědomosti})$$

K - N - O - W - L - E - D - G - E

$$1+20+20+9+20+21+4+5=100 \quad (\text{přístup})$$

A - T - T - I - T - U - D - E

Z toho tedy vyplývá (s matematickou přesností), že tvrdou prací a vědomostmi se pouze přiblížíme k číslu 100 (resp. 100 %), ale svým přístupem sta procent dosáhneme!

19. Hlavalamy ze sirek

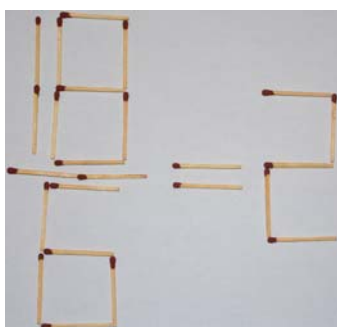
Matematická témata

postřeh, geometrická představivost

Zadání

Řadu zajímavých úloh lze sestavit s využitím zápalek a jejich skládáním do různých obrazců.

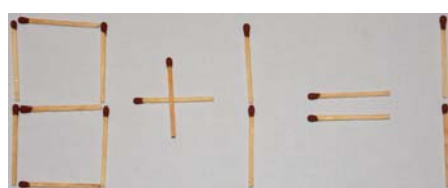
Přesunutím jedné zápalky vytvořte na obr. 86 až obr. 93 platnou matematickou rovnost. Řešení jsou uvedena na obr. 117 až obr. 125 (hlavolam zobrazený na obr. 90 má dvě řešení).



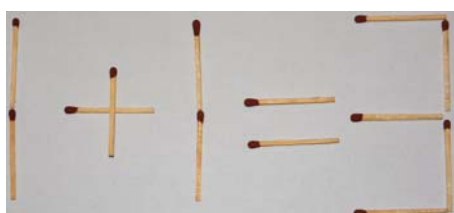
obr. 86



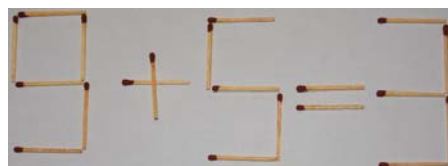
obr. 87



obr. 88



obr. 89



obr. 90



obr. 91

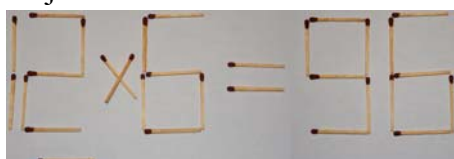


obr. 92

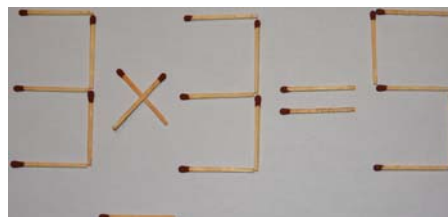


obr. 93

Přidáním jedné zápalky vytvořte na obr. 94 a obr. 95 platnou matematickou rovnost. Řešení jsou uvedena na obr. 126 a obr. 127.



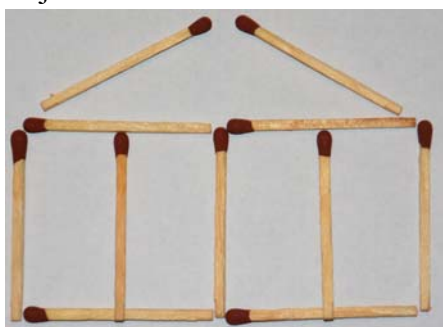
obr. 94



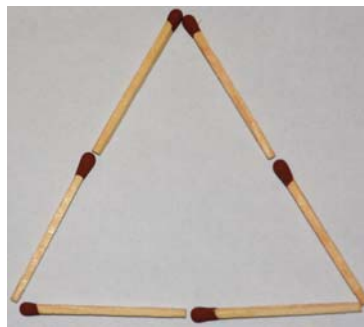
obr. 95

Přesunutím dvou zápalek na obr. 96 vytvořte jedenáct čtverců. Řešení je uvedeno na obr. 128.

Přidáním tří zápalek k útvaru na obr. 97 vytvořte pět rovnostranných trojúhelníků. Řešení je uvedeno na obr. 129.



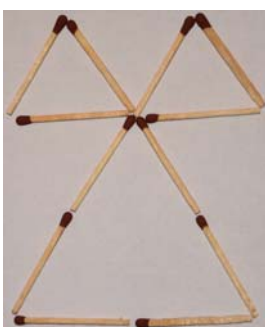
obr. 96



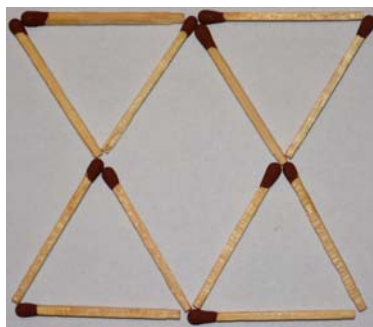
obr. 97

Přesunutím čtyř zápalek v obrazci na obr. 98 a obr. 99 vytvořte pět rovnostranných trojúhelníků. Řešení jsou uvedena na obr. 130 a obr. 131.

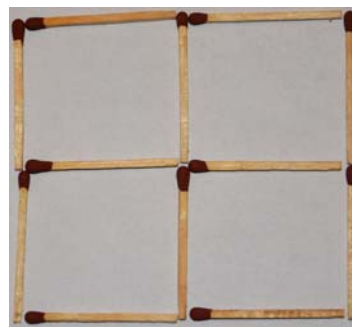
Přesunutím dvou zápalek v obrazci na obr. 100 vytvořte sedm čtverců. Řešení je uvedeno na obr. 132.



obr. 98



obr. 99



obr. 100

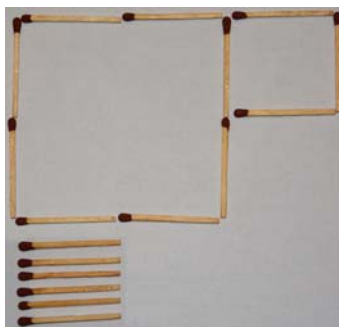
Přesunutím tří zápalek v obrazci na obr. 101 vytvořte šest rovnostranných trojúhelníků. Řešení je uvedeno na obr. 133.

Přidáním šesti zápalek k obrazci na obr. 102 vytvořte osm čtverců. Řešení je uvedeno na obr. 134.

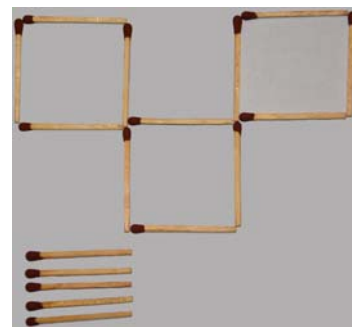
Přidáním pěti zápalek k obrazci na obr. 103 vytvořte osm čtverců. Řešení je uvedeno na obr. 135.



obr. 101



obr. 102

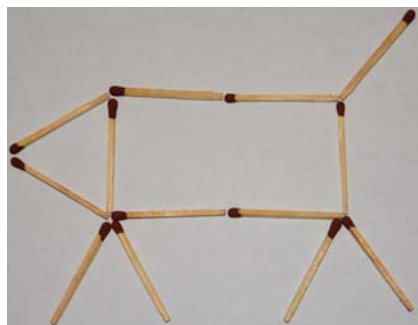


obr. 103

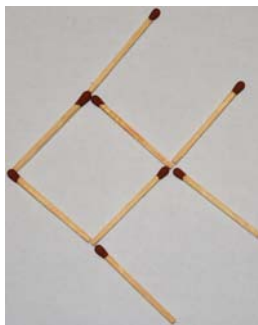
Přesunutím dvou zápalek zajistěte, aby se prase na obr. 104 dívalo vpravo. Řešení je uvedeno na obr. 136.

Přesunutím tří zápalek zajistěte, aby ryba na obr. 105 plavala na druhou stranu. Řešení je uvedeno na obr. 137.

Přesunutím dvou zápalek zajistěte, aby lopatka na obr. 106 byla prázdná. Řešení je uvedeno na obr. 138.



obr. 104



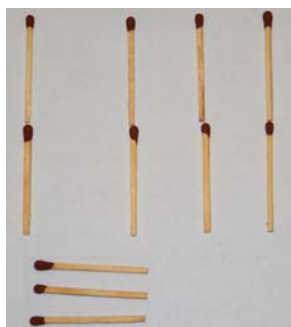
obr. 105



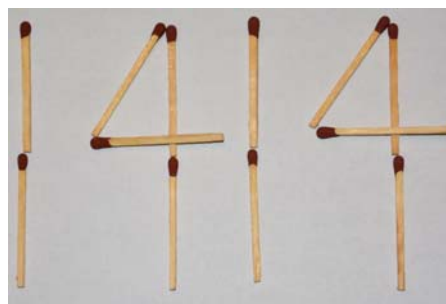
obr. 106

Přidáním tří zápalek vytvořte na obr. 107 řeku plnou krokodýlů. Řešení je uvedeno na obr. 139.

Přesunutím dvou zápalek změňte na obr. 108 letopočet 1414 na letopočet 2000. Řešení je uvedeno na obr. 140.



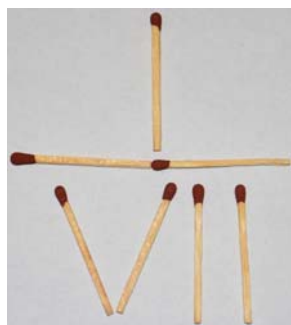
obr. 107



obr. 108

Přesunutím jedné zápalky změňte zlomek na obr. 109 na zlomek $\frac{1}{3}$. Řešení je uvedeno na obr. 141.

Přesunutím jedné zápalky vytvořte na obr. 110 až obr. 116 platnou matematickou rovnost. Řešení jsou uvedena na obr. 142 až obr. 154. (Hlavočím zobrazený na obr. 110 má dvě řešení, hlavočím zobrazený na obr. 112 má čtyři řešení, hlavočím zobrazený na obr. 113 má dvě řešení a hlavočím zobrazený na obr. 116 má také dvě řešení.)



obr. 109



obr. 110



obr. 111



obr. 112



obr. 113



obr. 114



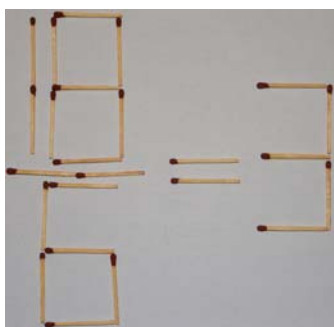
obr. 115



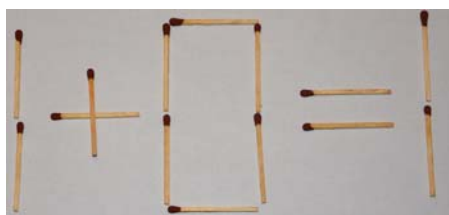
obr. 116

Řešení

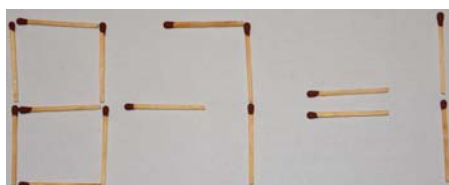
Na obr. 117 až obr. 154 jsou uvedena řešení hlavolamů ze sirek. Kromě uvedených řešení mohou existovat ještě další, která zde uvedená nejsou.



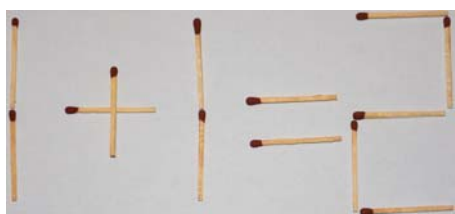
obr. 117



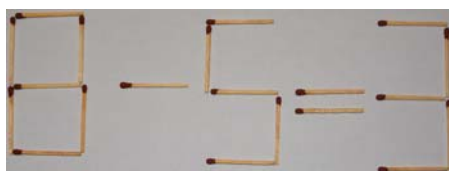
obr. 118



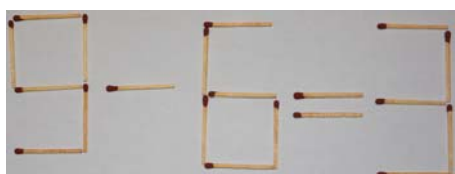
obr. 119



obr. 120



obr. 121



obr. 122



obr. 123



obr. 124



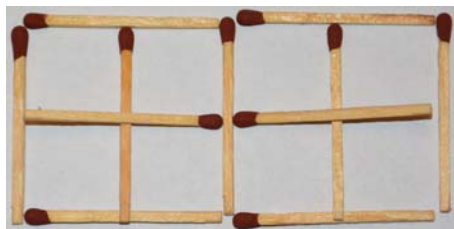
obr. 125



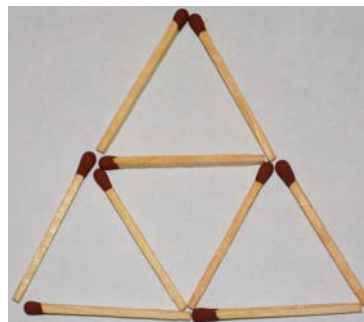
obr. 126



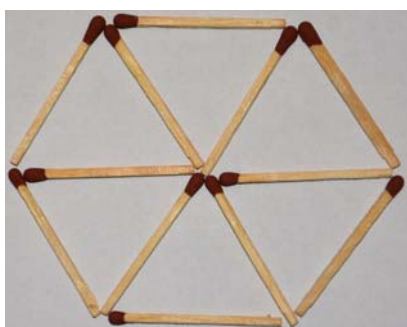
obr. 127



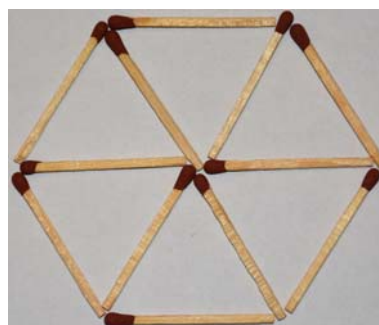
obr. 128



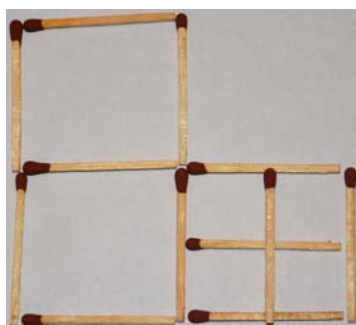
obr. 129



obr. 130



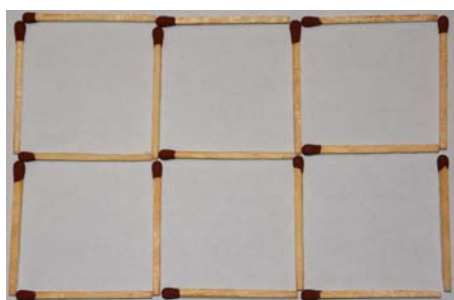
obr. 131



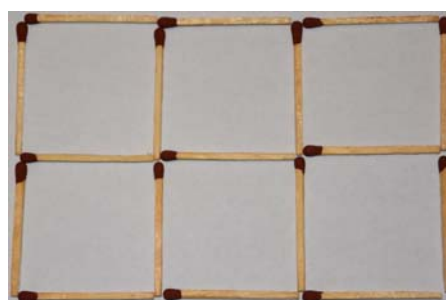
obr. 132



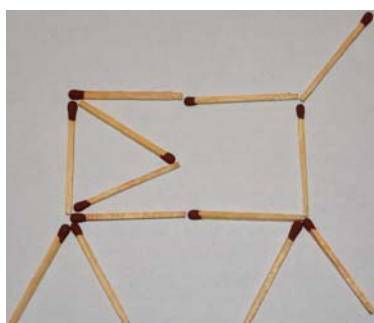
obr. 133



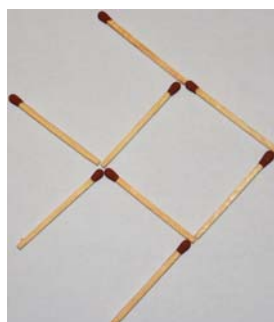
obr. 134



obr. 135



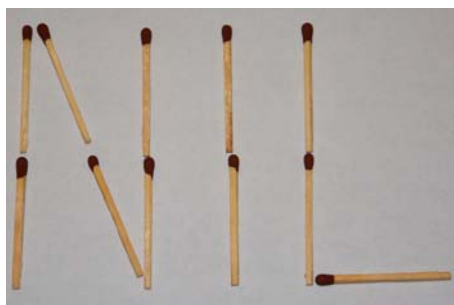
obr. 136



obr. 137



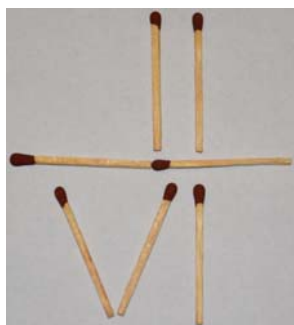
obr. 138



obr. 139



obr. 140



obr. 141



obr. 142



obr. 143



obr. 144



obr. 145



obr. 146



obr. 147



obr. 148



obr. 149



obr. 150



obr. 151



obr. 152



obr. 153



obr. 154

20. Číslo π a e

Matematická témata

čísla π a e a jejich zapamatování

Popis

Ludolfovo číslo π a Eulerovo číslo e jsou důležitá čísla nejen pro matematiku. Velmi často se také vyskytují v aplikovaných vědách (fyzika, elektrotechnika, ...). Proto je nutné znát jejich (přibližné) hodnoty.

A k zapamatování si těchto čísel na více než dvě desetinná místa vymysleli lidé v průběhu historie řadu mnemotechnických pomůcek.

Číslo π

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510 \dots$$

Dějiny

1415 - upálení mistra Jana Husa;

1459 - rok po korunovaci krále Jiřího z Poděbrad;

1492 - objevení Ameriky Kryštofem Kolumbem;

1526 - bitva u Moháče, nástup Habsburků na český trůn;

1592 - narodil se Jan Amos Komenský;

1965 - ve Velké Británii umírá Churchill a v Rumunsku se dostává k moci Ceausescu;

1953 - v Sovětském svazu umírá J. V. Stalin a v Československu Klement Gottwald;

...

314 - stáří Karlovy univerzity v roce 1662 ☺

Literatura

3 1 4 1 5

Lín a kapr u hráze,

9 2 6

prohlédli si rybáře,

5 3 5

udici měl novou,

8 9

jikrnáči neuplavou.

Angličtina

3 1 4 1 5 9 2 6

May I have a large container of coffee?

Číslo e

$e = 2,7182818284590452353602874713527\dots$

Dějiny

1828 - Andrew Jackson byl zvolen prezidentem USA a narodil se ruský dramatik Lev Nikolajevič Tolstoj

Angličtina

2 7 1 8 2 8
He studied a treatise on calculus.

21. Čínské násobení

Matematická témata

geometrie v rovině, násobení čísel

Popis

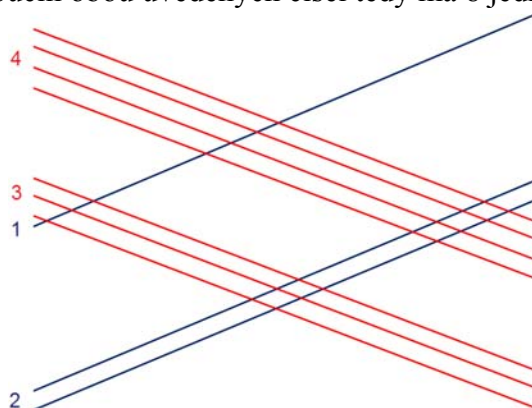
Tzv. čínské násobení vychází z grafické reprezentace čísel pomocí na papír vhodně zakreslených čar. Místo násobení pak stačí jen sečíst průsečíky nakreslených čar.

Při tomto násobení dvou čísel je nutné dodržet tato pravidla:

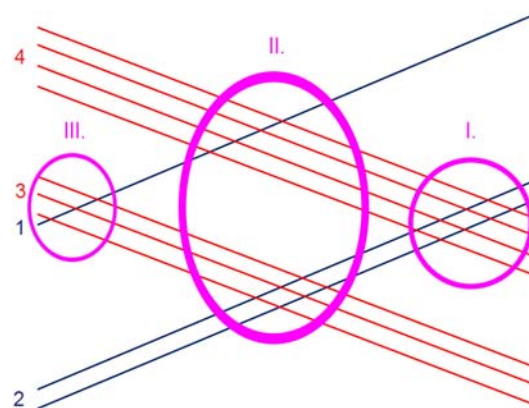
1. u obou násobených čísel určíme počet jednotek, desítek, stovek, ...;
2. každé násobené číslo reprezentujeme tolika skupinami čar, kolik je v čísle cifer;
3. v každé skupině čar je tolik čar, kolik udává daná cifra označující příslušný řád v čísle (jednotky, desítky, stovky, ...);
4. čáry reprezentující první číslo kreslíme zdola zleva nahoru doprava tak, že řád jednotek je nakreslen nejnižše a nad ním jsou desítky, stovky, ...;
5. čáry reprezentující druhé číslo kreslíme shora zleva dolů vpravo tak, že řád jednotek je nakreslen nejvýše a pod ním jsou desítky, stovky, ...

Výše uvedená pravidla a další postup hledání výsledku je uveden na této úloze: Vypočítejte $12 \cdot 34$.

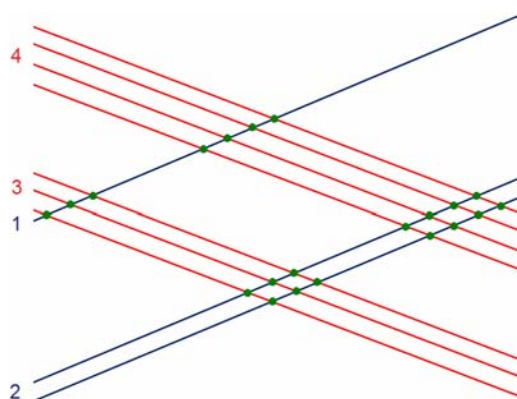
Na obr. 155 je uvedena grafická reprezentace obou násobených čísel přesně dle výše uvedených pravidel. V této grafické reprezentaci je nutné nalézt (v tomto případě) tři oblasti průsečíků zakreslených čar. Tyto oblasti jsou na obr. 156 vyznačeny elipsou s čísly I., II. a III., přičemž číslování je voleno v tomto pořadí záměrně. Počet průsečíků v oblasti I. určuje počet jednotek výsledného součinu (jedná se totiž o průsečíky čar, které reprezentují jednotky v obou násobených číslech). Ve shodě s obr. 156 a obr. 157 je v této oblasti 8 průsečíků; součin obou uvedených čísel tedy má 8 jednotek.



obr. 155



obr. 156



obr. 157

V oblasti II. je celkem 10 průsečíků. Vzhledem k tomu, že se jedná o průsečíky čar, které reprezentují desítky a jednotky v násobených číslech, udává počet průsečíků počet desítek ve výsledném součinu. V tomto případě tedy má součin 0 desítek a jedničku (z desítky

určující počet průsečíků) přenášíme do vyššího řádu (podobně jako při písemném sčítání pod sebou).

V oblasti III., ve které leží průsečíky čar reprezentující desítky násobených čísel, jsou pak 3 průsečíky. Spolu s jedničkou přenesenou z minulého řádu tak bude mít součin $3 + 1 = 4$ stovky. Součin čísel 12 a 34 je tedy roven 408.

Analogicky se postupuje při násobení víceciferných čísel - obrázek bude obsahovat více čar a více oblastí (tj. výsledný součin bude mít více cifer).

22. Jak získat výsledek 6?

Matematická témata

matematické operace s čísly

Zadání

Vyjádřete číslo 6 pomocí tří jedniček, tří dvojek, tří trojek, ..., tří devítek a vhodných matematických operací a symbolů.

Řešení

Řešení zadaného problému je:

$$6 = (1+1+1)!$$

$$6 = 2+2+2$$

$$6 = 3 \cdot 3 - 3$$

$$6 = \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4}$$

$$6 = 5 + \frac{5}{5}$$

$$6 = 6+6-6$$

$$6 = 7 - \frac{7}{7}$$

$$6 = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8}$$

$$6 = \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} - \sqrt{9}$$