



Střední průmyslová škola sdělovací techniky
Panská 3
Praha 1

© Jaroslav Reichl, 2015



Papírová fyzika a matematika

náměty na fyzikální experimenty a matematické hry

Obsah

1. ÚVOD	3
2. PLATONSKÁ TĚLESA	4
3. SKLÁDÁNÍ KRYCHLE	8
4. SKLÁDÁNÍ MODELU KRYCHLE BEZ LEPENÍ	12
5. SKLÁDÁNÍ MODELU ČTYŘSTĚNU BEZ LEPENÍ	14
6. SKLÁDÁNÍ MODELU PRAVIDELNÉHO ČTYŘBOKÉHO JEHLANU BEZ LEPENÍ	16
7. SKLÁDÁNÍ MODELU PRAVIDELNÉHO KOMOLÉHO ČTYŘBOKÉHO JEHLANU BEZ LEPENÍ	18
8. SKLÁDÁNÍ MODELU KOSÚHLÉHO ČTYŘBOKÉHO JEHLANU BEZ LEPENÍ	20
9. SKLÁDÁNÍ MODELU PRAVIDELNÉHO OSMISTĚNU BEZ LEPENÍ	22
10. SKLÁDÁNÍ MODELU KRYCHLE BEZ LEPENÍ II.	24
11. MÖBIOVA PÁSKA	25
12. NAPIER BONES	28
13. VÁLCE Z PAPÍRU FORMÁTU A4	33
14. DŮKAZ POMĚRU STRAN PAPÍRU FORMÁTU A4	35
15. HODNOTY GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ V PRAVOÚHLÉM TROJÚHELNÍKU	36
16. ZÁHADA KEČUPU	39
17. HRAČKA LEZOUCÍ PO PROVAZE VZHŮRU	41
18. MODEL KLENBY	43
19. PAPIROVÉ VÁHY	44
20. POSLUŠNÁ ROLIČKA	46
21. POSLUŠNÁ KRYHLIČKA	48
22. VÁLEC VALÍCÍ SE DO KOPCE	50
23. POSLUŠNÝ DVOJKUŽEL	53
24. PEVNOST PAPÍRU	55
25. KYTIČKA NA VODĚ	57
26. FULLERENY	59
27. ZDROJE A LITERATURA	69

1. Úvod

Důležitou součástí výuky fyziky a matematiky by měly být takové výukové pomůcky, které jsou pro žáky snadno pochopitelné a které nevyžadují dlouhá vysvětlování, jak fungují, jaký je základní princip činnosti, proč má pomůcka dané limity použití, ... Pokud si tedy pomůcku vyrobí žáci sami, výše uvedené problémy odpadají. Pokud je navíc pomůcka opravdu snadno vyrobitelná a je vyrobena z běžně dostupných materiálů, je to o to cennější. Může pak být vyrobena opakovaně (při zničení předchozí, při její ztrátě, jedna ve škole a druhá doma, ...).

Níže v textu jsou popsány návody na výrobu modelů, výukových pomůcek do matematiky a na provedení fyzikálních experimentů. K většině popisovaných aktivit nebo experimentů je zapotřebí kancelářský papír formátu A4. Další pomůcky jsou většinou velmi jednoduché a v domácnosti nebo ve školách běžně dostupné. Navíc tyto doplňkové pomůcky lze většinou nahradit jinými dle aktuálního stavu dostupných předmětů. Výhodou popisovaných pomůcek je skutečnost, že je možné je vyrobit nejen s minimálními finančními náklady, ale také v relativně krátkém čase. Výjimkou jsou ty pomůcky, u kterých musí zaschnout lepidlo před další manipulací s vyráběnou pomůckou.

2. Platónská tělesa

Jako Platónská tělesa jsou označovány pravidelné konvexní mnohostěny (polyedry) v prostoru. Z každého vrcholu Platónského tělesa vychází stejný počet hran a stěny těchto těles jsou tvořeny shodnými pravidelnými mnohoúhelníky. Mezi Platónská tělesa, jejichž sítě jsou zobrazeny na obr. 1 až obr. 5, patří tělesa uvedená v tab. 1, v níž značí:

s - počet stěn tělesa;

h - počet hran tělesa;

v - počet vrcholů tělesa;

S - povrch tělesa o hraně délky a ;

V - objem tělesa o hraně délky a .

Název	s	h	v	S	V
pravidelný čtyřstěn (tetraedr)	4	6	4	$\sqrt{3} \cdot a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$
krychle (pravidelný šestistěn, hexaedr)	6	12	8	$6 \cdot a^2$	a^3
pravidelný osmistěn (oktaedr)	8	12	6	$2\sqrt{3} \cdot a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$
pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr)	12	30	20	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \cdot a^2$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4} a^3$
pravidelný dvacetistěn (íkosaedr)	20	30	12	$5\sqrt{3} \cdot a^2$	$\frac{5(3+\sqrt{5})}{12} a^3$

tab. 1

Platónská tělesa jsou známa již od starověku a nazývají se podle řeckého filosofa Platóna (427 - 347 př. n. l.), který je považoval za symboly čtyř živlů a jsoucna. Popis těchto těles pak sepsal Eukleides (325 - 265 př. n. l.) ve své knize *Základy*. Německý matematik a astronom Johannes Kepler (1571 - 1630) se pokusil mezi v té době známých šest planet Sluneční soustavy vepsat právě tato tělesa ve snaze dát trajektoriím planet jistý geometrický řád.

V 18. století pak formuloval švýcarský matematik Leonhard Euler (1707 - 1783) vztah, který platí pro počet stěn, hran a vrcholů konvexního mnohostěnu:

$$s + v - h = 2. \quad (1)$$

Tento vztah formulovaný původně jako empirický byl později matematicky dokázán.

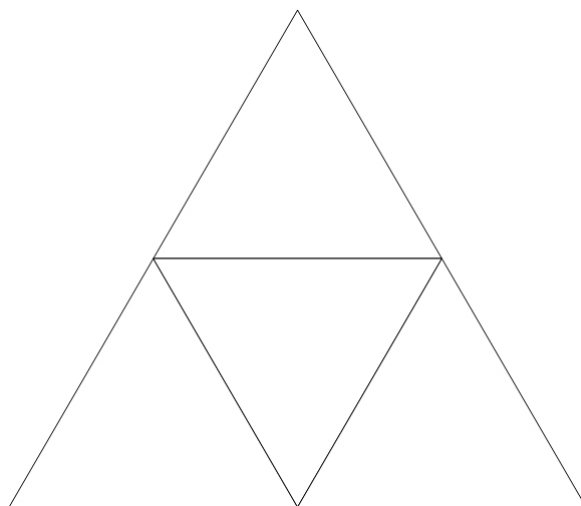
Platónská tělesa se vyskytují i v přírodních vědách - zejména v krystalografii (řada krystalů s vysokým stupněm symetrie krystalové mřížky nabývá forem Platónských těles - kuchyňská sůl má krystalovou mřížku ve tvaru krychle, ...) nebo chemii (molekula methanu má tvar pravidelného čtyřstěnu, molekula hexafluoridu sírového má tvar pravidelného osmistěnu, ...).

Modely Platónských těles lze poskládat ze sítí zobrazených na obr. 1 až obr. 5, které je nutné vytisknout na kancelářský papír a následně vystříhnout. Při vystřihování sítí je nutné si uvědomit, že v sítích nejsou zobrazeny přesahy papíru, pomocí kterých se jednotlivé části sítí lepí k sobě kancelářským lepidlem.

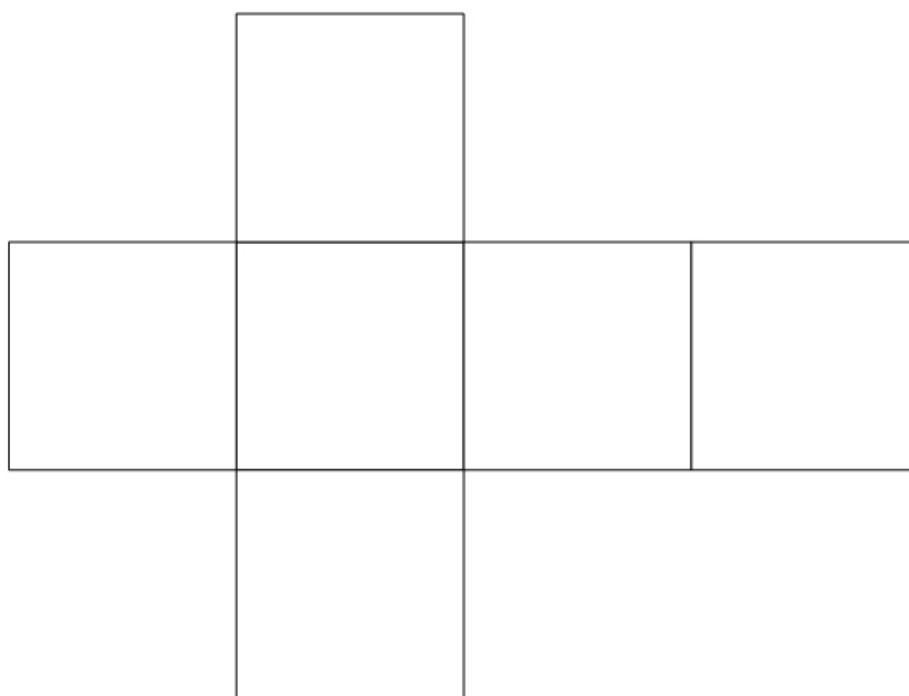
Modely Platónských těles vytvořené z uvedených sítí jsou zobrazeny na obr. 6.

Model pravidelného dvanáctistěnu je možné sestavit z papíru i jinak. Z proužku papíru (vhodná je např. šířka odpovídající osmině šířky papíru formátu A4) vytvoříme „uzel“ (viz obr. 7), který pak pečlivě „utáhneme“ do tvaru zobrazeného na obr. 8. Vytvořený „uzel“ má tvar pravidelného pětiúhelníku. Z dvanácti takto vytvořených pětiúhelníků je možné poskládat

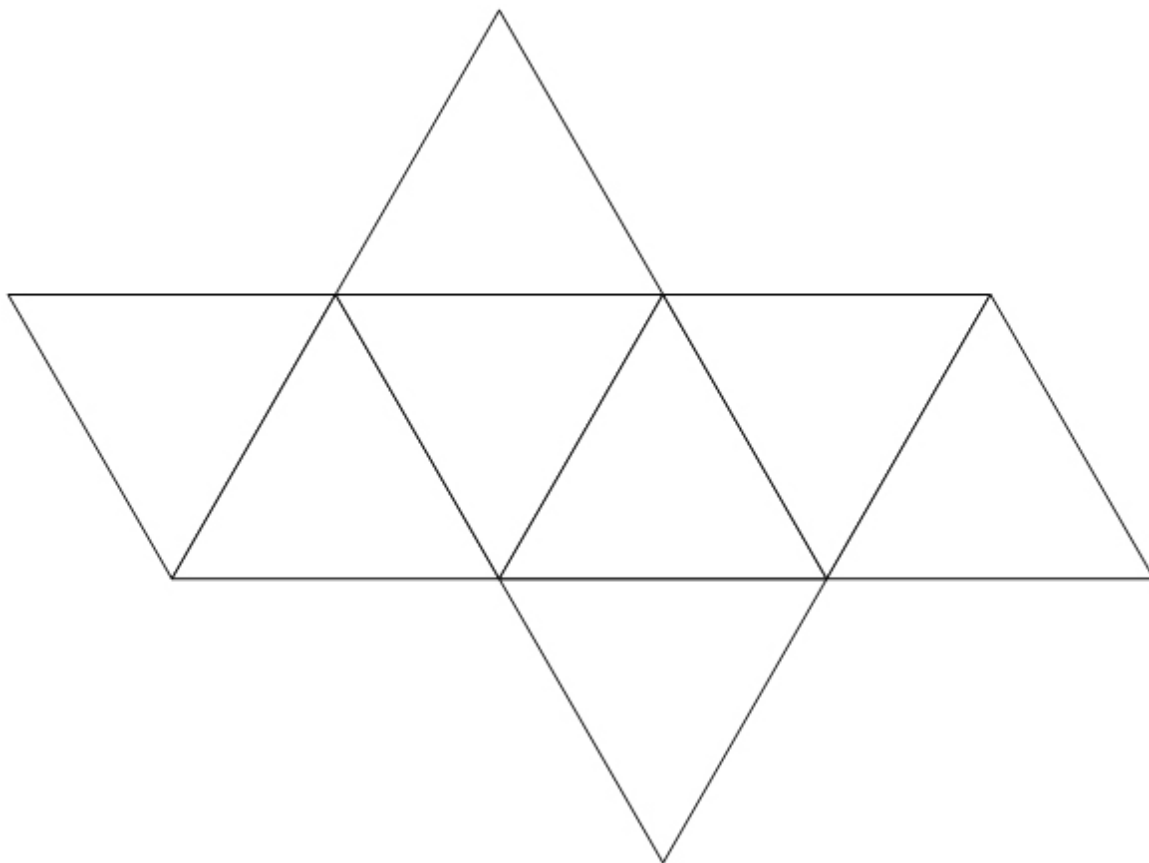
model pravidelného dvanáctistěnu (viz obr. 9). Některé pětiúhelníky budou držet v modelu dvanáctistěnu samostatně, jiné je potřeba zajistit lepidlem.



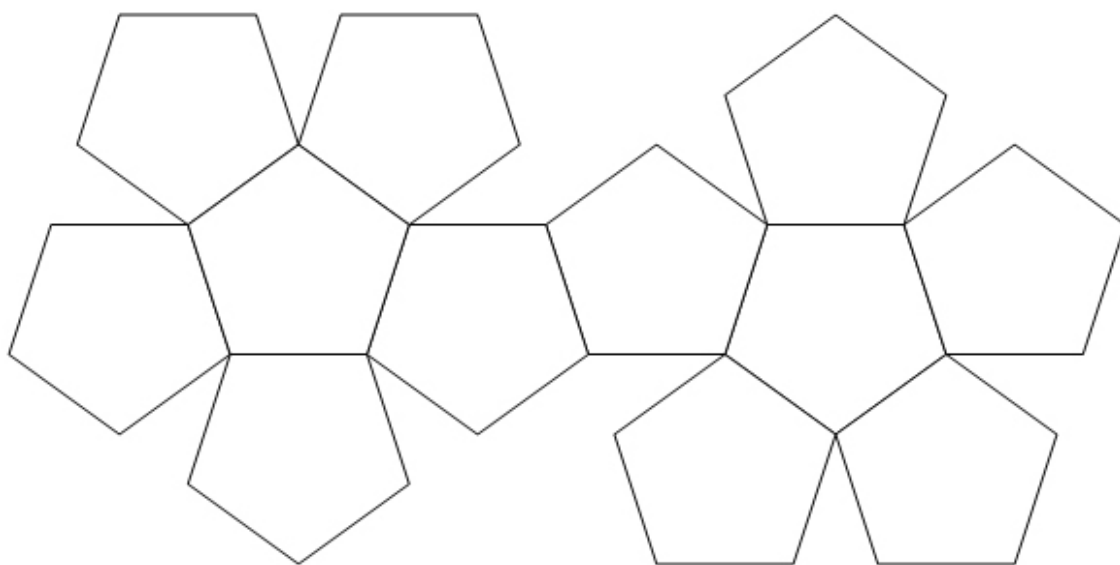
obr. 1



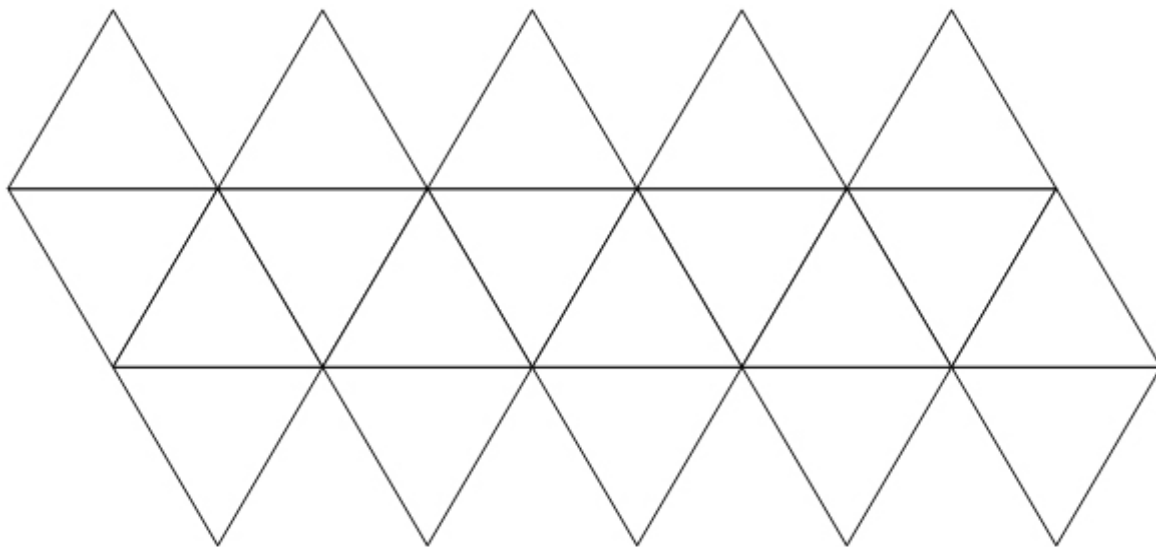
obr. 2



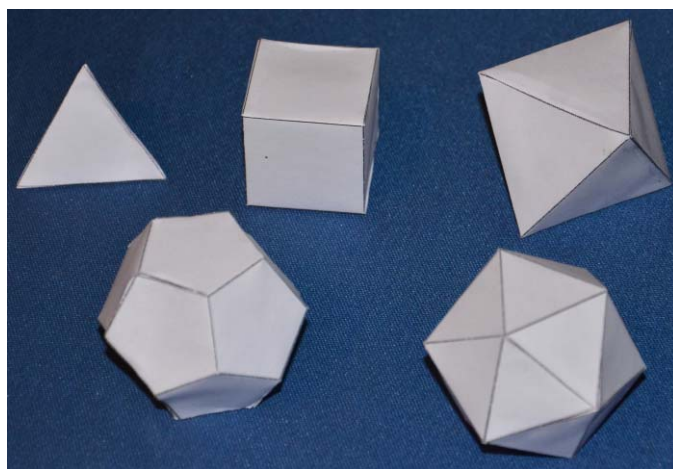
obr. 3



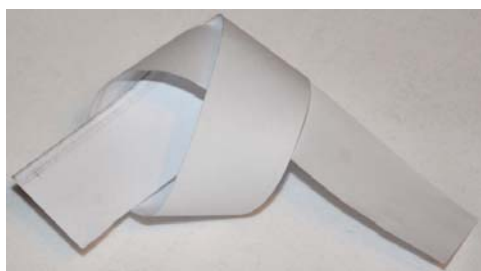
obr. 4



obr. 5



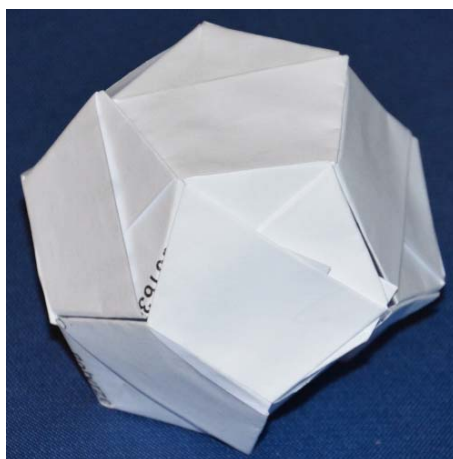
obr. 6



obr. 7



obr. 8



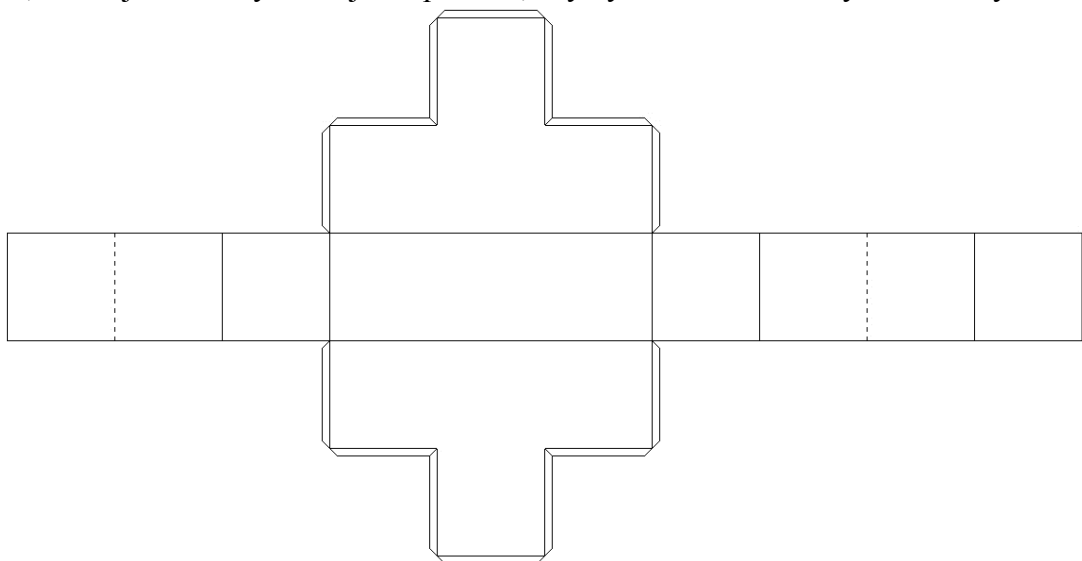
obr. 9

3. Skládání krychle

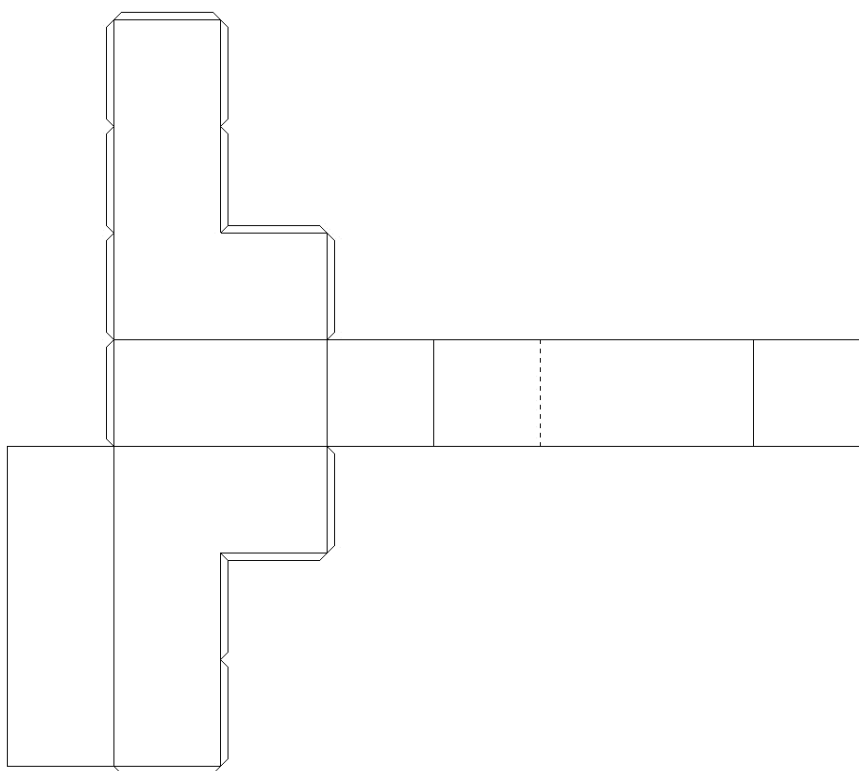
Na obr. 10 až obr. 16 jsou zobrazeny sítě sedmi těles. Vytiskněte tyto sítě na kancelářský papír a vystříhněte je (na obrázcích jsou naznačeny i části papíru nutné pro nanesení lepidla). Podél plných čar přehněte papír tak, aby čára, podle které překládáte, byla na vrcholu překladu. Podél čárkovaných čar přehněte papír tak, aby čára, podle které překládáte, byla uvnitř překladu. Poté pomocí kancelářského lepidla sítě slepte. Modely těles, která slepením vzniknou, jsou zobrazena na obr. 17.

Z těchto sedmi těles nyní složte bez lepení model krychle. Model této krychle je zobrazen na obr. 18, ze kterého lze částečně vydedukovat i správné řešení složení této krychle.

Pozor! Sítě zobrazené na obr. 10 až obr. 16 při tisku nezvětšujte! Pokud sítě chcete zvětšit, zvětšujte všechny ve stejném poměru, aby bylo možné složit výslednou krychli!

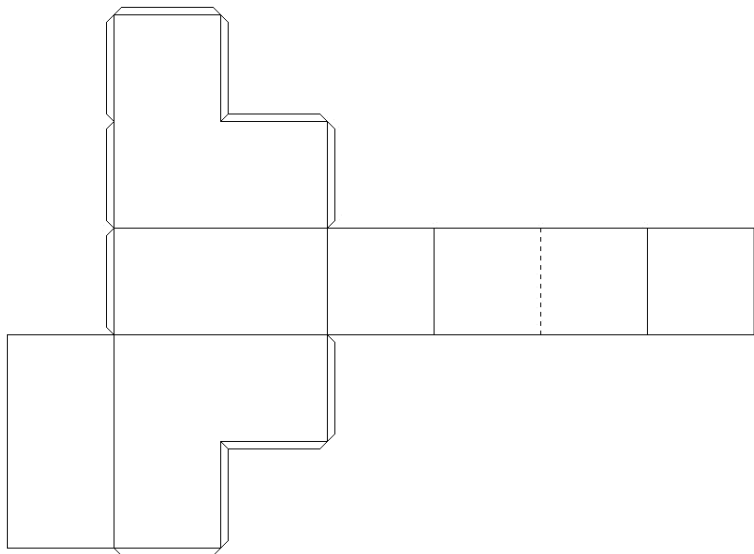


obr. 10

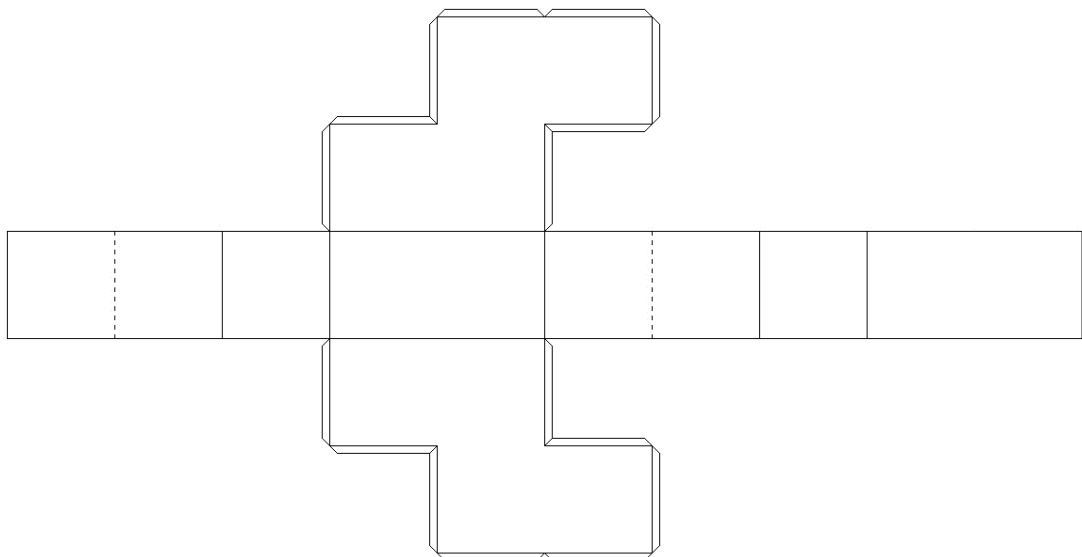


obr. 11

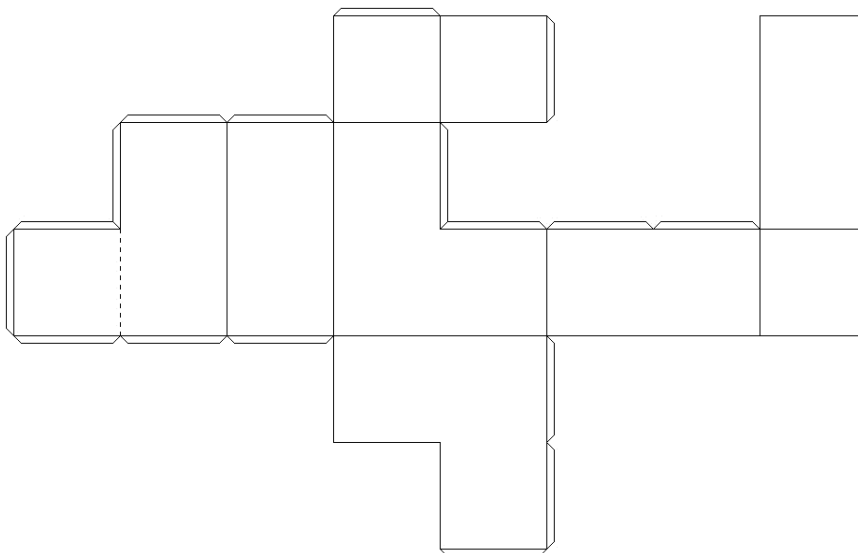
Kromě sítí těles zobrazených na obr. 10 až obr. 16 je možné postupovat také tak, že z kancelářského papíru vytvoříte 27 krychliček, které následně poslepujete do těles zobrazených na obr. 17. (Sít krychle je zobrazena na obr. 2.)



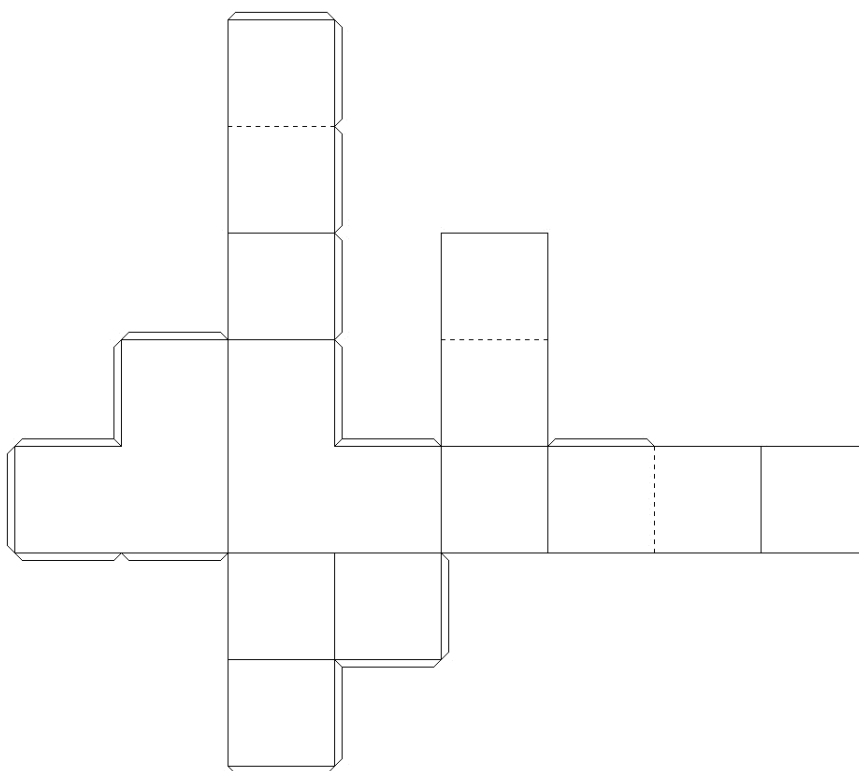
obr. 12



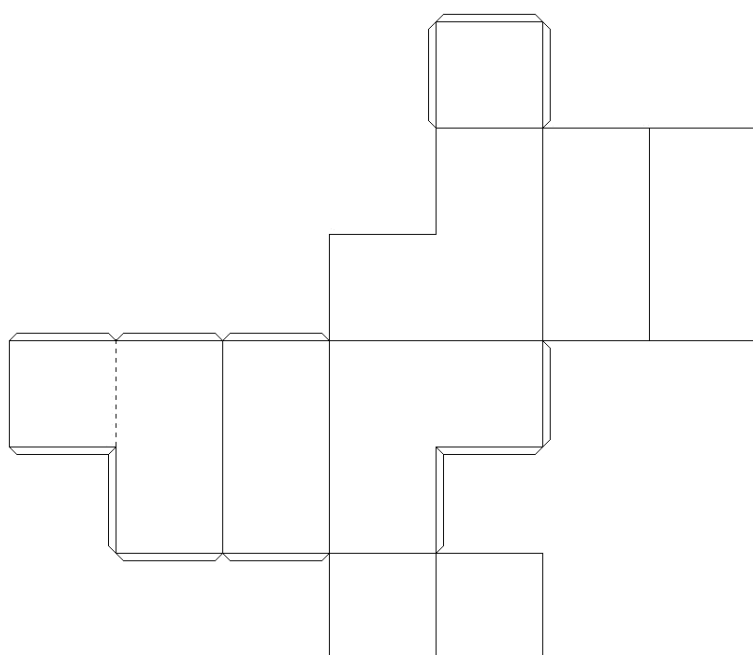
obr. 13



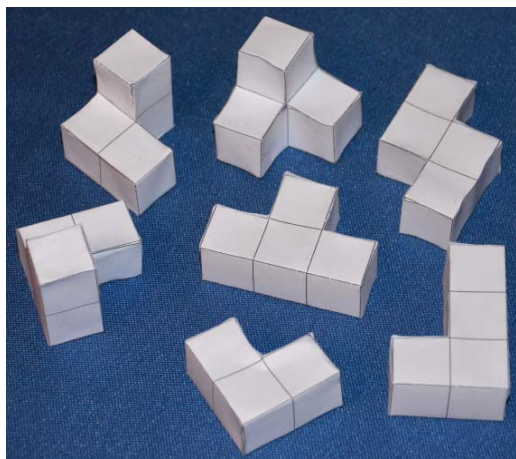
obr. 14



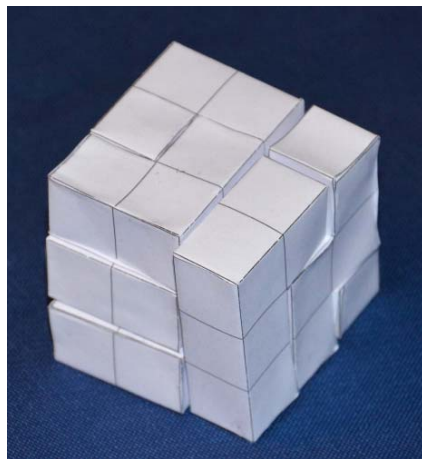
obr. 15



obr. 16



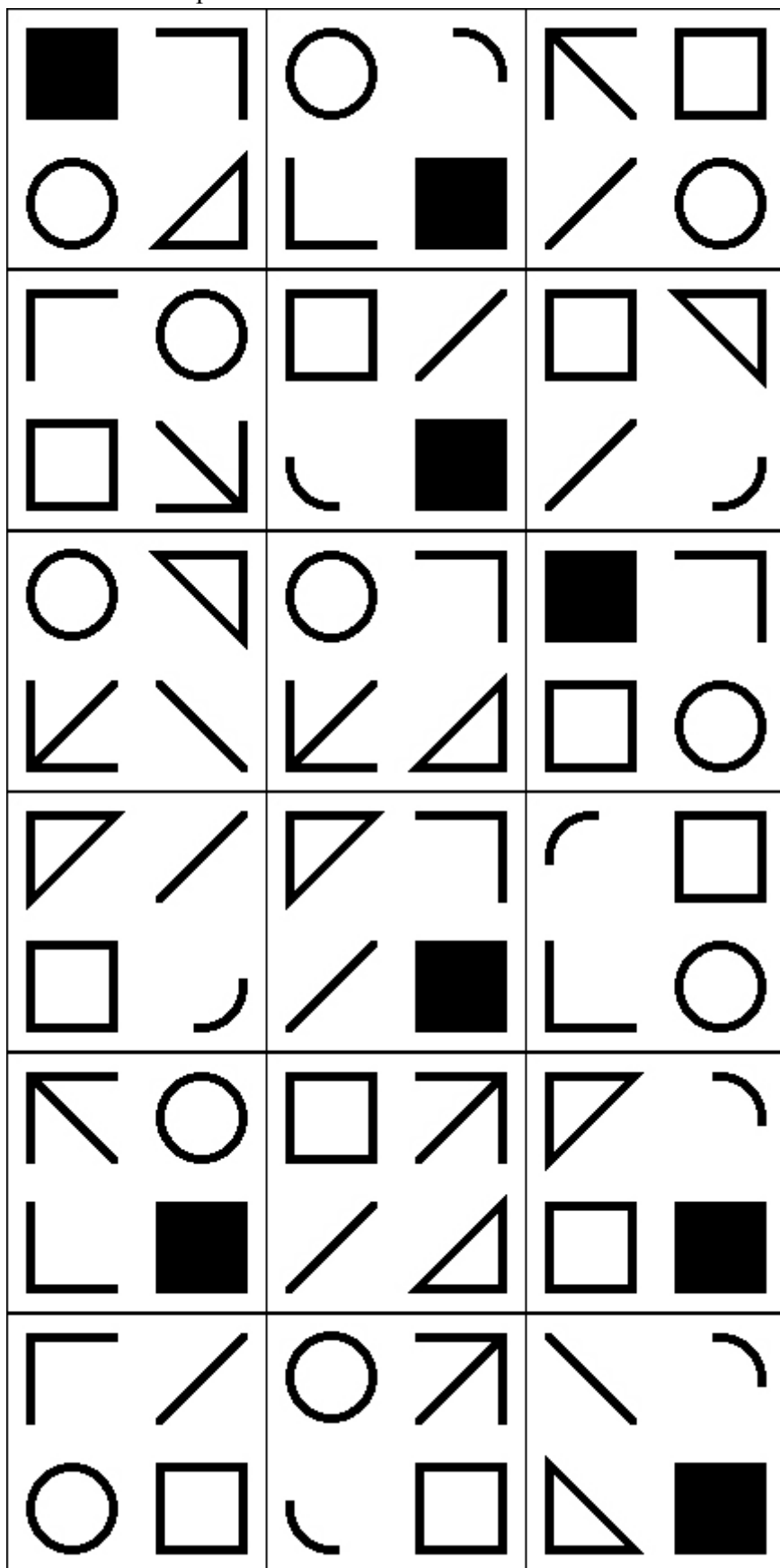
obr. 17



obr. 18

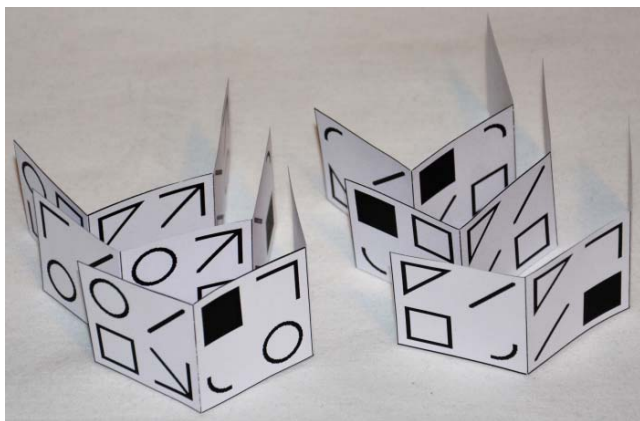
4. Skládání modelu krychle bez lepení

Vytiskněte obrázek zobrazený na obr. 19. Rozstříhněte jej příčně na šest proužků, z nichž každý je tvořen třemi čtverci s různými symboly. Takto získaných šest proužků přehněte podél plných čar (viz obr. 20) a složte model krychle, který bude držet pohromadě ve stabilní poloze bez nutnosti lepení.



obr. 19

Takto vytvořená krychle je zobrazena na obr. 21, ze kterého je též patrné řešení složení proužků k sobě.



obr. 20



obr. 21

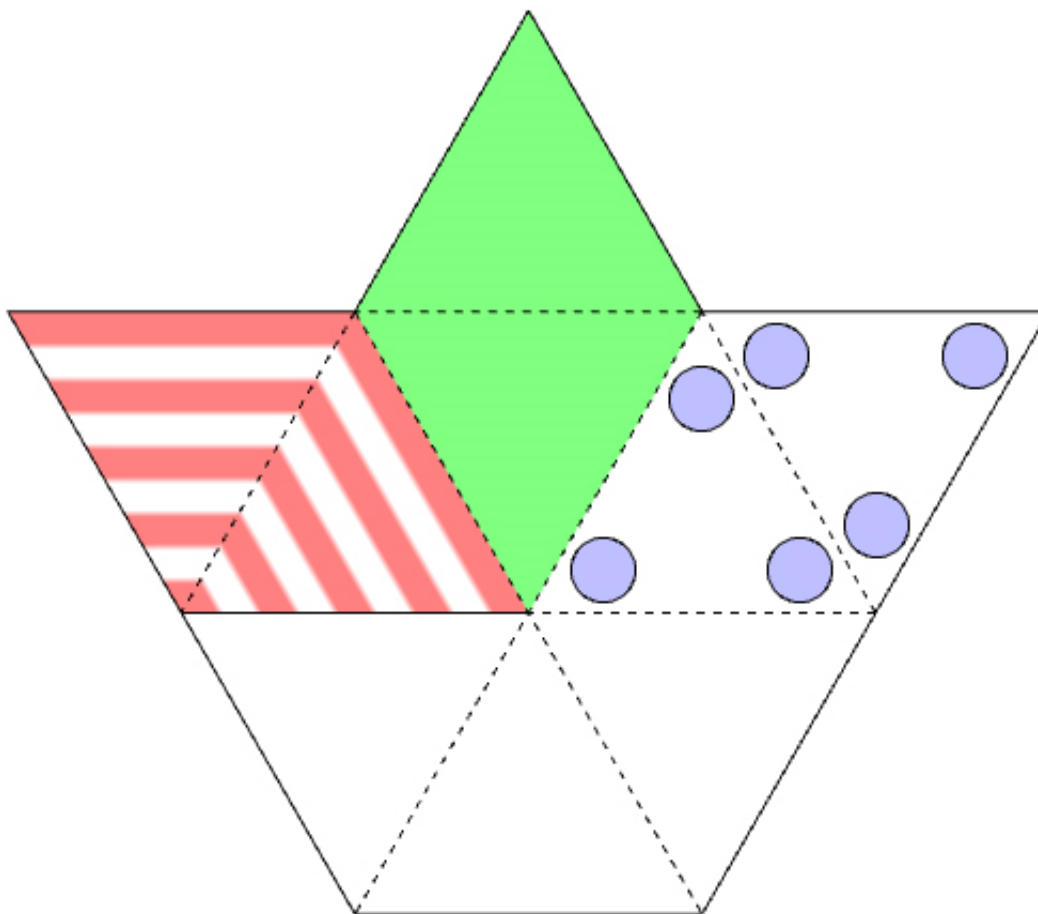
5. Skládání modelu čtyřstěnu bez lepení

Pro řadu úloh z geometrie je vhodné, pokud žáci mají k dispozici model právě studovaného tělesa. Vhodný je přitom takový model, který mohou mít žáci stále u sebe, aby jej mohli v případě potřeby rychle použít. Nosit u sebe hotový trojrozměrný model tělesa slepený z papíru by bylo značně nepraktické (model by se mohl při přepravě poškodit, zabíral by místo, ...). Proto je vhodné mít u sebe síť takového tělesa, ze které těleso rychle poskládáme.

Na obr. 22 je zobrazena síť pravidelného čtyřstěnu. Nejedná se o standardní síť tohoto tělesa, ale o síť, která umožňuje sestavit model pravidelného čtyřstěnu bez nutnosti lepení. Takto sestavený model přitom drží pohromadě ve stabilní poloze a žáci si jej mohou prohlížet z různých úhlů a řešit různé polohové či metrické úlohy spojené s tímto tělesem.

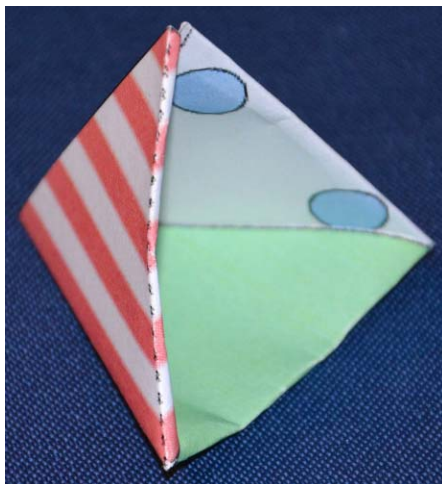
Ze sítě zobrazené na obr. 22 přitom vytvoříme model pravidelného čtyřstěnu, který nebude mít jednu stěnu. To ovšem pro řešení úloh nevadí.

Síť zobrazenou na obr. 22 vytiskněte a podél plných čar vystříhnete. V tomto případě nenechávejte volné přesahy nutné pro nanesení lepidla - model tělesa bude držen pohromadě i bez lepení. Podél čárkovaných čar pak přehněte tak, aby potištěná strana papíru tvořila vnějšek přehybu, a sestavte model tělesa, které je zobrazeno na obr. 23.



obr. 22

Další podobné modely těles jsou popsány v kapitolách 6 až 9.

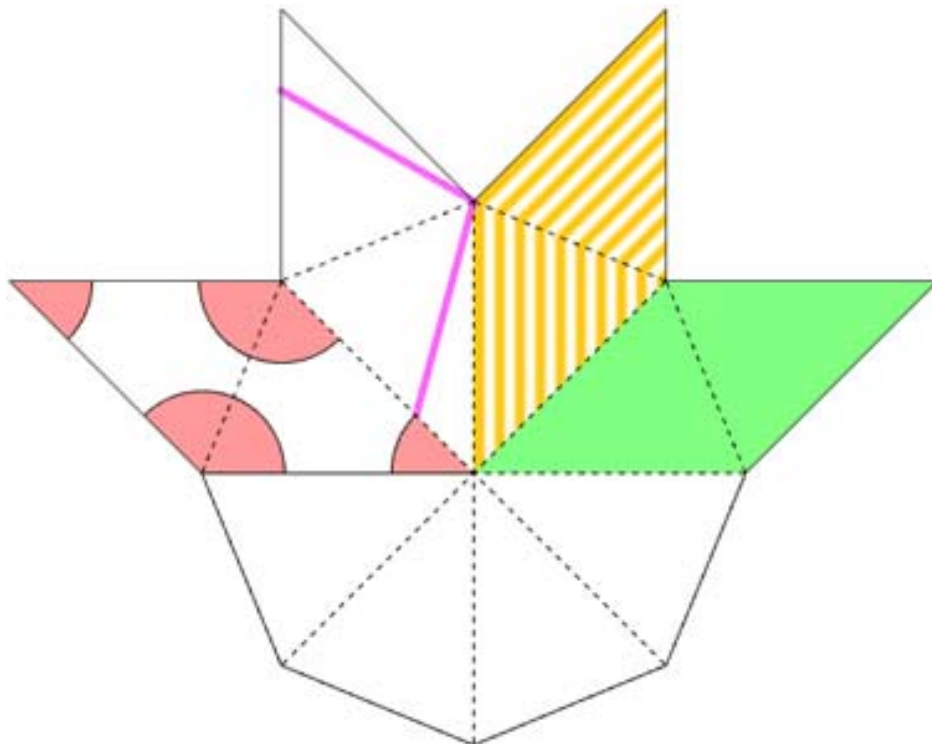


obr. 23

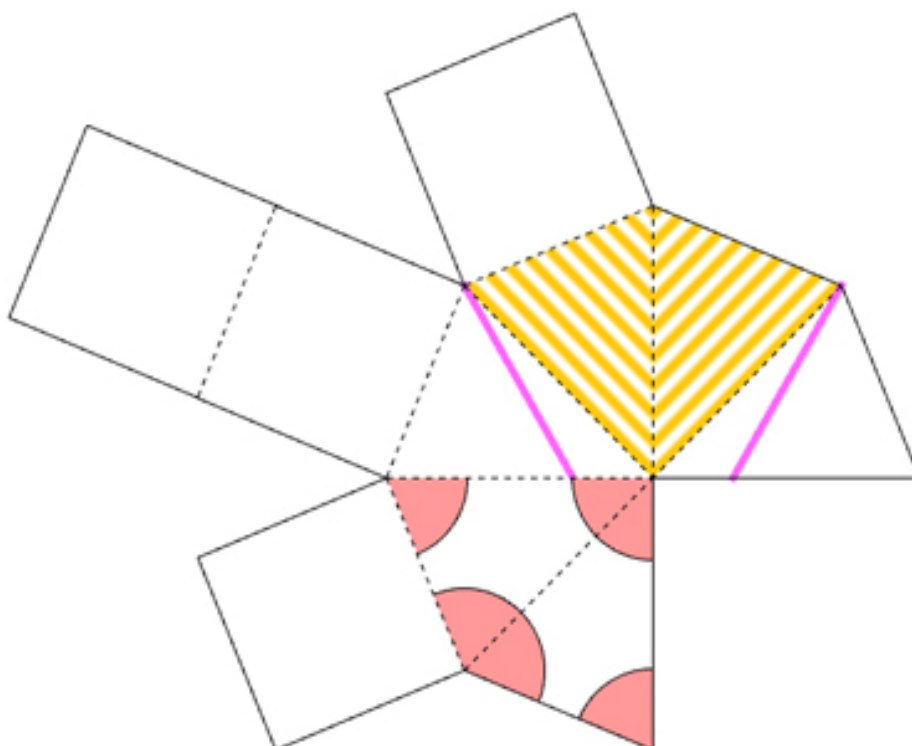
6. Skládání modelu pravidelného čtyřbokého jehlanu bez lepení

Podobně jako v kapitole 5 byl uveden návod na vytvoření modelu pravidelného čtyřstěnu, můžeme poskládat podobným způsobem i pravidelný čtyřboký jehlan. Můžeme přitom využít dvě možnosti složení - síť zobrazené na obr. 24 a obr. 25.

Sítě vytiskneme na kancelářský papír, vystříháme podél plných čar a poskládáme podél přerušovaných čar tak, aby potištěná strana papíru tvořila vnější přehyb. Výjimkou je pouze přehyb mezi krajním trojúhelníkem s čarou a pruhou vybarveným trojúhelníkem na obr. 25 - tento přehyb přeložíme opačně. Ze sítě zobrazené na obr. 24 získáme model pravidelného čtyřbokého jehlanu bez podstavy (viz obr. 26), ze sítě zobrazené na obr. 25 pak získáme model tohoto tělesa bez jedné boční stěny (viz obr. 27).



obr. 24



obr. 25

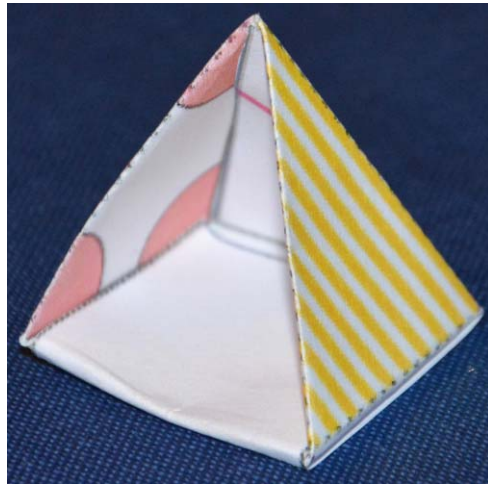
Při tisku sítě nijak nezvětšujte, ale využijte síť dané velikosti. Je to důležité pro sestavení modelu tělesa popsaného v kapitole 7.

Takto vytvořené dva modely téhož tělesa lze nyní do sebe dvěma různými způsoby zasunout (viz obr. 28 a obr. 29), čímž získáme model pravidelného čtyřbokého jehlanu se všemi stěnami i s podstavou.

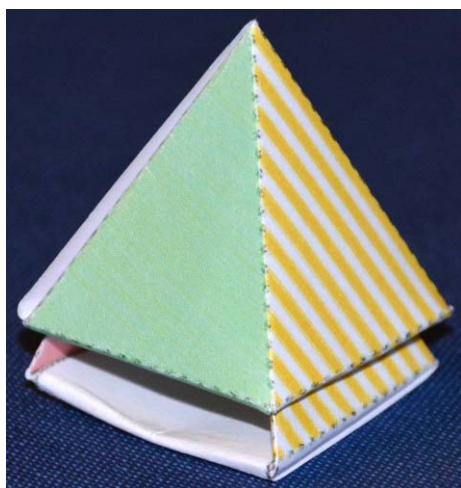
Model pravidelného čtyřbokého jehlanu je též použitelný spolu s modelem pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu (viz kapitola 7).



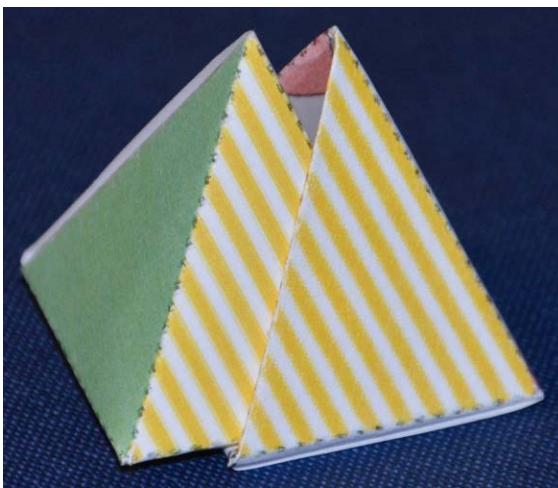
obr. 26



obr. 27



obr. 28



obr. 29

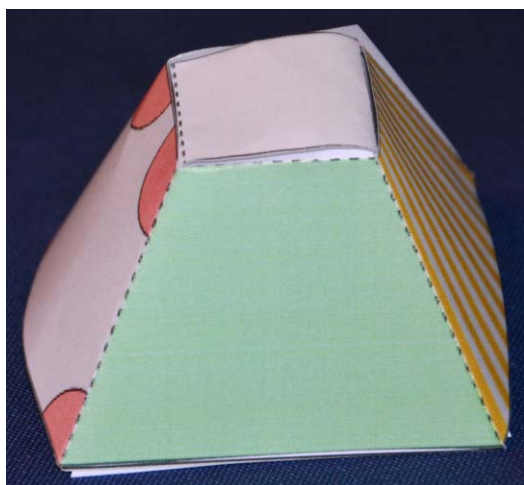
7. Skládání modelu pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu bez lepení

Podobně, jako byly v kapitolách 5 a 6 popsány modely těles, které drží pohromadě bez lepení, můžeme vytvořit model dalšího tělesa. Sít' pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu, z níž je možné poskládat stabilní model tělesa bez lepení, je zobrazena na obr. 32.

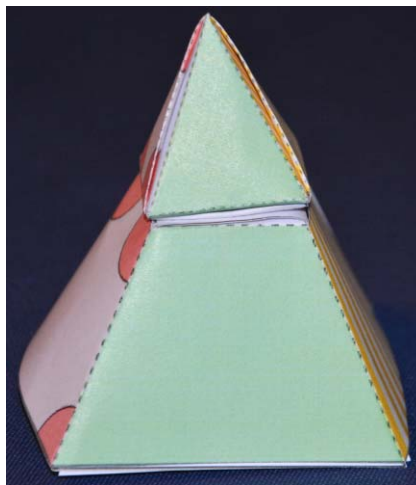
Sít' vytiskneme na kancelářský papír, podél plných čar vystříhneme a podél přerušovaných čar přehneme tak, aby potištěná strana papíru tvořila vnějšek přehybu; pouze dvě přerušované čáry (na obr. 32 označené šipkami) přehneme opačně. Nyní můžeme poskládat model tělesa, který je zobrazený na obr. 30.

Před tiskem sít' tělesa nijak nezvětšujte ani nezmenšujte.

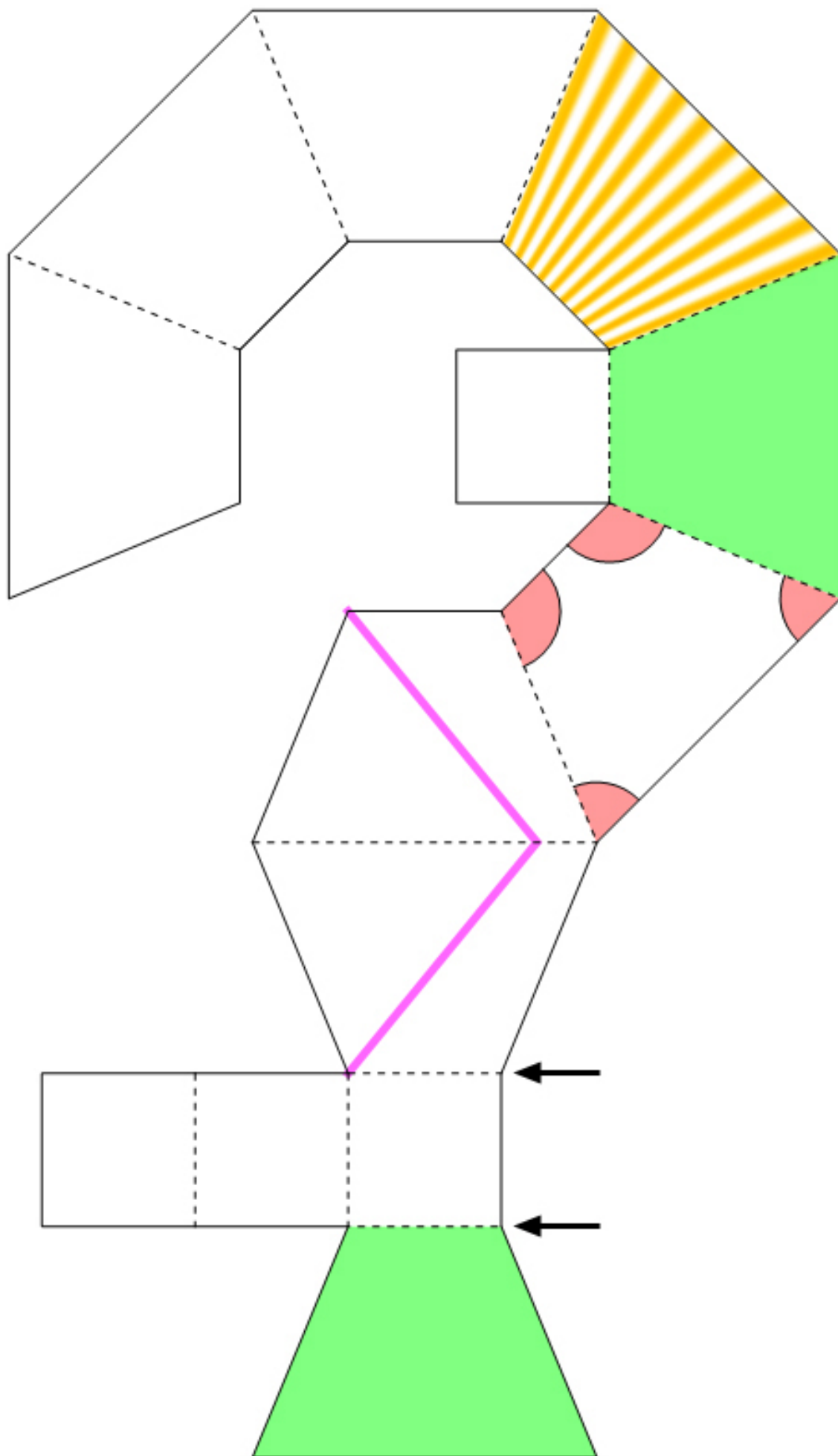
Sít' je totiž navržena tak, aby bylo možné z komolého jehlanu udělat běžný jehlan. K tomu stačí využít modely pravidelného čtyřbokého jehlanu popsané v kapitole 6. Položíme-li zkompletovaný model pravidelného čtyřbokého jehlanu (zobrazený na obr. 28 a obr. 29) na model komolého jehlanu, vytvoříme model jehlanu (viz obr. 31). S využitím tohoto modelu lze s žáky diskutovat různé vlastnosti jehlanu a komolého jehlanu (jak vznikne komolý jehlan, podobnost „velkého“ jehlanu a odříznuté „špičky“, vztahy pro objem jehlanu a komolého jehlanu, ...).



obr. 30



obr. 31

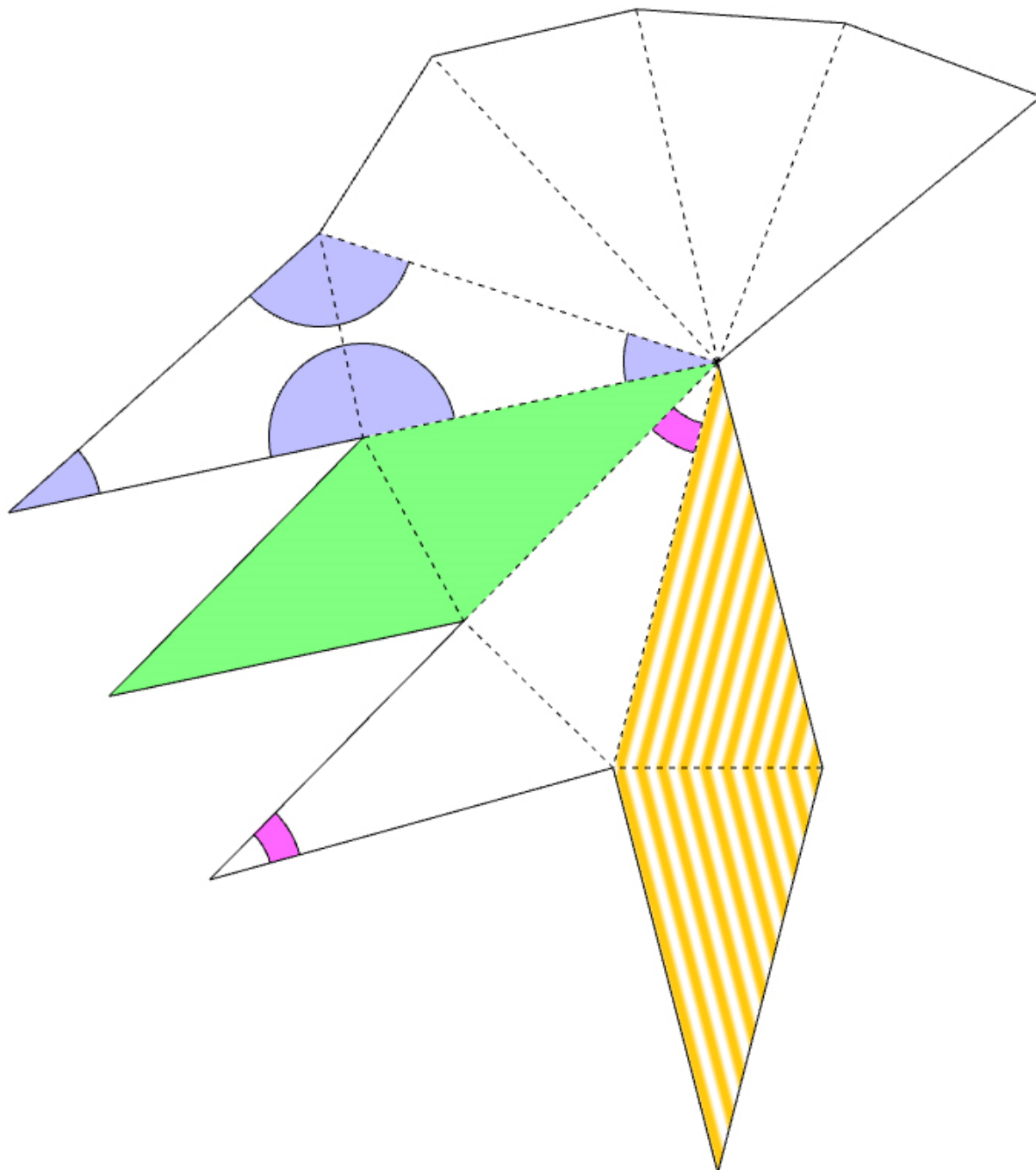


obr. 32
19

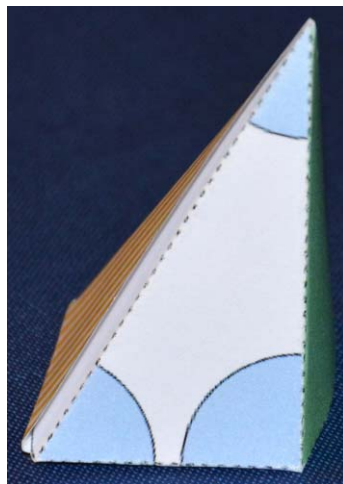
8. Skládání modelu kosúhlého čtyřbokého jehlanu bez lepení

Model kosúhlého čtyřbokého jehlanu vytvořeného bez lepení je založen na podobném principu jako tělesa popsaná v kapitolách 5 až 7.

Síť, ze které lze tímto způsobem těleso poskládat, je zobrazena na obr. 33. Tuto síť vytiskneme, podél plných čar vystříhneme a podél přerušovaných čar přehneme tak, aby přerušovaná čára tvořila vrchol přehybu. Model tělesa složeného z této sítě je zobrazen na obr. 34.



obr. 33



obr. 34

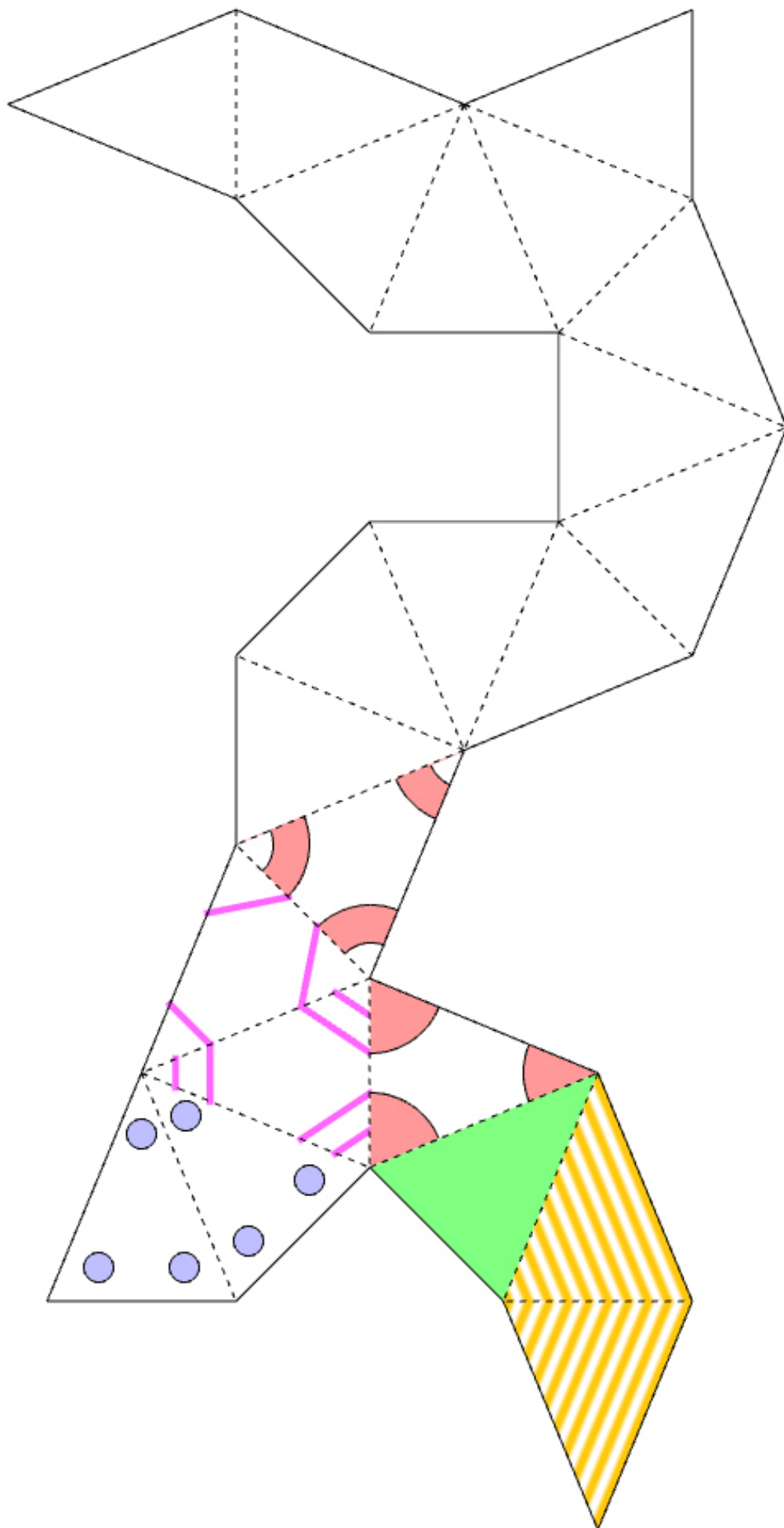
9. Skládání modelu pravidelného osmistěnu bez lepení

Podobně jako bylo popsáno v kapitolách 5 až 8, lze též složit podobným způsobem model pravidelného osmistěnu. Aniž bychom model slepovali k sobě, bude držet ve složeném stavu.

Sít, ze které tento model můžeme sestavit, je zobrazena na obr. 36. Tuto síť vytiskneme, vystříhneme podél plných čar a podél přerušovaných čar přehneme tak, aby přerušovaná čára tvořila vrchol přehybu. Nyní je možné složit model pravidelného osmistěnu tak, aby držel pohromadě bez lepení. Sestavený model je zobrazen na obr. 35.



obr. 35

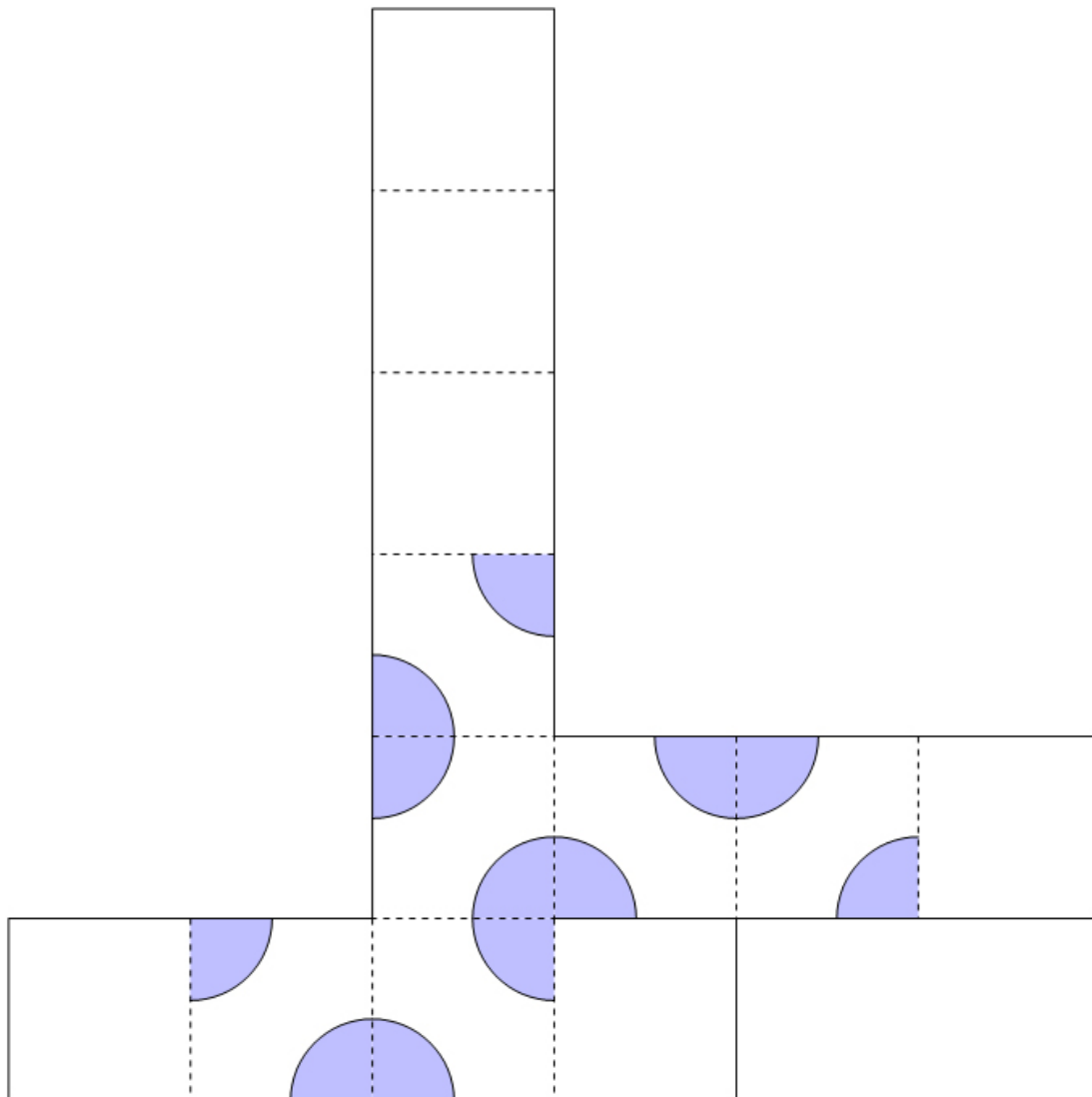


obr. 36

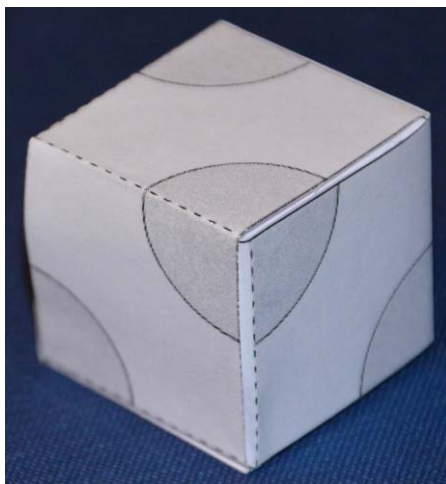
10. Skládání modelu krychle bez lepení II.

Podobně jako bylo popsáno v kapitolách 5 až 9, lze též složit podobným způsobem model krychle. Aniž bychom model slepovali k sobě, bude držet ve složeném stavu.

Síť, ze které model krychle můžeme sestavit, je zobrazena na obr. 37. Tuto síť vytiskneme, vystříhneme podél plných čar a podél přerušovaných čar přehneme tak, aby potištěná strana papíru zůstala navrchu sklada. Nyní je možné složit model krychle tak, aby držel pohromadě bez lepení. Sestavený model je zobrazen na obr. 38.



obr. 37

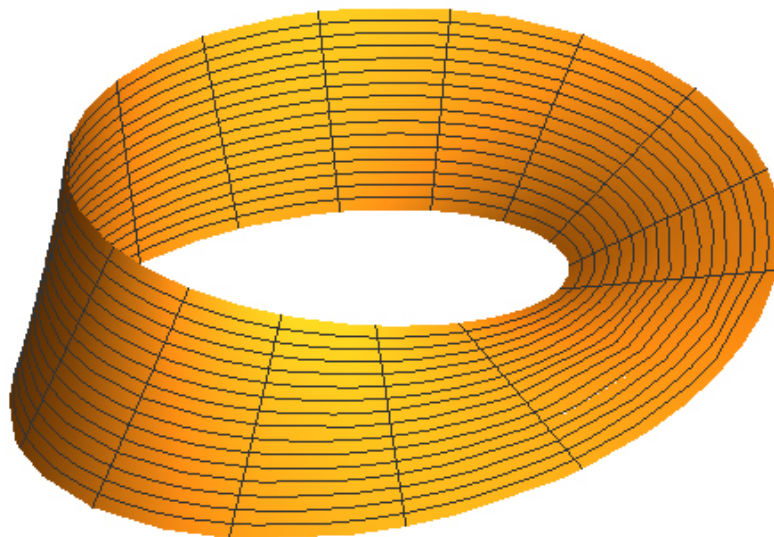


obr. 38

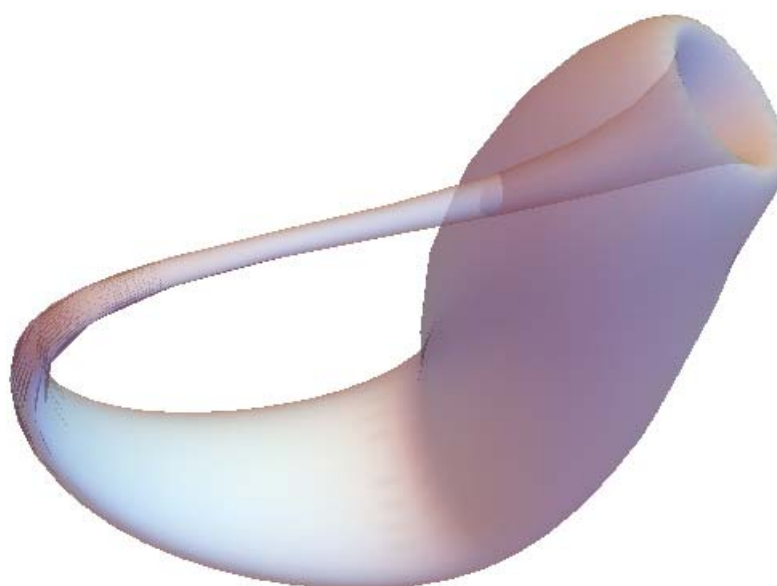
Stejnou síť je možné využít pro fyzikální experimenty s těžištěm těles (viz kapitola 21).

11. Möbiova páska

Möbiova páska (viz obr. 39) je příkladem plochy, která má pouze jednu hranu a jednu stranu. Patří tedy mezi tzv. neorientovatelné plochy. Jejími autory jsou nezávisle na sobě německý matematik a astronom August Ferdinand Möbius (1790 - 1868) a německý matematik Johann Benedict Listing (1808 - 1882); oba pásku objevili v roce 1858. Tato páska pomáhá názorně ukázat deformace dvojrozměrné plochy do trojrozměrného prostoru. Splením této pásky podél její jediné hrany lze získat tzv. Kleinovu láhev (viz obr. 40), reprezentující uzavřenou nádobu, která nemá ani vnějšek ani vnitřek - tedy další typ neorientovatelné plochy. Tuto plochu jako první popsal německý matematik Felix Christian Klein (1849 - 1925) v roce 1882.



obr. 39



obr. 40

Základní vlastnosti Möbiovy pásky lze prozkoumat pomocí jednoduchých experimentů, k nimž budeme potřebovat pouze několik proužků papíru, nůžky a lepidlo (případně izolepu). Optimální velikost proužku papíru je čtvrtina papíru formátu A4 rozděleného podélně.

Než se dostaneme k experimentům s Möbiovou páskou, zkusíme si základní experimenty s papírovým prstencem. Ten získáme tak, že proužek papíru slepíme kratšími konci k sobě (viz obr. 41). Pokud si nyní vybereme jednu stranu prstence a pokusíme se na této straně udělat čáru jdoucí středem šířky prstence, skončíme s čárou v místě, kde jsme začali. Čára přitom bude nakreslená jen na jedné straně prstence (viz obr. 42).

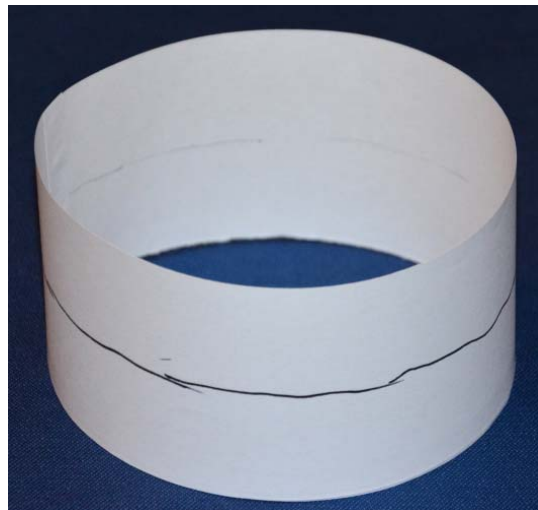
Pokud nyní prstenec podél této čáry rozstříháme, získáme dva podobné prstence, které budou oproti původnímu prstenci užší (viz obr. 43).

Pokud původní prstenec rozstříhneme podél čáry, která rozděluje šířku prstence např. v poměru 2:1, získáme dva prstence různých šířek (v poměru, v jakém dělicí čára dělí šířku původního prstence).

Tyto experimenty se zdají být příliš jednoduché, ale jsou podstatné proto, abychom si uvědomili zajímavé vlastnosti Möbiovy pásy.



obr. 41



obr. 42



obr. 43



obr. 44

Möbiovu pásku vyrobíme tak, že kratší strany proužku papíru před slepením vůči sobě otočíme o 180 stupňů a teprve až potom slepíme (viz obr. 44). Začneme stejným experimentem jako s běžným prstencem: na jedné straně pásy zvolíme bod, ze kterého nakreslíme čáru jdoucí středem pásy. Když se dostaneme s tužkou zpět do bodu, ze kterého jsme začali čáru kreslit, zjistíme, že je čára nakreslená „z obou stran“ (viz obr. 45). To ale není možné vysvětlit jinak, než že páska má pouze jednu stranu; čáru jsme kreslili spojitě a skončili jsme v bodě, ve které jsme kreslit začali. Tím jsme jednoduchým způsobem dokázali, že Möbiova páska je neorientovatelná plocha - tj. není možné určit vnitřní a vnější stranu jako u prstence.



obr. 45



obr. 46

Pokud nyní Möbiovu pásku podél nakreslené čáry rozstříhneme, nezískáme dvě oddělené pásy nebo dva prstence, ale jediný prstenec. Ten bychom mohli vyrobit tak, že

bychom vzali proužek papíru poloviční šířky, než je šířka Möbiovy pásky, a před slepením podél kratších stran bychom jeden jeho konec čtyřikrát otočili o 180 stupňů (viz obr. 46).

Pokud Möbiovu pásku rozstříhneme podél čáry, která dělí její šířku např. v poměru 2:1, získáme dva prstence stejné šířky (poloviční, než je šířka původní Möbiovy pásky) spojené k sobě (viz obr. 47). Menší z nich je opět Möbiovou páskou, delší bychom mohli získat tak, že jeden konec proužku papíru před slepením podél kratších stran otočíme o třikrát o 180 stupňů.



obr. 47

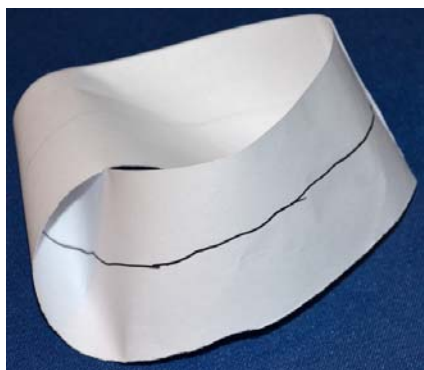


obr. 48

Podobné experimenty je možné provést s páskou, kterou získáme tak, že před slepením kratší strany proužku papíru pootočíme vůči sobě o 360 stupňů, o 540 stupňů, ...

Na obr. 48 je zobrazena páska, kterou získáme přetočením jednoho z konců původního proužku o 360 stupňů. Tato páska má už dvě strany (viz obr. 49, na kterém je zobrazena páska s nakreslenou čarou na jedné své straně) a po rozstřížení podél osy pásky získáme dvě původní pásy s poloviční šířkou (viz obr. 50).

Experimentovat lze provádět také s páskami, které budou v polovině křížem slepeny k sobě.



obr. 49



obr. 50

12. Napier bones

Napier bones (Napierovy kosti nebo Napierovy kostky) je pomůcka, kterou sestrojil a v roce 1617 v díle *Rabdologiae* publikoval skotský matematik, fyzik a astronom John Napier (1550 - 1617); proslavil se také zavedením logaritmu. Napierovy kostky slouží ke zjednodušení výpočtů (zejména násobení) a jsou založeny na objevech arabské matematiky. S využitím tabulky zobrazené na obr. 51 se násobení celých čísel redukuje na sčítání a případné dělení se pak redukuje na odčítání. V tabulce jsou v řádcích a sloupcích zobrazena čísla od 1 do 9 (resp. od 0 do 9) a jejich násobky. Např. ve sloupci, který je označen číslicí 4, jsou shora dolů postupně uvedeny násobky čísla čtyři čísla 1 až 9. Analogicky jsou např. v řádku, který je označen číslicí 6, uvedeny zleva doprava násobky čísla šest čísla 0 až 9.

Tabulku zobrazenou na obr. 51 je nutno vytisknout a vystříhnout. V případě, že budeme chtít tabulku používat častěji, je vhodné ji před další práci zalaminovat. Tabulku pak rozstříháme tak, že oddělíme její jednotlivé sloupce (viz obr. 52). Tím je tabulka připravena pro další použití.

Pokud bychom chtěli pracovat s čísly, v nichž se jednotlivé cifry opakují, je nutné mít k dispozici nastříhané sloupce čísel z více tabulek.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0 0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9
2	0 0	0 2	0 4	0 6	0 8	1 0	1 2	1 4	1 6	1 8
3	0 0	0 3	0 6	0 9	1 2	1 5	1 8	2 1	2 4	2 7
4	0 0	0 4	0 8	1 2	1 6	2 0	2 4	2 8	3 2	3 6
5	0 0	0 5	1 0	1 5	2 0	2 5	3 0	3 5	4 0	4 5
6	0 0	0 6	1 2	1 8	2 4	3 0	3 6	4 2	4 8	5 4
7	0 0	0 7	1 4	2 1	2 8	3 5	4 2	4 9	5 6	6 3
8	0 0	0 8	1 6	2 4	3 2	4 0	4 8	5 6	6 4	7 2
9	0 0	0 9	1 8	2 7	3 6	4 5	5 4	6 3	7 2	8 1

obr. 51

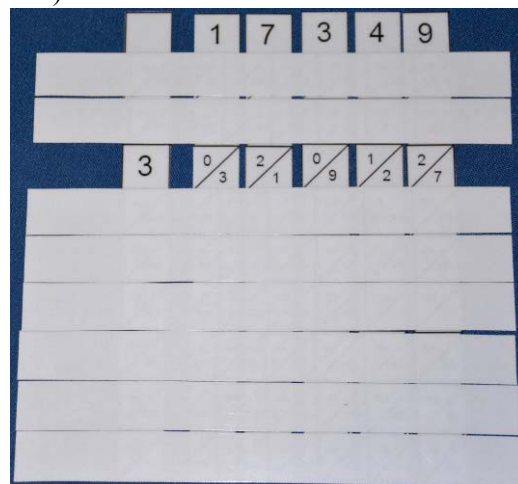
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
2	0/0	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
3	0/0	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
4	0/0	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
5	0/0	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
6	0/0	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
7	0/0	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
8	0/0	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
9	0/0	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

obr. 52

Princip násobení s využití získaných proužků ukážeme na úloze součinu $3 \cdot 17349$. Jednotlivé číslice čísla 17349 budou reprezentovat jednotlivé proužky papíru, které jsme vystříhli. Seřadíme je tedy ve správném pořadí a před první proužek předřadíme proužek, na kterém jsou uvedena pouze čísla od 1 do 9 (viz obr. 53).

	1	7	3	4	9
1	0/1	0/7	0/3	0/4	0/9
2	0/2	1/4	0/6	0/8	1/8
3	0/3	2/1	0/9	1/2	2/7
4	0/4	2/8	1/2	1/6	3/6
5	0/5	3/5	1/5	2/0	4/5
6	0/6	4/2	1/8	2/4	5/4
7	0/7	4/9	2/1	2/8	6/3
8	0/8	5/6	2/4	3/2	7/2
9	0/9	6/3	2/7	3/6	8/1

obr. 53



obr. 54

Papírem zakryjeme všechny řádky, kromě řádku označeného číslicí 3 - to je druhý činitel ze studovaného součinu. (Zakrytí je vhodné zejména pro začínající počtáře, aby nebyli mateni dalšími řádky s čísly.) Násobení pak můžeme sledovat na obr. 55.

Při násobení postupujeme odzadu (tj. zprava doleva). Postupně budeme sčítat čísla, která se objevují v „rovnoběžnících (resp. trojúhelnících) pod čísly“. V případě zadané úlohy při postupu zprava doleva tak postupně dostaneme:

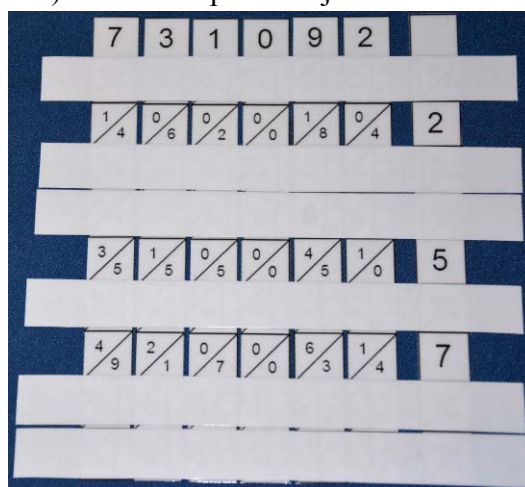
1. číslici 7 - tato číslice stojí samostatně a nebudeme jí tedy se žádnou další sčítat;
2. číslici 4 - je součtem čísel $2 + 2$;
3. číslici 0 - součet čísel $1 + 9$ s tím, že napíšeme nulu a jedničku připočítáme v dalším součtu;
4. číslici 2 - jedná se o součet $0 + 1$, ke kterému připočteme jedničku z minulého součtu;
5. číslici 5 - součet $2 + 3$;
6. číslici 0 - samostatně stojící číslice.

Výsledek součinu je tvořen výše uvedenými číslicemi zapsanými zleva doprava, tj. $3 \cdot 17349 = 52047$ (první nulu nepíšeme).

	1	7	3	4	9
3	0 3	2 1	0 9	1 2	2 7
0	5	1	10	4	7
0	5	1+1	0	4	7
0	5	2	0	4	7

obr. 55

V případě násobení dvou víceciferných čísel můžeme postupovat dvojím způsobem. Oba způsoby ukážeme na součinu $257 \cdot 731092$. Proužky, které reprezentují číslice čísla 731092, seřadíme ve správném pořadí na podložku, vedle těchto proužků umístíme proužek s číslicemi 1 až 9 a zakryjeme ty řádky, jejichž číslice neodpovídají žádné z číslic druhého násobeného čísla (tj. čísla 257). Postavení proužků je zobrazeno na obr. 56.



obr. 56

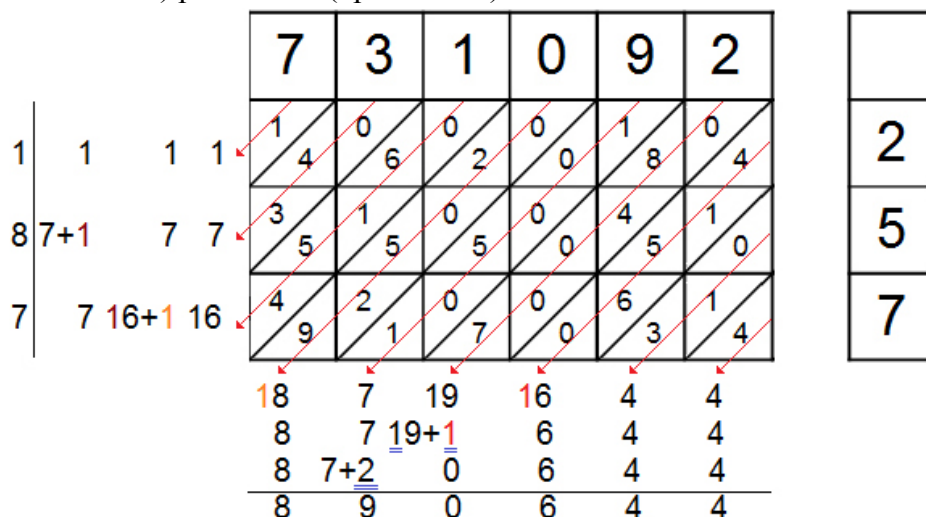
První způsob vyžaduje větší zkušenost, protože je nutné si buď představit nezakryté řádky z obr. 56 u sebe a nebo si tyto řádky překreslit na pomocný papír. Ve zvoleném příkladu jsou navíc číslice čísla 257 ve vzestupném pořadí, což úlohu zjednodušuje. Obecně je tato metoda složitější, ale přesto jí uvedeme. Vše můžeme sledovat na obr. 57.

Při násobení postupujeme odzadu (tj. zprava doleva) stejně jako v případě násobení jednociferným číslem. Postupně budeme sčítat čísla, která se objevují v „čtyřúhelnících (resp. trojúhelnících) pod čísly“. V případě zadané úlohy při postupu zprava doleva tak postupně dostaneme:

1. číslici 4 - tato číslice stojí samostatně a nebudeme jí tedy se žádnou další sčítat;
2. číslici 4 - je součtem čísel $3 + 1 + 0$;
3. číslici 6 - součet čísel $0 + 6 + 5 + 1 + 4$ s tím, že zapíšeme číslici 6 a jedničku přeneseme do dalšího součtu;
4. číslici 0 - součet čísel $7 + 0 + 0 + 4 + 8 + 0$, ke kterému přičteme jedničku z minulého kroku; získáme tak součet 20, ze kterého napíšeme jen nulu a dvojku přeneseme do dalšího součtu;
5. číslici 9 - součet čísel $1 + 0 + 5 + 0 + 0 + 1$, ke kterému přičteme dvojku z minulého součtu;
6. číslici 8 - součet čísel $9 + 2 + 5 + 0 + 2 + 0$, ze kterého napíšeme pouze číslici 8 a jedničku přeneseme do dalšího součtu (do prvního součtu ve sloupci vlevo dole);
7. číslici 7 - součet čísel $4 + 5 + 1 + 6 + 0$, ke kterému přičteme jedničku z minulého součtu; ze součtu 17 tak napíšeme opět jen sedmičku a jedničku přeneseme do dalšího součtu;
8. číslici 8 - součet čísel $3 + 4 + 0$, ke kterému přičteme jedničku z minulého součtu;

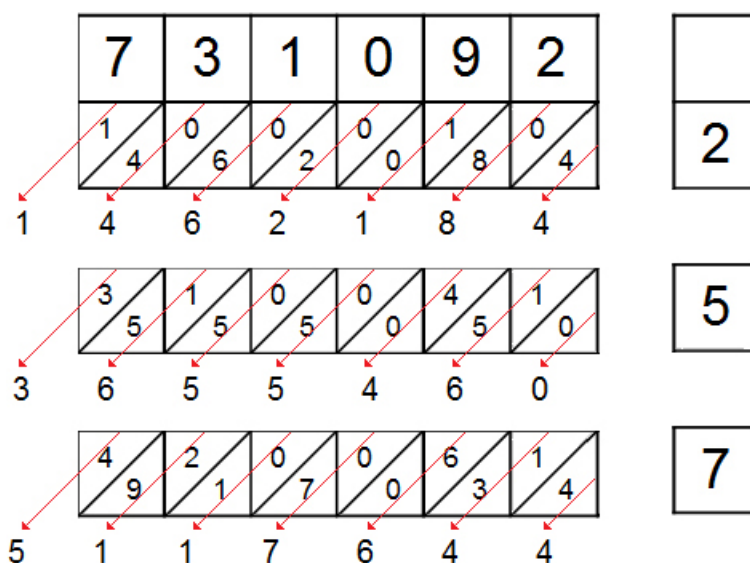
9. číslici 1 - samostatně stojící číslice.

Výsledek počítaného součinu je tvořen tedy devíti číslicemi, které napíšeme v pořadí od číslice 1 (vlevo nahoře) po číslici 4 (vpravo dole). Dostáváme tak: $257 \cdot 731092 = 187890644$.



obr. 57

Druhá metoda výpočtu součinu dvou víceciferných čísel spočívá v postupném násobení. V případě součinu $257 \cdot 731092$ vynásobíme číslo 731092 postupně čísly 2, 5 a 7. Postup je totožný jako u násobení čísla jednociferným číslem, proto je postup v tomto případě pouze schematicky zobrazen na obr. 58.



obr. 58

Součty, které jsme při násobení obdrželi, nyní zapíšeme pod sebe a sečteme. Je ovšem nutné dodržet pozice jednotlivých cifer 2, 5 a 7 v čísle 257. Proto součet 3655460 odsadíme o jedno místo směrem vlevo oproti součtu 5117644 (pětka totiž stojí na místě desítek, zatímco sedmička na místě jednotek). Analogicky odsadíme o jedno místo směrem vlevo součet 1462184 oproti součtu 3655460. Po sečtení tak dostaneme:

$$\begin{array}{r}
 5117644 \\
 3655460 \\
 1462184 \\
 \hline
 187890644
 \end{array}
 \quad (2)$$

výsledek podle vztahu (2) odpovídá výsledku, který jsme získali při řešení první metodou.

S touto pomůckou je možné provádět i dělení a hledat druhé odmocniny čísel. Dělení převedeme na postupné odčítání násobků zadaného čísla a hledání druhé odmocniny

převédeme na násobení a odečítání. Pokud by se nedařilo tento postup vymyslet, je uveden v [2].

13. Válce z papíru formátu A4

Ze dvou listů papíru formátu A4 o rozměrech a a b ($a > b$) vytvoříme pomocí izolepy dvě válcové plochy. Jeden list papíru slepíme delšími stranami k sobě a druhý list slepíme kratšími stranami k sobě. Pokud nyní válcové plochy položíme na vodorovnou podložku, můžeme tvrdit, že jsme vytvořili dva válce. Který z válců (pokud nějaký) má větší objem?

Tuto úlohu lze zadat jako problémovou úlohu žákům v hodinách matematiky (v kapitole stereometrie nebo objemy a povrchy těles), ale i v úvodních hodinách fyziky, ve kterých se žáci seznamují s metodami měření fyzikálních veličin, získávání odhadu, ...

Úlohu lze vyřešit matematicky i fyzikálním experimentem.

Při matematickém řešení si uvědomíme, že objem válce je dán vztahem

$$V = \pi r^2 v, \quad (3)$$

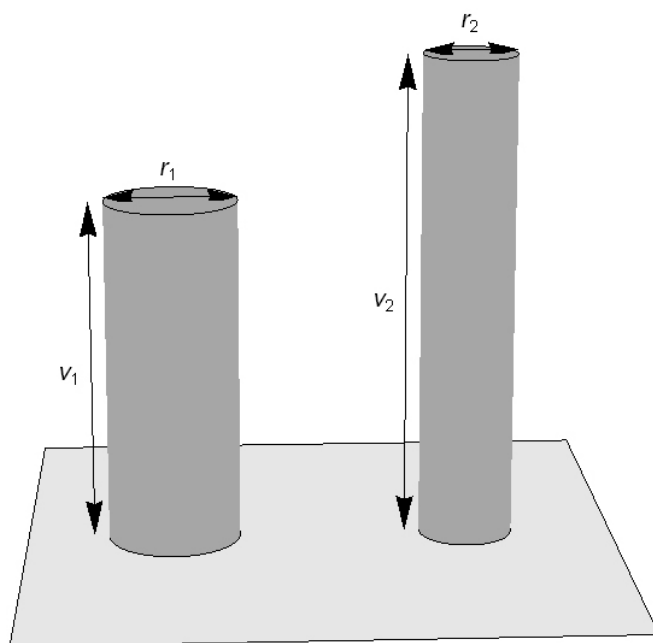
kde r je poloměr podstavy válce a v jeho výška.

Označíme-li parametry nižšího válce r_1 a v_1 a parametry vyššího válce symboly r_2 a v_2 (viz obr. 59), můžeme se shodě se vztahem (3) pro objem nižšího válce psát

$$V_1 = \pi r_1^2 v_1 \quad (4)$$

a pro objem vyššího válce pak psát

$$V_2 = \pi r_2^2 v_2. \quad (5)$$



obr. 59

Poloměr nižšího válce je dán vztahem $r_1 = \frac{a}{2\pi}$ a jeho výška je $v_1 = b$. Objem tohoto válce je tedy podle vztahu (4) roven

$$V_1 = \pi \left(\frac{a}{2\pi} \right)^2 b = \frac{a^2 b}{4\pi}. \quad (6)$$

Poloměr vyššího válce je dán vztahem $r_2 = \frac{b}{2\pi}$ a jeho výška je $v_2 = a$. Objem tohoto válce je proto podle vztahu (5) roven

$$V_2 = \pi \left(\frac{b}{2\pi} \right)^2 a = \frac{a \cdot b^2}{4\pi}. \quad (7)$$

Porovnáním vztahů (6) a (7) za předpokladu, že platí $a > b$, dostáváme $V_1 > V_2$. Nižší válec má tedy větší objem než válec vyšší. Lze si též uvědomit, že pro délky stran a a b použitého papíru platí

$$a = b \cdot \sqrt{2}, \quad (8)$$

což je dokázáno elegantním způsobem v kapitole 14. Potom lze vztahy (6) a (7) přepsat ve tvarech

$$V_1 = \frac{2 \cdot b^3}{4\pi} \quad (9)$$

a

$$V_2 = \frac{\sqrt{2} \cdot b^3}{4\pi} \quad (10)$$

Závěr $V_1 > V_2$ plyne pochopitelně i z porovnání vztahů (9) a (10).

Tento závěr je možné ověřit i experimentálně a zařadit tak tuto úlohu např. jako motivační při probírání soustav jednotek. Modely plášťů obou válců, které uvažujeme v celé úloze, vyrobíme ze dvou papírů formátu A4 (viz obr. 60). Pro experimentální ověření toho, který z obou válců má větší objem, budeme potřebovat sypký materiál (písek, rýže, zrní pro dokrmování ptáků v zimě, kousky pěnové hmoty používané jako výplň balíků, ...). V případě měření, které je popsáno zde bylo použito zrní pro dokrmování ptáků.



obr. 60



obr. 61

Na tácek postavíme plášť vyššího válce a naplníme jej zrním (viz obr. 61). Pak vezmeme plášť širšího válce a nasuneme jej kolem vyššího válce (viz obr. 62). Pak plášť vyššího válce opatrně vytáhneme tak, aby se sypký materiál přesunul do pláště nižšího válce (viz obr. 63).



obr. 62



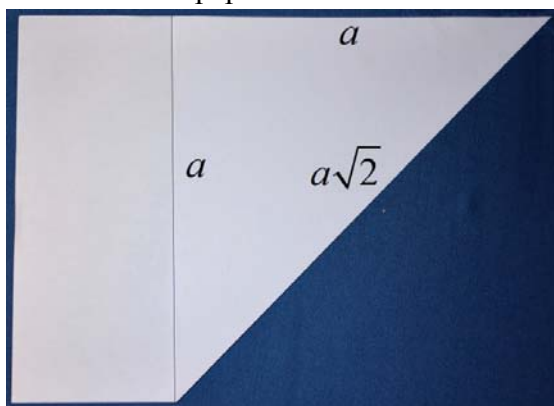
obr. 63

I experimentálně jsme získali stejný závěr: nižší válec má větší objem, protože v horní části jeho pláště zůstalo po přemístění zrní z vyššího válce volné místo.

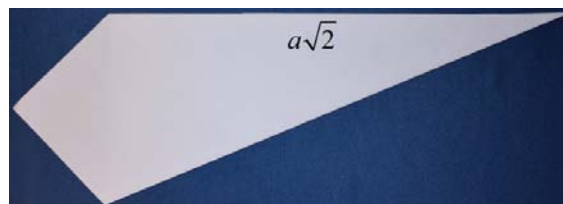
14. Důkaz poměru stran papíru formátu A4

Na základě [1] lze pomocí papíru formátu A4 velmi jednoduše dokázat, že poměr jeho stran je roven poměru $\sqrt{2}:1$.

List papíru formátu A4 přeložíme tak, aby vytvořený sklad svíral s delší stranou papíru úhel 45° . Tato fáze přeložení je zobrazena na obr. 64, na kterém jsou též vyznačeny délky stran rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka, který přeložením vznikl. Kratší strana původního listu papíru je označena symbolem a . Délka přepony vytvořeného rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka je dopočítána na základě Pythagorovy věty a je rovna $a\sqrt{2}$. Přeložíme-li nyní papír dále, můžeme tuto odvěsnu ztotožnit s delší stranou původního listu papíru - viz obr. 65.



obr. 64



obr. 65

Delší strana původního listu papíru má tedy také délku $a\sqrt{2}$ a je tedy $\sqrt{2}$ krát delší než kratší strana původního listu papíru. Délky stran listu papíru formátu A4 jsou tedy v poměru $\sqrt{2}:1$.

15. Hodnoty goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku

Pomocí čtvercového papíru lze pouhým skládáním získat poměrně jednoduchou pomůcku pro zjednodušení zapamatování si hodnot funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens v pravoúhlém trojúhelníku pro úhly 30° a 60° (na základě první skládačky z papíru) a 45° (na základě druhé skládačky).

Začneme s pomůckou pro úhly 30° a 60° . Papír, který byl použit pro nafotografování níže uvedených obrázků, byl slepen ve dvou různobarevných listů papíru, aby byl postup skládání lépe vidět. Při vlastním skládání je možné použít libovolný čtvercový papír.

Čtvercový papír (viz obr. 66) přeložíme na polovinu a zase zpět rozevřeme. Získaný sklad (který je na obr. 67 vyznačen černou čarou) je pouze pomocný, ale hraje při výrobě celé pomůcky zásadní roli.

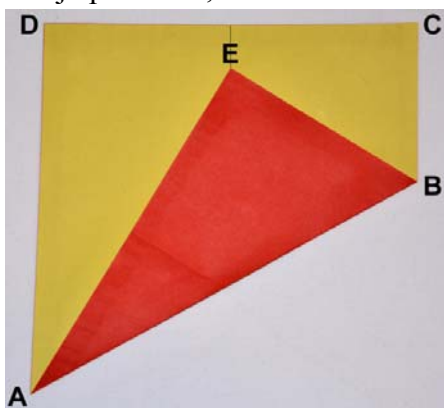


obr. 66



obr. 67

Vlastní skládání začneme přeložením jednoho z vrcholů čtvercového papíru tak, aby se dostal na připravený sklad z minulého kroku skládání. Nově vytvářený sklad přitom vychází ze sousedního vrcholu čtverce (viz obr. 68). Další popsany sklad je opět pomocný - dokážeme tím velikost úhlu při vrcholu A v pravoúhlém trojúhelníku AEB . Tento sklad spočívá v přeložení protilehlého vrcholu C k vrcholu, se kterým jsme pracovali v minulém kroku, na vytvořenou přeponu AB trojúhelníka AEB . Výsledek skládání je zobrazen na obr. 69. Z tohoto obrázku je patrné že, velikost úhlu EAD je shodná s velikostí úhlu EAB .



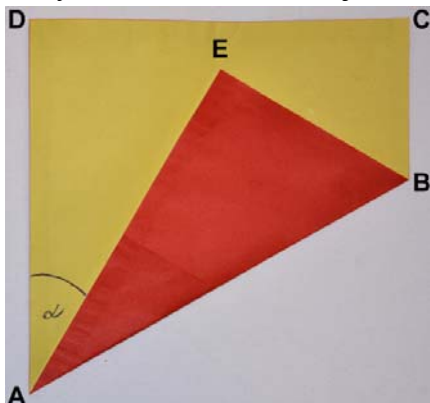
obr. 68



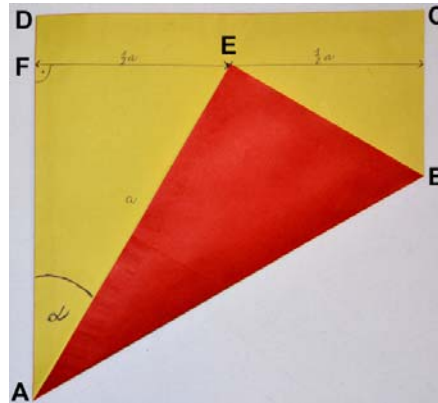
obr. 69

Po zpětném otevření právě provedeného skladu tedy můžeme tvrdit, že hodnota úhlu $\alpha = \angle EAD$ je rovna 30° (viz obr. 70). Nyní si na papír vyznačíme polohu bodu E a pomocí pravítka sestrojíme kolmici k prvnímu skladu (viz obr. 67). Vzhledem k tomu, že uvedený sklad půlí právě sestrojenou kolmici, platí $|EF| = \frac{1}{2}a$, kde a je délka strany původního čtverce (viz obr. 71). Dále je zřejmé, že hodnota úhlu AEF v pravoúhlém trojúhelníku AFE je rovna 60° . Délka strany AE je přitom rovna a , tj. délce strany původního čtverce.

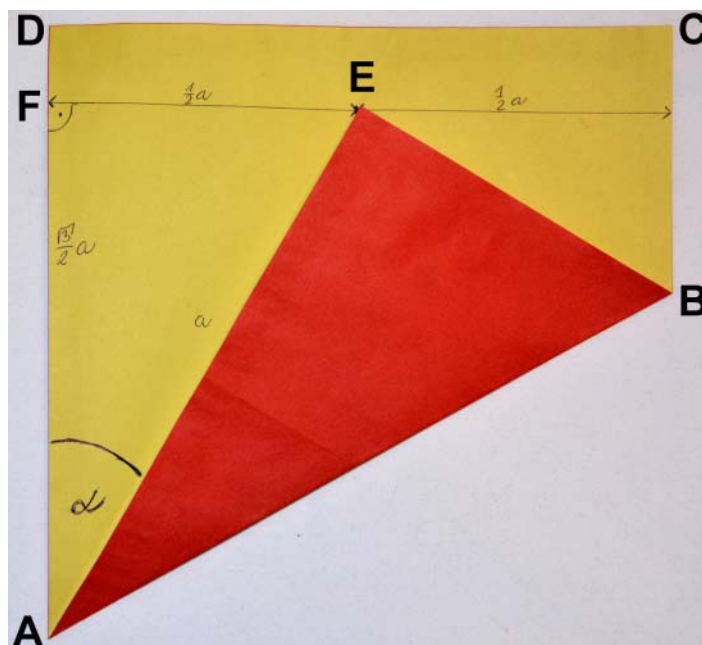
Délku strany AF pravoúhlého trojúhelníka AFE můžeme vyjádřit pomocí Pythagorovy věty: $|AE| = \sqrt{|AF|^2 + |EF|^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Nyní je pravoúhlý trojúhelník AFE připraven k odečítání hodnot goniometrických funkcí úhlů 30° a 60° . Trojúhelník AFE s jeho dopočtenými charakteristikami je zobrazen na obr. 72.



obr. 70



obr. 71



obr. 72

Na základě vlastností trojúhelníka AFE zobrazeného na obr. 72 tedy můžeme psát:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (11)$$

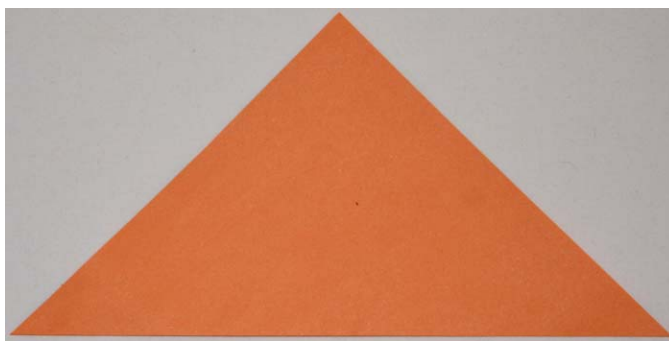
Analogicky můžeme psát i vztahy pro goniometrické funkce tangens a kotangens:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}. \quad (12)$$

Pro vytvoření pomůcky pro zapamatování si hodnot goniometrických funkcí úhlu 45° použijeme papír ve tvaru čtverce (viz obr. 73). Ten přehneme na polovinu podél jedné z úhlopříček (viz obr. 74). Dále označíme strany původního čtverce symbolem a , vyznačíme hodnotu jednoho ze dvou shodných úhlů u přepony pravoúhlého trojúhelníka KLM a pomocí Pythagorovy věty dopočítáme délku přepony KL v daném pravoúhlém trojúhelníku (tj. délku úhlopříčky původního čtverce): $|KL| = \sqrt{|KM|^2 + |LM|^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Toto označení je zobrazeno na obr. 75.



obr. 73



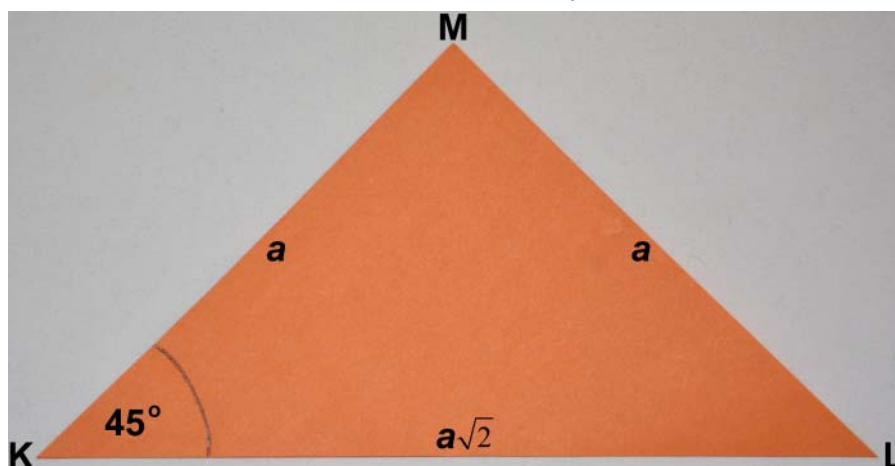
obr. 74

Nyní již můžeme pro hodnoty goniometrických funkcí sinus a kosinus v pravoúhlém trojúhelníku KLM podle obr. 75 psát:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (13)$$

Analogicky můžeme pro hodnoty funkcí tangens a kotangens psát:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1. \quad (14)$$

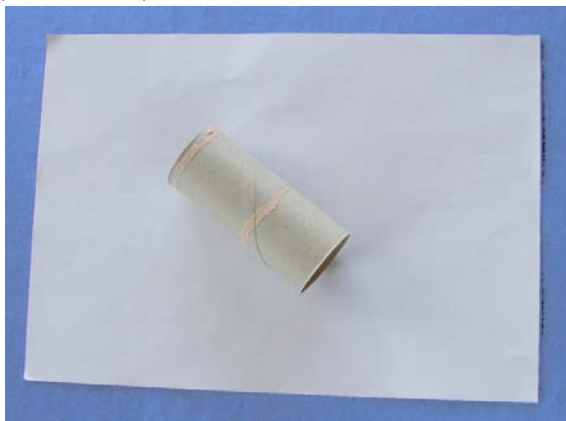


obr. 75

16. Záhada kečupu

Velmi jednoduchý, fyzikálně zajímavý a v praxi použitelný experiment se týká správného vyklepávání zbytku kečupu z láhve. Držíme-li láhev hrdlem dolů v jedné ruce, můžeme do této ruky udeřit druhou rukou zdola nebo shora. Pouze v jednom případě se podaří kečup z láhve vyklepat. Která varianta je správná, pomůže dokázat jednoduchý experiment.

Budeme potřebovat roličku od toaletního papíru a papír formátu A4 (viz obr. 76). Z papíru uděláme kuličku, která není příliš uhlazená a která relativně volně prochází roličkou (viz obr. 77).

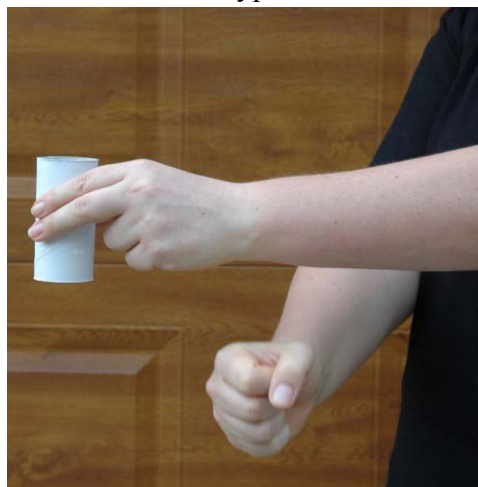


obr. 76



obr. 77

Vlastní experiment provedeme ve dvou krocích. Roličku, v níž je papírová kulička, uchopíme ve svislé poloze do jedné ruky a druhou rukou do ruky s kuličkou zdola udeříme. Po několika úderech vypadne kulička z roličky směrem dolů (viz obr. 78 a obr. 79).



obr. 78



obr. 79

Ve druhém kroku experimentu udeříme do ruky s kuličkou shora (viz obr. 80).

V tomto případě pozorujeme, že papírová kulička se objeví na horním konci roličky (viz obr. 81).

Vysvětlení experimentu vyplývá ze zákona setrvačnosti (první Newtonův zákon). Prudkým pohybem jedné ruky uvedeme do pohybu pouze roličku, zatímco kulička zůstává v klidu (např. vzhledem k místnosti, v níž experiment provádíme). Pro dosažení popsaného závěru experimentu je nutné kuličku vhodně zmačkat, aby se mohla vzhledem k roličce relativně snadno pohybovat, ale přitom aby třecí síla mezi papírovou kuličkou a roličkou byla dostatečná k udržení kuličky v roličce.

Pro praktické použití tohoto jevu při vyklepávání kečupu z láhve je tedy zřejmé, že je nutné do ruky s lahví kečupu udeřit zdola.

Tento experiment je též popsán na portále RVP (viz [3]).



obr. 80



obr. 81

17. Hračka lezoucí po provaze vzhůru

Z papíru lze vyrobit i velmi jednoduchou hračku, která názorným způsobem demonstruje existenci třecích sil. K výrobě budeme potřebovat silnější karton, obrázkovou předlohu, slámku na pití, tenčí provázek, nůžky, lepidlo a izolepu (viz obr. 82). Obrázková předloha použitá v tomto případě pro výrobu je zobrazena na obr. 85; tu lze ale nahradit libovolnou jinou (dle zájmu žáků, jejich fantazie při samostatné výrobě předlohy, ...).

Obrázkovou předlohu nalepíme lepidlem na silnější karton a necháme zaschnout. Pak karton i s obrázkem vystříhneme. Ze slámky na pití ustříhneme dvě stejně dlouhé části (každá přibližně 5 cm dlouhá) a připravíme si přibližně metr provázku. Délka provázku závisí na výšce osoby, která bude s hříčkou experimentovat (dotyčný experimentátor bude muset být schopen roztáhnout ruce na vzdálenost rovnou polovině délky provázku - viz obr. 84).

Provázek provlékneme připravenými kousky slávek tak, že slámky budou u každého ze dvou konců provázku. Na konci provázku zavážeme smyčku, případně můžeme pomocí korálku nebo kousku papíru zvětšit objem uzlu tak, aby se provázek ze slávek nevyvlékl. Pomocí izolepy přilepíme slámky na karton z druhé strany, než je nalepen obrázek. Slámky je nutné přilepit mírně šikmo (viz obr. 83).

Tím je pomůcka připravena k použití.



obr. 82



obr. 83



obr. 84



obr. 85

Ukazováček a prostředníček jedné ruky provlékneme připravenými smyčkami na provázku a ukazováček nebo prostředníček druhé ruky provlékneme provázkem a napneme. Přitom je nutné, aby nalepený obrázek byl směrem od nás. Při napnutém provázku střídavě

zvedáme ukazováček a prostředníček, na kterých máme navlečeny smyčky provázku. Přitom se hračka posouvá po provázku směrem vzhůru. Chceme-li hračku dostat zpět dolů, stačí provázek mírně povolit a hračka sjede vlivem tíhové síly zpět dolů.

Příčinou pohybu hračky směrem vzhůru je třecí síla mezi provázkem a slámkou. Při střídavém tahání za oba konce provázku se mění velikost této síly v obou slámkách. Proto vždy hračka po jedné slámce klouzne vzhůru, zatímco vzhledem ke druhé se nepohybuje (vzhledem k té, která v daný okamžik výrazně mění směr chodu provázku).

Na podobném principu pracují různé karabiny a další pomůcky, které používají horolezci (např. slaňovací osma, tzv. „kýbl“ a další).

18. Model klenby

Pomocí papíru formátu A4 lze také demonstrovat velmi důležitý stavební prvek: klenbu a její základní fyzikální princip.

K experimentu budeme potřebovat papír formátu A4, dvě skleničky (kelímky, kostky, ...), které budou sloužit jako stativ pro položení papíru, a závaží o hmotnosti přibližně 100 g (penál, mobilní telefon, balíček karet, ...). Pomůcky jsou zobrazené na fotografii na obr. 86.



obr. 86



obr. 87

Experiment provedeme ve dvou krocích. V prvním kroku položíme na dva stativy papír formátu A4 tak, že papír je podepřen na kratších stranách (viz obr. 87). Položíme-li na papír závaží, papír závaží neudrží a závaží spadne.

Ve druhém kroku papír poskládáme do tzv. harmoniky (viz obr. 88). Nyní poskládaný papír položíme na stativy a na složený papír položíme závaží (viz obr. 89). Závaží v tomto případě nespadne a na poskládaném papíru drží.



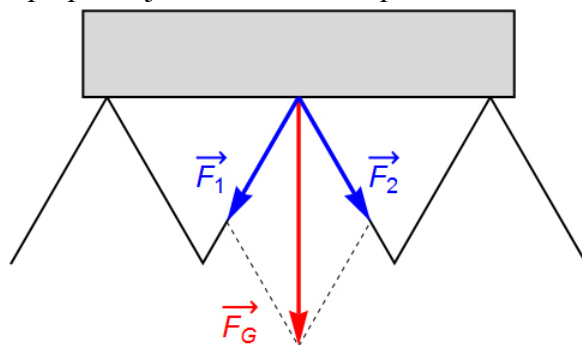
obr. 88



obr. 89

Vysvětlení tohoto experimentu vyplývá z rozkladu tíhové síly $\vec{F}_G$ závaží do směrů složeného papíru; tíhová síla $\vec{F}_G$ se rozloží na dvě složky $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ mířící do ploch složeného papíru (viz obr. 90). Tyto dvě síly navíc mají menší velikost, než je velikost síly $\vec{F}_G$. Při vhodném úhlu, který svírají složené plochy papíru, je konstrukce stabilní a síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ konstrukci ještě zpevní.

Proto se tento princip uplatňuje ve stavebnictví při konstrukci klenby.

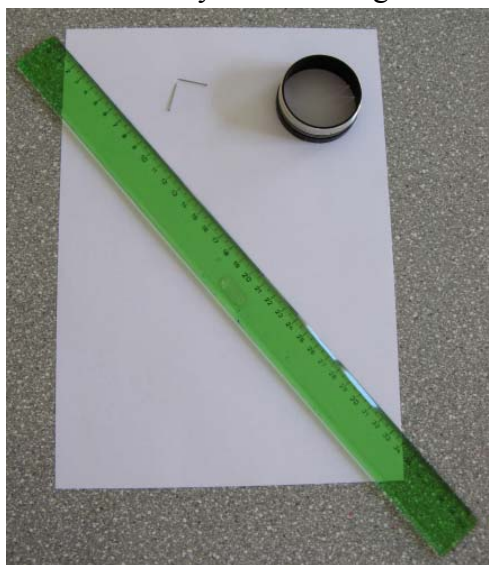


obr. 90

Tento experiment je též popsán na portále RVP (viz [4]).

19. Papírové váhy

Z papíru formátu A4 je možné vyrobit velmi jednoduché váhy vhodné na určování hmotností malých těles (prstýnky, tužky, víčka od tužek, ...). K experimentu budeme potřebovat list papíru formátu A4, pravítko, špendlík a vážené těleso (viz obr. 91). Pro další postup vážení a hlavně pro výpočet hmotnosti váženého tělesa je nutné vědět hmotnost jednoho listu papíru formátu A4. Tuto hmotnost můžeme získat na základě informace z obalu balíku papírů (viz obr. 92). Víme tedy, že jeden metr čtvereční má hmotnost 80 g. Řada formátu papíru označená písmenem A vzniká půlením delší strany papíru předchozího formátu této řady, přičemž výchozí je formát A0. Ten je tvořen listem papíru s plošným obsahem 1 m^2 , jehož strany mají délky v poměru $\sqrt{2}:1$. Papír formátu A4 je tedy čtvrtý v řadě, a proto jeho plošný obsah je roven šestnáctině plošného obsahu papíru formátu A0. A tedy i hmotnost listu papíru je rovna šestnáctině hmotnosti papíru formátu A0. List papíru formátu A4 má tedy hmotnost 5 g.



obr. 91



obr. 92

Před vlastní výrobou váhy určíme osu delších stran papíru. To provedeme buď naznačením přeložení papíru na polovinu a následným vyznačením osy tužkou na papír nebo přímým odměřením poloviny delší strany. Pak složíme papír do tzv. harmoniky (viz obr. 93); délka harmoniky je rovna délce delší strany papíru. Na takto složeném papíru je vyznačena část osy delších stran (viz obr. 94). Na této ose leží těžiště celého papíru, ve kterém působí tíhová síla papíru.



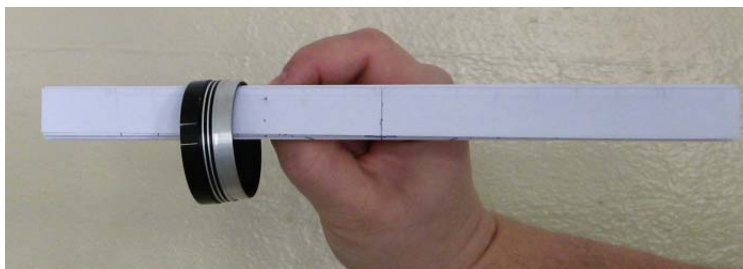
obr. 93



obr. 94

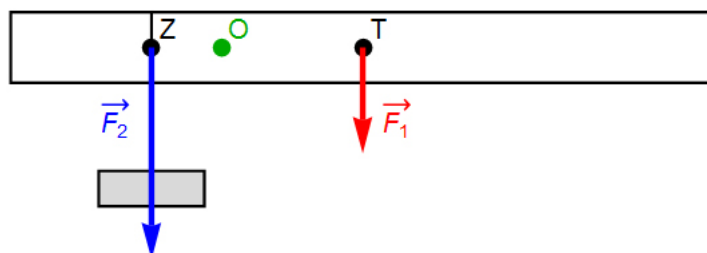
Nyní v libovolné vzdálenosti od této osy propíchneme všechny listy složené do tzv. harmoniky špendlíkem. Vytvořený otvor nemusí ležet přesně uprostřed šířky vzniklého proužku - lépe se bude později na vahách vyvažovat vážené těleso. Otvor opakovaným projížděním špendlíku zvětšíme tak, aby se v něm špendlík volně pohyboval. Špendlík procházející papírem vezmeme do jedné ruky a druhou rukou navlékneme na proužek papíru vážené těleso (buď rovnou nebo zavěšené na provázku). Těleso umístíme na druhou stranu od špendlíku, než je tužkou vyznačená osa, na níž leží těžiště papíru (viz obr. 95). Těleso

umístíme do takové polohy, aby byl papír (resp. z papíru vytvořená dvojzvrtná páka) v rovnováze.



obr. 95

Určení hmotnosti váženého tělesa provedeme na základě výpočtu založeného na momentové větě. Podle schématického nákresu experimentu na obr. 96 je zřejmé, že špendlík (a tedy osa otáčení vytvořené páky) je v bodě O . V bodě T působí tíhová síla $\vec{F}_1$ samotného papíru, v bodě Z působí tíhová síla $\vec{F}_2$ váženého tělesa.



obr. 96

Momentovou větou vzhledem k bodu O můžeme psát ve tvaru:

$$F_1 \cdot |OT| = F_2 \cdot |OZ|. \quad (15)$$

Obě tíhové síly můžeme dále rozepsat a dostaneme

$$m_1 \cdot g \cdot |OT| = m_2 \cdot g \cdot |OZ|, \quad (16)$$

odkud již dostaneme hledanou hmotnost váženého tělesa ve tvaru

$$m_2 = m_1 \cdot \frac{|OT|}{|OZ|}. \quad (17)$$

Hmotnost m_1 listu papíru známe (je rovna 5 g). Stačí tedy pravítkem odměřit vzdálenost bodů O a T a vzdálenost bodů O a Z a hledanou hmotnost dopočítat podle vztahu (17).

Porovnáním se skutečným vážením vybraného tělesa na vahách nebo měřením tíhové síly pomocí citlivého siloměru zjistíme, že právě popsaná metoda je velmi přesná.

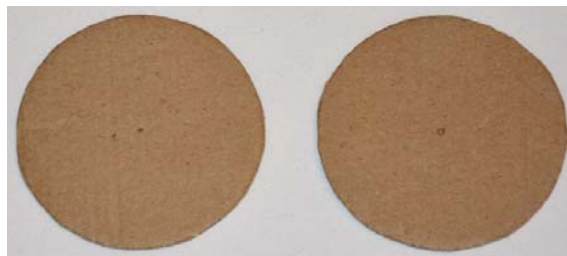
Při častějším určování hmotnosti těles tímto způsobem by bylo možné na papír nakreslit (případně vytisknout) stupnici v délkových jednotkách a nebo přímo v jednotkách hmotnosti.

20. Poslušná rolička

Velmi jednoduchou pomůcku lze vyrobit z roličky od toaletního papíru, kousku nitě nebo provázku a kartonu; dále budeme potřebovat kružítko, nůžky a lepidlo (viz obr. 97). Na karton narýsujeme kružítkem kružnici, která má přibližně dvakrát větší poloměr, než je poloměr roličky od toaletního papíru. Podél kružnic pak vystříháme z kartonu dva kruhy (viz obr. 98).



obr. 97

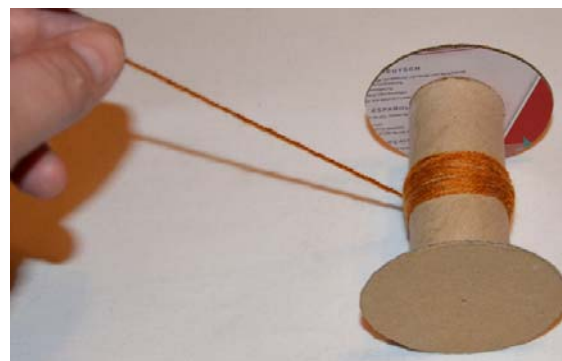


obr. 98

Na roličku navineme přibližně 2 metry nitě nebo provázku tak, aby provázek nemohl po roličce podkluzovat (můžeme zajistit korálkem dovnitř roličky, několikerým pevným ovinutím kolem roličky, přilepením, ...). Na obě podstavy roličky přilepíme kartonové kruhy a necháme zaschnout (viz obr. 99). Roličku položíme na vodorovnou podložku tak, že se provázek odvinuje z její spodní části, a uvedeme jí do pohybu tažením za volný konec provázku (viz obr. 100).



obr. 99



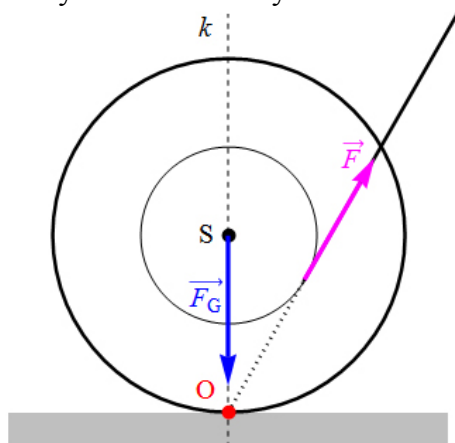
obr. 100

V závislosti na úhlu, který bude provázek svírat se svislým směrem, mohou nastat tři případy: rolička se po vodorovné podložce smýká, ale nevalí, rolička se valí směrem od experimentátora nebo se rolička valí směrem k němu. Která z výše uvedených možností nastává, záleží právě na úhlu, který svírá síla $\vec{F}$ se svislým směrem. Tento úhel přitom určí, kde bude ležet průsečík přímky, na které síla $\vec{F}$ leží, s vodorovnou podložkou. Situaci lze sledovat na obr. 101 až obr. 103. Bod P značí právě zmíněný průsečík, bod O označuje průsečík přímky, na které leží tíhová síla $\vec{F}_G$ celé roličky, s vodorovnou podložkou. Bod O představuje vlastně i bod, kolem kterého se rolička otáčí. (Ve skutečnosti se otáčí kolem vodorovné přímky, která spojuje oba kartonové kruhy a na které leží bod O .)

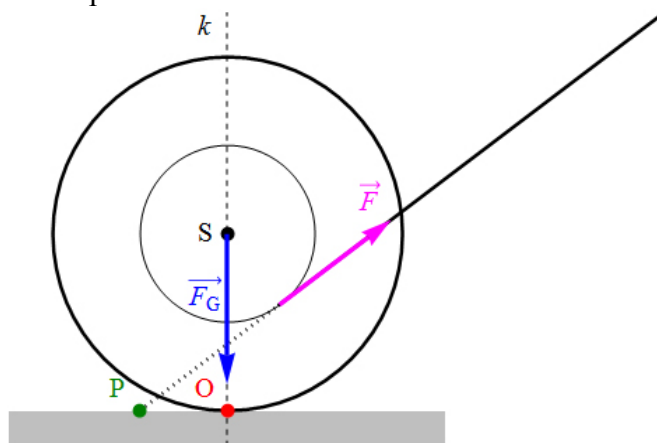
Protínají-li se obě přímky, na kterých leží síly $\vec{F}$ a $\vec{F}_G$ v jednom bodě (viz obr. 101), je moment obou těchto sil vzhledem k bodu O nulový. Pro pohyb roličky je podstatné to, že je nulový moment síly $\vec{F}$. Rolička se tedy kolem bodu O neotáčí a při působení silou $\vec{F}$ se pouze po podložce smýká. Má-li se rolička smýkat kolmo ke své podélné ose, musí být provázek na roličce navinut symetricky v její střední části.

Pokud leží bod P dále od experimentátora, než leží bod O (viz obr. 102), moment síly $\vec{F}$ je nenulový; v tomto případě je záporný. Rolička se tedy bude odvalovat směrem k experimentátorovi. Stejného výsledku dosáhneme i tehdy, pokud se provázek bude z roličky odvinovat z její horní části.

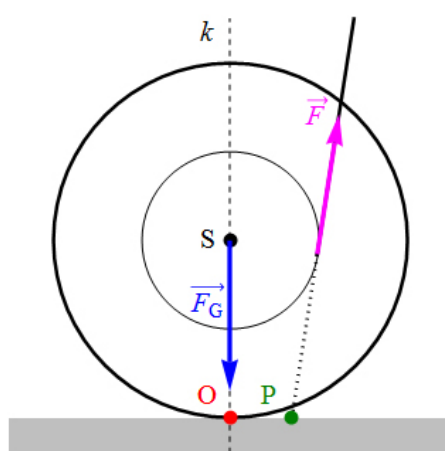
Leží-li bod P blíže k experimentátorovi, než je bod O (viz obr. 103), je moment síly $\vec{F}$ kladný. Rolička se tedy bude valit směrem od experimentátora.



obr. 101



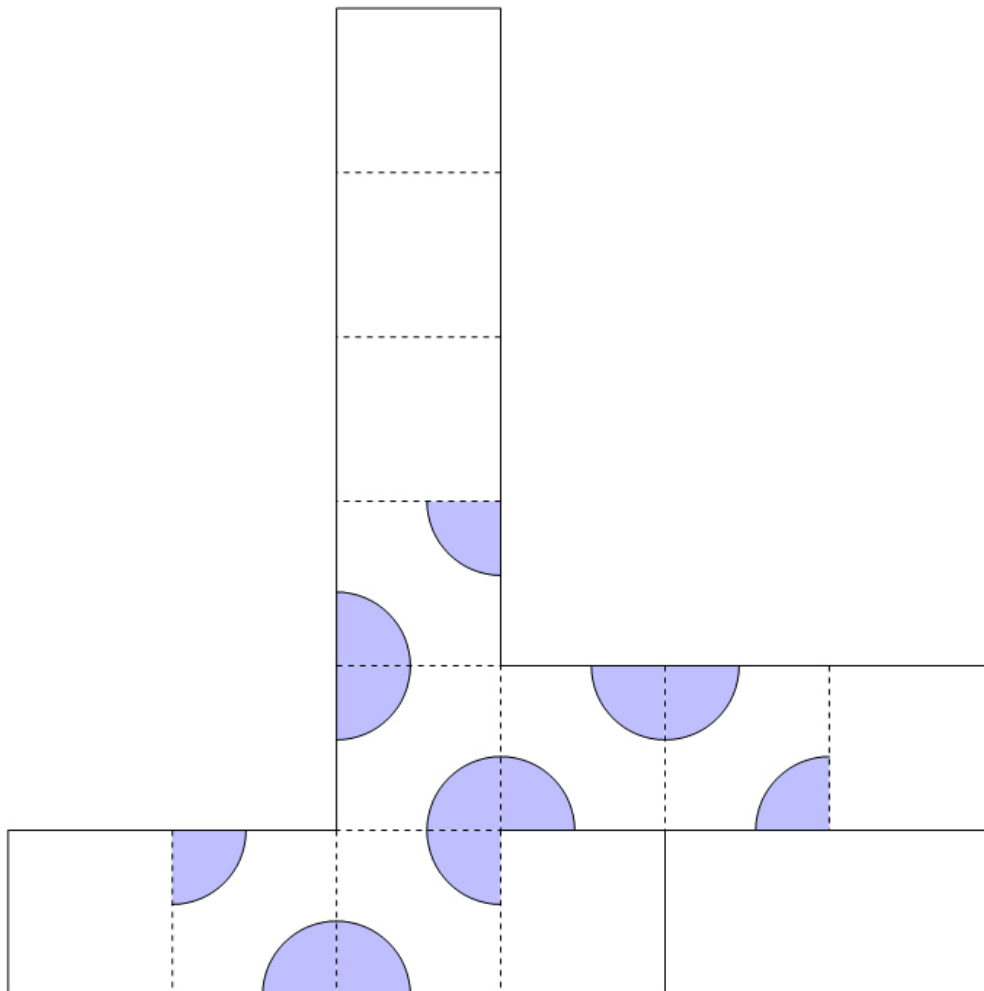
obr. 102



obr. 103

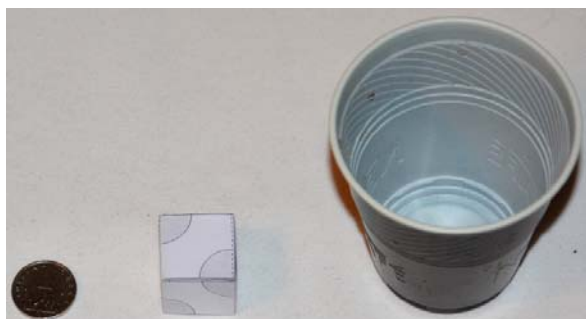
21. Poslušná kryhlička

V kapitole 10 bylo popsáno složení modelu krychle bez lepení. Stejnou síť využijeme i pro fyzikální experimentování. Pro ten účel je ale nutné ji vytisknout ve správné velikosti: síť krychle zobrazená na obr. 104 musí mít rozměry 13 cm a 13 cm. Důvodem je to, aby strana složené krychle byla o několik milimetrů delší, než je průměr korunové mince.



obr. 104

K experimentu budeme potřebovat složený model krychle (detailnější popis je uveden v kapitole 10), korunovou minci a vhodný stojánek (např. kelímek na kávu). Pomůcky jsou zobrazené na obr. 105.



obr. 105



obr. 106

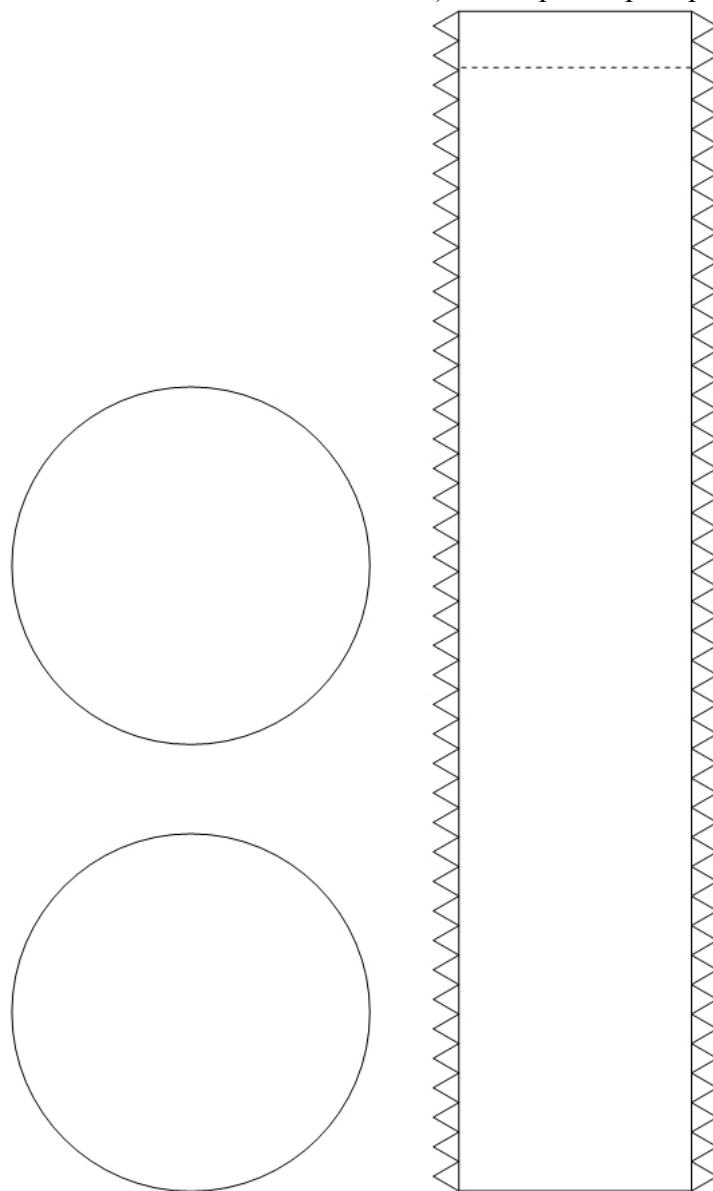
U jedné stěny složené krychle vznikla při skládání jakási kapsa. Do ní vsuneme korunovou minci a krychli postavíme na stojánek tak, aby stěna s korunovou mincí byla svislá

a ležela nad stojánkem. Krychli lze přitom umístit tak, že přes hranu stojánku výrazně přesahuje (viz obr. 106).

Vysvětlení experimentu je jednoduché. Vložením korunové mince do krychle k jedné její stěně se posunulo těžiště z geometrického středu krychle směrem k této stěně. Krychle bude ve stabilní poloze, dokud bude svislá těžnice procházet podstavou, na níž krychle stojí. Proto je možné krychli umístit tak, že výrazně přesahuje přes okraj podstavy stojánku.

22. Válec valící se do kopce

Ze čtvrtky papíru formátu A4 lze vyrobit také pomůcku, která bude zdánlivě porušovat platnost fyzikálních zákonů. Vzhledem k jejímu podivnému chování ji můžeme použít k motivačnímu experimentu nebo naopak k zadání problémové úlohy. Šablona pro její výrobu je zobrazena na obr. 107. Dva kruhy představují dvě podstavy válce a obdélník s malými trojúhelníky podél delších stran pak představuje plášť válce. Trojúhelníky slouží k přilepení podstav válce, čárkovanou čarou je označen přesný konec pláště válce; zbývající krátká část pláště (na obr. 107 horní část zobrazeného obdélníku) slouží pro slepení pláště válce.

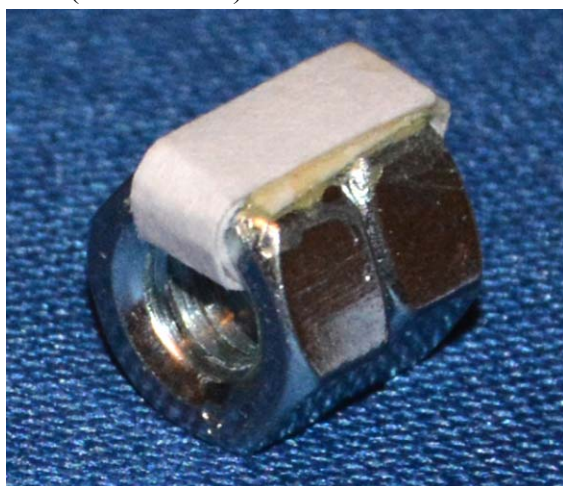


obr. 107

Kromě šablony budeme dále potřebovat jednu nebo dvě matičky M6 (nebo jiná malá tělesa sloužící jako asymetrická zátěž), lepidlo a nůžky. Šablonu vytiskneme na čtvrtku papíru (formátu A4 nebo A3) a vystříháme podél plných čar. Malé trojúhelníčky pak všechny přeložíme tak, aby jejich roviny svíraly se zbytkem obdélníka (budoucím pláštěm válce) pravý úhel.

Ze zbytku papíru po vystřížení šablony ustříháme zhruba 2 mm široký pásek délky přibližně 5 cm (viz obr. 109). Na tento proužek papíru navlékneme asymetrickou zátěž (matičky M6 či jiné malé těleso), proužek ještě jednou nebo dvakrát matičkami provlékneme a přilepíme (viz obr. 108). Po zaschnutí lepidla takto vytvořenou zátěž přilepíme přibližně do poloviny vystříženého obdélníka, který bude tvořit plášť válce. Je vhodné zátěž přilepit na podélnou osu tohoto obdélníka (viz obr. 110). Po zaschnutí slepíme tento obdélník kratšími

stranami k sobě (místo pro nanesení lepidla je na šabloně vyznačeno) a vytvoříme tak plášť válce (viz obr. 111).



obr. 108

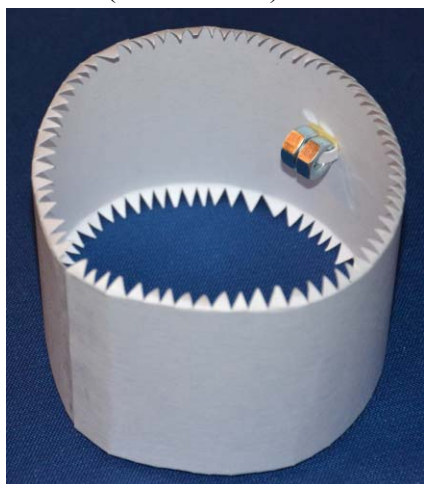


obr. 109

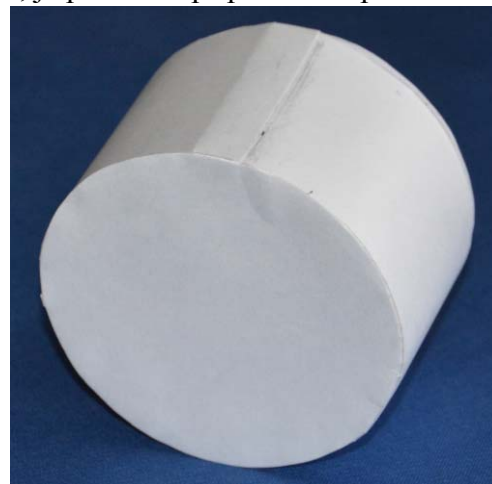


obr. 110

Posledním krokem přípravy pomůcky je přilepení dvou vystřižených kruhů na místa podstav válce (viz obr. 112). Jakmile lepidlo zaschne, je pomůcka připravena k použití.

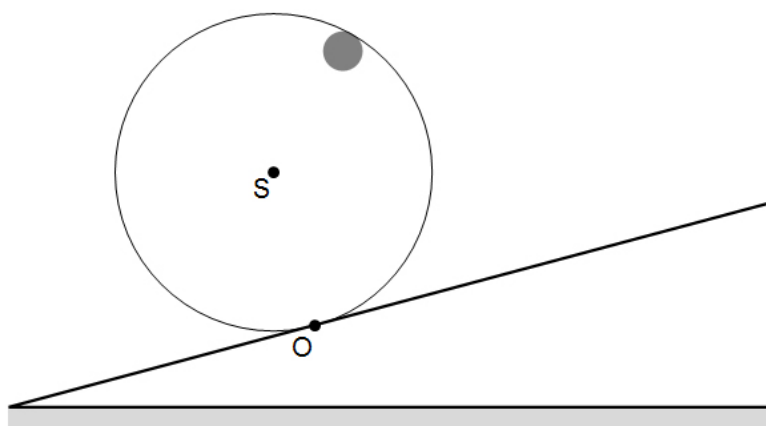


obr. 111



obr. 112

Položíme-li válec na vodorovnou podložku, přetočí se samovolně do polohy, v níž je zátěž na spodní části válce těsně nad bodem dotyku válce a podložky. V závislosti na typu podložky (hladká deska stolu, deska stolu s ubrusem nebo s papírem položeným na ní, ...) se válec buď protočí na místě (v případě malé velikosti třecí síly mezi válcem a podložkou) nebo po podložce poodjede (v případě, že velikost třecí síly mezi válcem a podložkou je dostatečně velká).



obr. 113

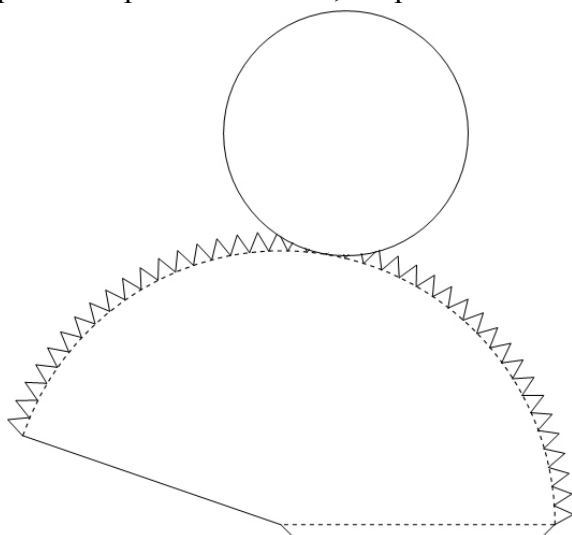
Položíme-li válec na nakloněnou rovinu tak, aby zátěž byla v horní části válce (viz obr. 113), tak po uvolnění válce se bude válec pohybovat směrem nahoru po nakloněné rovině.

Příčinou tohoto na první pohled podivného chování válce, je zátěž umístěná asymetricky ve válci. Válec se po nakloněné rovině rozjede směrem nahoru, pokud moment tíhové síly zátěže vzhledem k bodu otáčení (bod O) bude větší než moment tíhové síly válce (působící v bodě S). V případě, že momenty těchto dvou sil budou stejné (tj. válec bude pootočen tak, že zátěž bude výše nad nakloněnou rovinou, a tak bude i tíhová síla blíže k bodu O) válec se nerozjede. I zde hraje důležitou roli velikost třecí síly mezi válcem a nakloněnou rovinou.

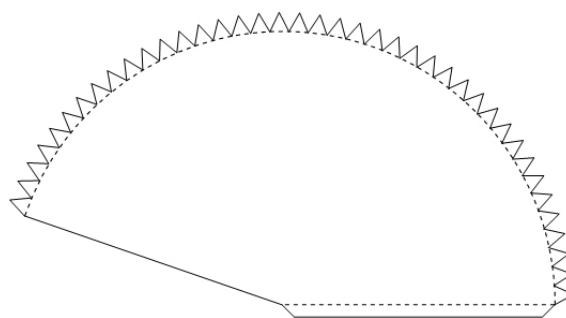
23. Poslušný dvojkužel

Pomocí papíru formátu A4 lze demonstrovat jednu z nejdůležitějších fyzikálních pouček: každý systém vždy zaujme takovou polohu, ve které je jeho energie minimální. Navíc je možné tento fundamentální fyzikální princip demonstrovat velmi jednoduše, případně experiment uvést jako „kouzlo“ nebo problémovou úlohu.

Nejdříve je nutné vyrobit pomůcku k tomuto experimentu: papírový dvojkužel. Šablony zobrazené na obr. 114 a obr. 115 vytiskneme, vystříhneme a slepíme k sobě. Úchyty na lepení jsou v šablonách zahrnuté. Podstava kužele (na obr. 114 zobrazený kruh) sice není pro zdárný průběh experimentu nutná, ale pomůcka se bude lépe slepovat.

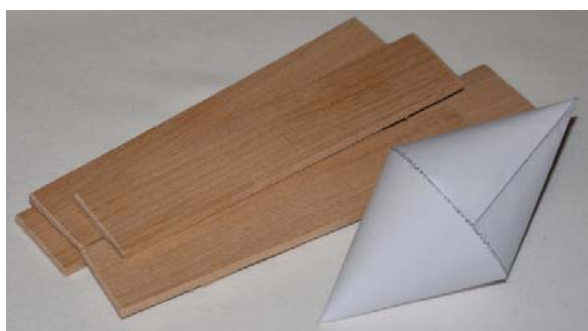


obr. 114

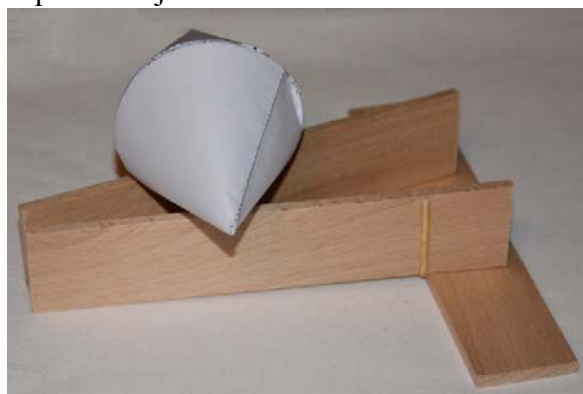


obr. 115

Kromě hotového papírového dvojkuželu budeme potřebovat několik dřevěných laťek (kostek z dětské stavebnice, železné pravítko určené pro kutily, ...). Dvojkužel spolu s dřevěnými laťkami je zobrazen na obr. 116. Jednu laťku položíme na plochu a další dvě o ní opřeme tak, aby tyto dvě laťky navzájem svíraly úhel přibližně 30° . Na ně položíme vyrobený dvojkužel (viz obr. 117). Pohled shora na stejný experiment je zobrazen na obr. 118.



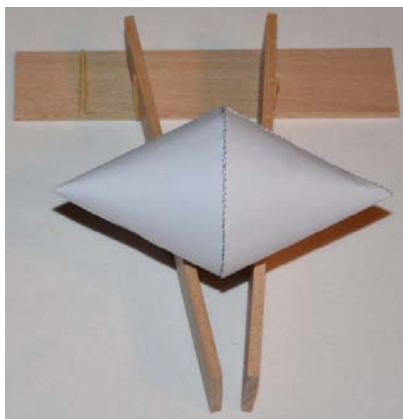
obr. 116



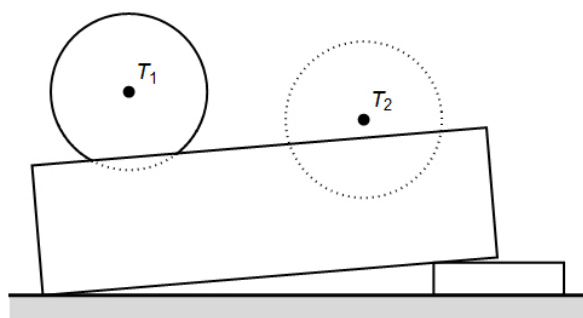
obr. 117

Pokud nyní papírový dvojkužel uvolníme, začne se valit směrem k místu, kde jsou laťky podepřené o třetí laťku. To ale znamená, že se dvojkužel valí po nakloněné rovině vzrůhu!

Vysvětlení experimentu vychází z nákresu na obr. 119. Dvojkužel spolu s laťkami je zde zobrazen z boku. V počáteční poloze je těžiště T_1 dvojkužele (ležící na spojnici vrcholů obou kuželů, z nichž je dvojkužel tvořen) v určité výšce nad vodorovnou podložkou. Pokud dvojkužel uvolníme, začne se valit po laťkách. Laťky se postupně rozvírají, takže kužel postupně zajíždí mezi laťkami níže. Tím klesá vzhledem k vodorovné podložce poloha těžiště a dvojkužel zaujímá tedy energeticky stabilnější polohu. Pohyb po nakloněné rovině tvořené z laťek směrem nahoru je pouze zdánlivý; dvojkužel se ve skutečnosti pohybuje pod vlivem tíhové síly (resp. její složky) tak, že se poloha jeho těžiště nad vodorovnou rovinou postupně snižuje.



obr. 118



obr. 119

V článku [8] je popsán návod na stavbu této pomůcky tak, aby určitě fungovala. Problémem je, že pohyb dvojkužele po lačkách je ovlivněn třemi úhly:

1. vrcholový úhel každého z obou kuželů;
2. úhel sevřený dvěma lačkami, po kterých se kužel pohybuje;
3. úhel sklonu laček vzhledem k vodorovné rovině.

V případě konstrukce z papíru je nutno úhel dvou laček i úhel, který svírají lačky s vodorovnou podložkou, nastavit experimentálně. I to ale může být součástí vysvětlení experimentu - zamyslet se spolu se žáky na jakých parametrech závisí zdárný průběh experimentu.

24. Pevnost papíru

Papír má možná překvapivě i poměrně velkou pevnost - a to jak při deformaci tahem, tak i při deformaci tlakem. Deformaci tlakem popisuje ve svém příspěvku [5] Václav Piskač. Deformaci tlakem využívá stejný autor při stavbě mostních konstrukcí - viz [6] a [7].

Pevnost papíru lze demonstrovat i dalšími dvěma (navzájem podobnými) experimenty.

K prvnímu experimentu budeme potřebovat 5 až 7 roliček od toaletního papíru (dle hmotnosti experimentátora) a dvě dřevěné desky o rozměrech přibližně 20 cm a 20 cm. Roličky postavíme na jednu desku symetricky rozložené kolem středu desky a na roličky položíme druhou desku (viz obr. 120). Při výběru roliček je nutné dbát na to, aby všechny roličky měly stejnou výšku a nebyly nijak deformované. Od různých výrobců toaletních papírů mají totiž roličky mírně odlišnou výšku. Na horní desku se pak postaví experimentátor (viz obr. 121). Problematickou částí experimentu je nástup na horní desku. To lze provést tak, že se desky s roličkami umístí mezi dvě židle postavené opěradly k sobě. Na opěradlech se pak experimentátor vzepré a došlápne na desku oběma nohama současně. Kdyby na desku nastupoval běžným způsobem (tj. nejdříve jednou nohou a pak druhou), porušil by stabilitu desek.

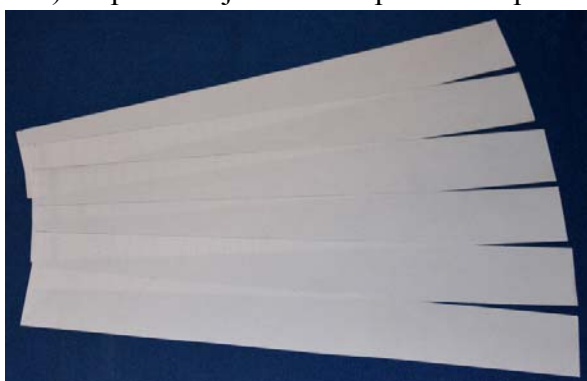


obr. 120



obr. 121

Ke druhému experimentu budeme potřebovat list papíru formátu A4, nůžky, karton nebo dřevěnou desku na umístění zátěže a samotnou zátěž (balíky papíru, knihy, ...). List papíru rozdělíme podélně na šest proužků (viz obr. 122), které srolujeme do válečků (viz obr. 123). Papír svinujeme velmi precizně a průběžně utahujeme.



obr. 122



obr. 123

Takto připravené válečky postavíme na vodorovnou pevnou podložku, položíme na ně symetricky umístěný karton nebo dřevěnou desku a na ní začneme přikládat zátěž (viz obr. 124). Zátěž přidáváme opatrně, ale při pečlivém postupu lze roličky zatížit zátěží o hmotnosti několika desítek kilogramů. Závisí pochopitelně na pečlivosti utahení papíru při výrobě roliček, na jejich průměru a dalších parametrech.

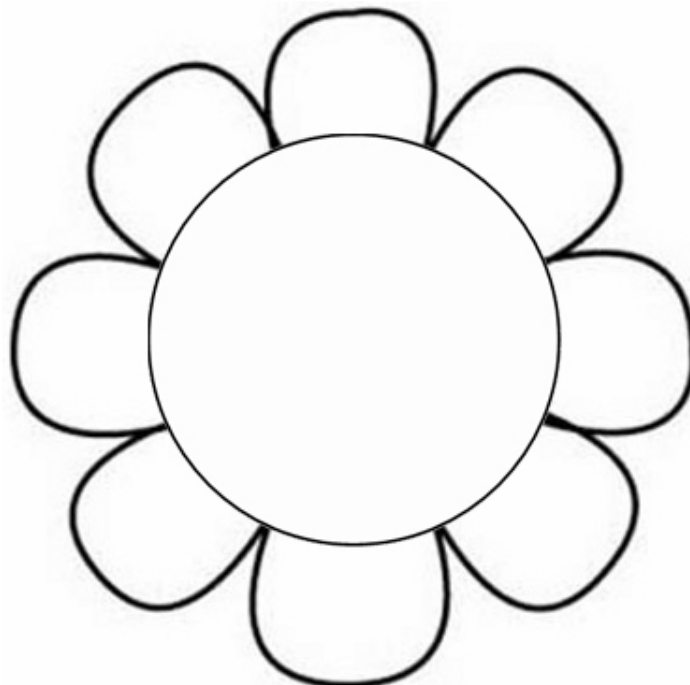
Tíha zátěže se rozloží do jednotlivých roliček (tj. v tomto případě bude každá rolička namáhána šestinou tíhy zátěže). Síla na jednotlivé roličky působí přitom ve směru jejich podélné osy, ve které jsou roličky vzniklé svinutím papíru velmi odolné.



obr. 124

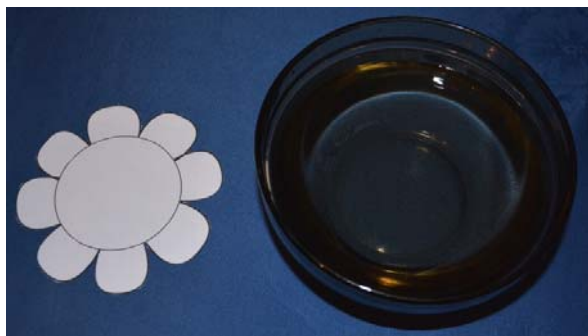
25. Kytička na vodě

S listem papíru lze demonstrovat také změny probíhající v papíru po jeho namočení. Šablonu kytičky zobrazenou na obr. 125 vytiskneme (nebo si nakreslíme vlastní dle své fantazie) a vystříhneme. Čáry oddělující jednotlivé „okvětní lístky“ stříkáme až ke kružnici. Kromě vystřižené šablony kytičky budeme potřebovat ještě misku s vodou (viz obr. 126). Miska stačí mělká, ale je nutné, aby měla minimálně takový poloměr, jako je poloměr kružnice opsané kytičce (včetně „okvětních lístků“).

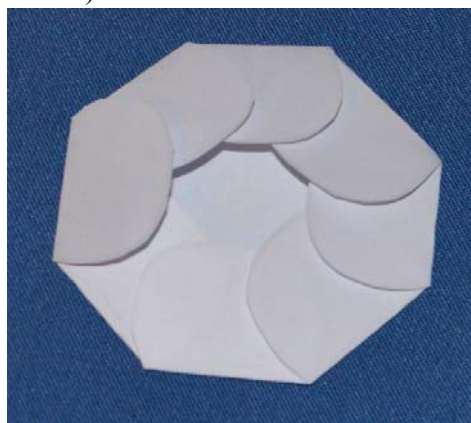


obr. 125

Šablonu nyní přehneme podél kružnice - přehneme tedy „okvětní lístky“ tak, aby šablona vypadala jako na noc zavřená kytička (viz obr. 127).



obr. 126



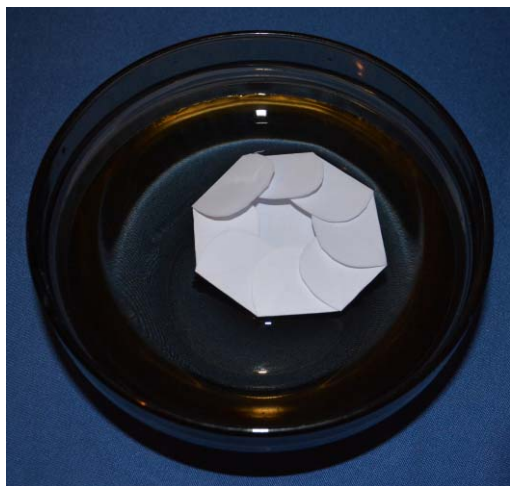
obr. 127

Nyní šablonu zavřené kytičky položíme na hladinu vody v misce (viz obr. 128) a papírovou kytičku pozorujeme. „Okvětní lístky“ kytičky se postupně začnou otvírat (viz obr. 129 až obr. 131). Nakonec bude na hladině plovat zcela otevřená kytička.

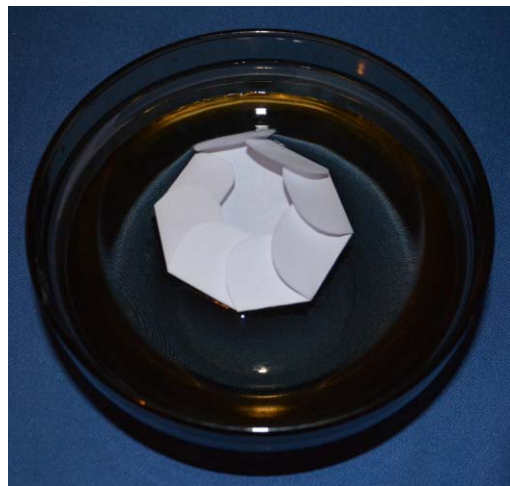
Příčinou toho, že se „okvětní lístky“ postupně otevrou je skutečnost, že vlákna papíru se poté, co nasají vlhkost, prodlouží. Proto se v místě ohybu papír narovná a vrátí se do původní polohy.

Současně můžeme rozebrat situaci z hlediska platnosti Archimedova zákona nebo z hlediska povrchového napětí.

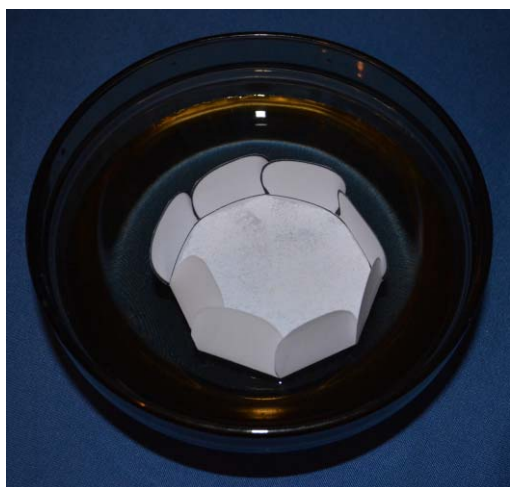
Když papír vyschne, lze „okvětní lístky“ znovu přeložit a experiment opakovat.



obr. 128



obr. 129



obr. 130



obr. 131

26. Fullereny

Z papíru lze vyrobit i jednoduché modely fullerenu.

Fullereny jsou molekuly tvořené z atomů uhlíku, které jsou uspořádány do vrstvy tvořené pětiúhelníky a šestiúhelníky svinuté do uzavřeného tvaru. Atomy uhlíku jsou přitom umístěny ve vrcholech těchto mnohoúhelníků. Vzhledem k tomu, že tvoří takto svinutou strukturu, jsou fullereny mimořádně odolné vůči vnějším podnětům (silové působení, ...). V současné době nejstabilnější atom obsahuje 60 atomů uhlíku.

Fullereny jsou pojmenovány po americkém architektovi Buckminsteru Fullerovi (1895 - 1983), který projektoval geodetické kopule podobného tvaru. Za objev fullerenu byla udělena v roce 1996 Nobelova cena za chemii americkému chemikovi Robertu Floydovi Curlovi (narozený v roce 1933), americkému fyzikovi a chemikovi Richardu Errettu Smalleymu (1943 - 2005) a anglickému chemikovi Haroldu Walterovi Krotoovi (narozený 1939).

Metoda výroby fullerenu v makroskopickém měřítku byla objevena v roce 1990. Vlivem obloukového výboje s elektrickým proudem přibližně 50 A, který probíhá mezi dvěma uhlíkovými elektrodami, se uhlík odpařuje. Vznikající uhlíkové saze se nechají zkondenzovat. Pro celý proces výroby je důležitý vnější tlak - optimální hodnota je 10 MPa.

V roce 1991 Japonec Sumio Iijima ukázal, že lze připravit fullereny, které nejsou jen kulového, ale i válcového tvaru. Jedná se o dlouhé úzké a čistě uhlíkové trubičky tvořené velkým množstvím šestiúhelníků a několika pětiúhelníky. Tyto nanotrubičky mají extrémně velký poměr své délky (až několik set milimetrů) ke svému průměru (několik nanometrů). Mezi jejich unikátní vlastnosti patří mechanická pevnost (50krát až 100krát vyšší, než je pevnost oceli), pružnost, elektrická vodivost, tepelná vodivost, nízká hustota při velkém povrchu trubičky, elektrokatalytické vlastnosti, chemická inertnost a další. Tyto vlastnosti pak naznačují možnost využít je v různých aplikacích v leteckém průmyslu, ve vojenském průmyslu, v elektronice, v medicíně, ve sportu, ...

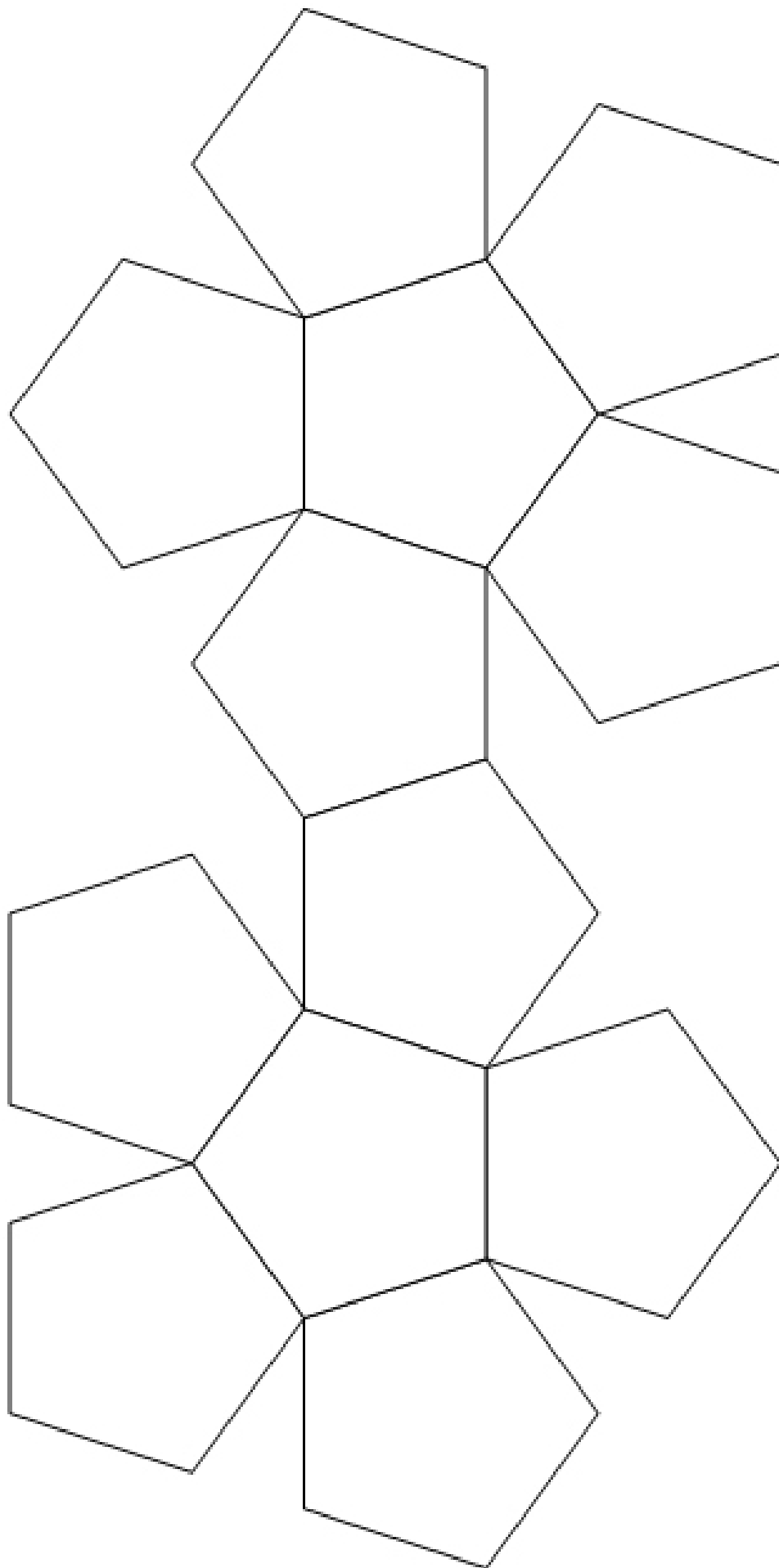
Různé tvary fullerenu a nanotrubiček je možné přiblížit i pomocí papírových modelů. Modely jsou více popsány v maturitní práci [9] a na webové stránce [10].

Označení fullerenu vyplývá z počtu atomů uhlíku, které jsou vázány ve všech mřížových bodech. V dále popsaných modelech se jedná o body, v nichž se stýkají stěny příslušného mnohostěnu.

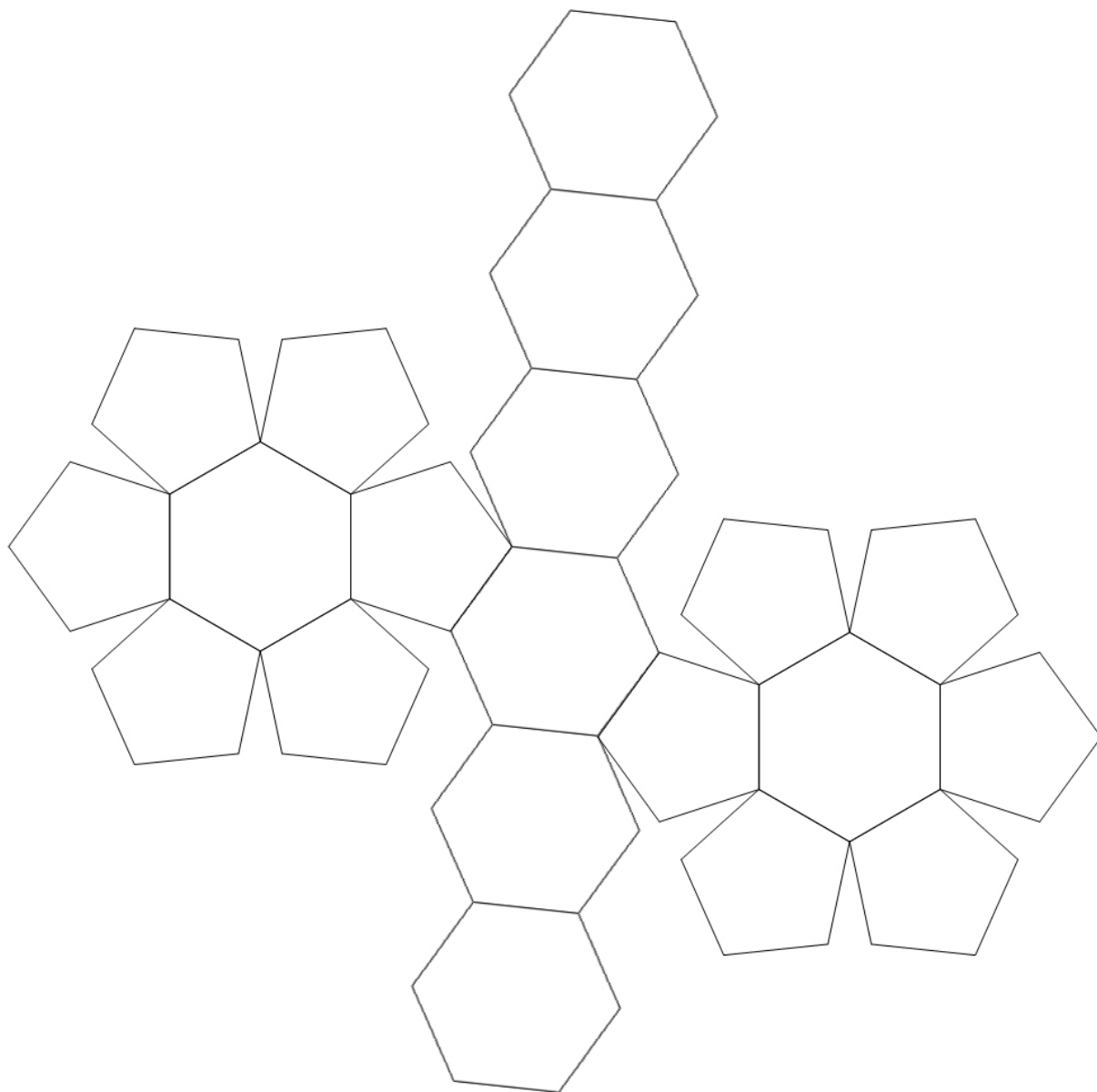
Jednotlivé typy fullerenu lze poskládat ze sítí, u kterých nejsou připraveny přesahy na zalepení. Při vystřihování sítě je tedy nutné s touto skutečností počítat. Lze sestavit tyto modely fullerenu:

1. fullerén C_{20} - síť je zobrazená na obr. 132, složený model pak na obr. 142. Jedná se o fullerén, jehož síť je tvořena dvanácti pravidelnými pětiúhelníky.
2. fullerén C_{36} - síť je zobrazená na obr. 133 a hotový model pak na obr. 143. Tento fullerén je tvořen dvanácti pravidelnými pětiúhelníky a osmi pravidelnými šestiúhelníky.
3. fullerén C_{60} - síť pro sestavení „plného“ modelu je zobrazena na obr. 134, složený a slepený model je zobrazen na obr. 144. Model tohoto fullerenu je tvořen dvanácti pětiúhelníky a dvaceti šestiúhelníky.
4. fullerén C_{96} - síť je zobrazena na obr. 141, složené těleso je zobrazeno na obr. 145. Tento model je tvořen z dvanácti pětiúhelníků a 38 šestiúhelníků.

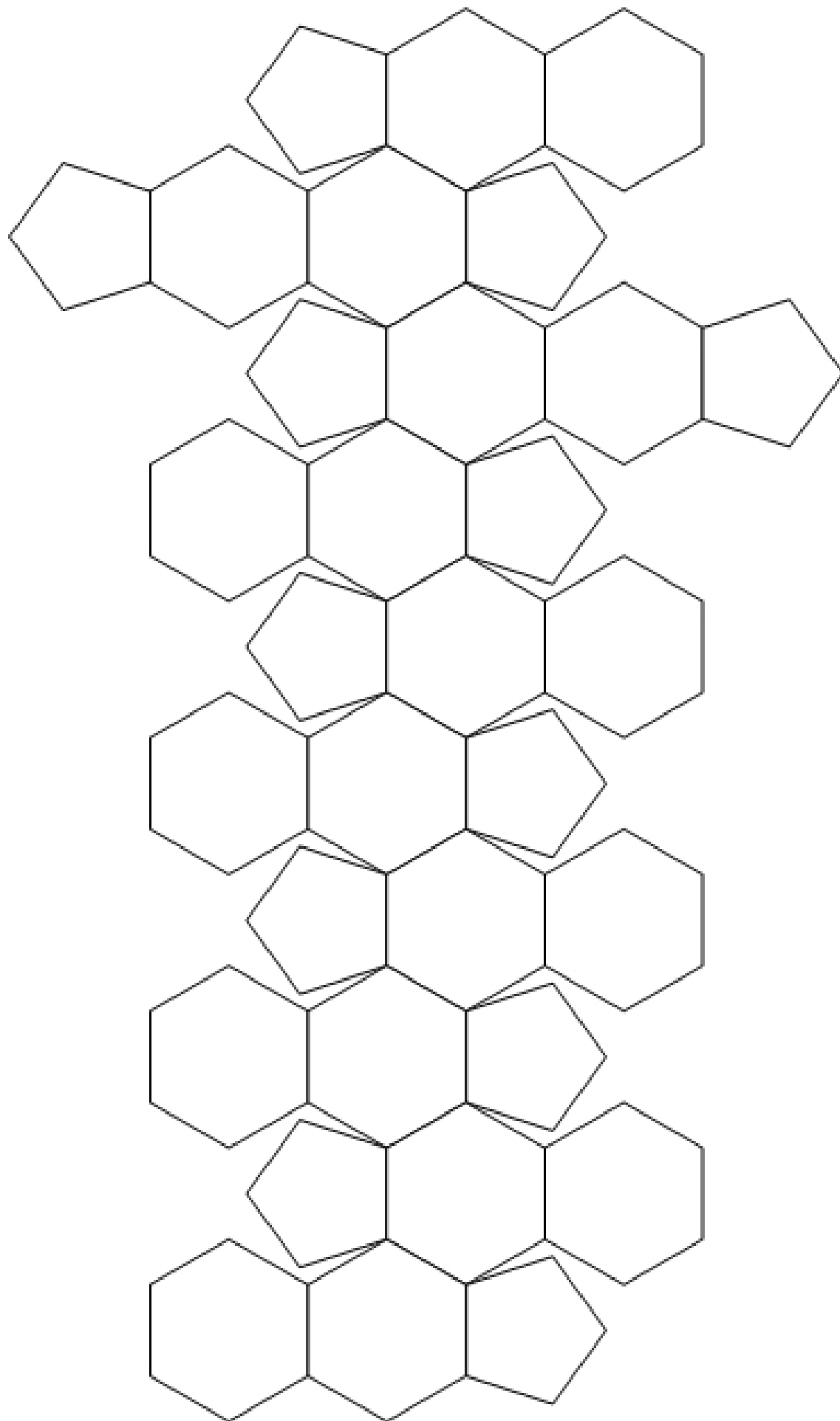
Model fullerenu C_{60} lze vytvořit také jinak. V tom případě budeme potřebovat šablony zobrazené na obr. 135.



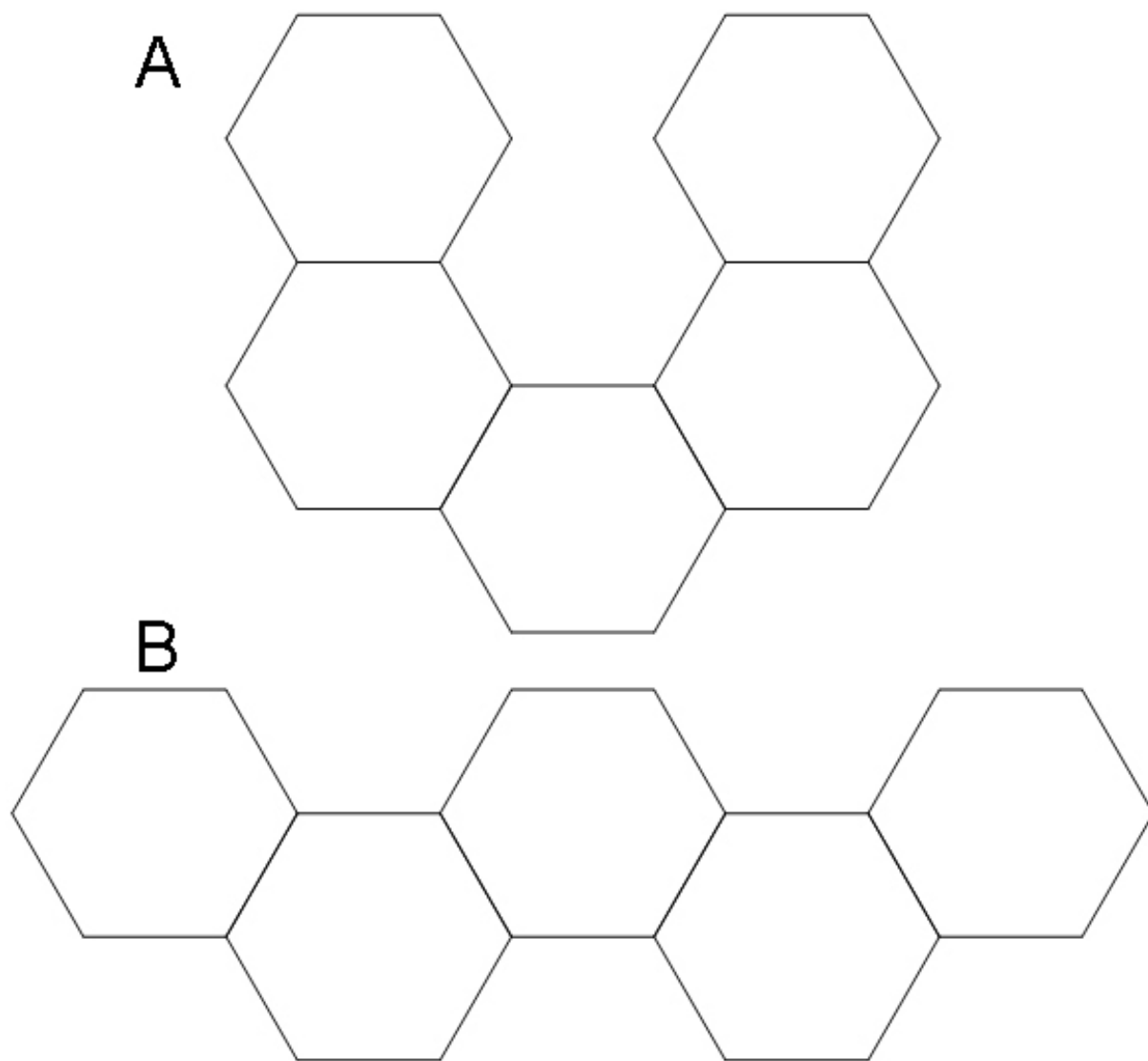
obr. 132



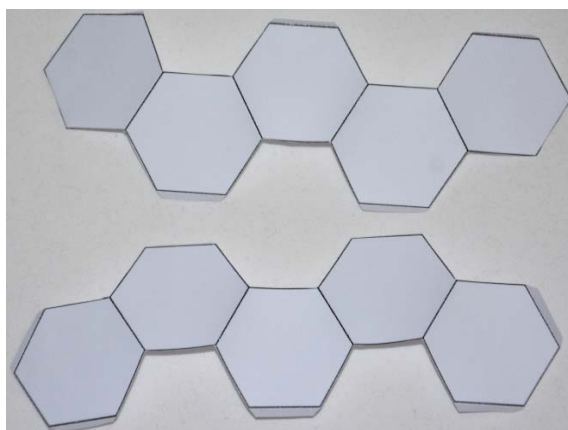
obr. 133



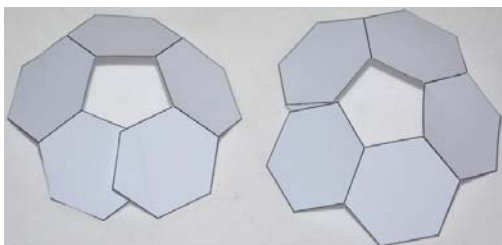
obr. 134



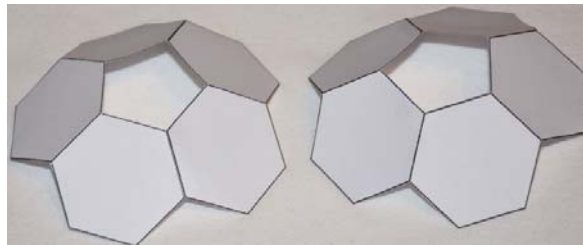
obr. 135



obr. 136



obr. 137



obr. 138

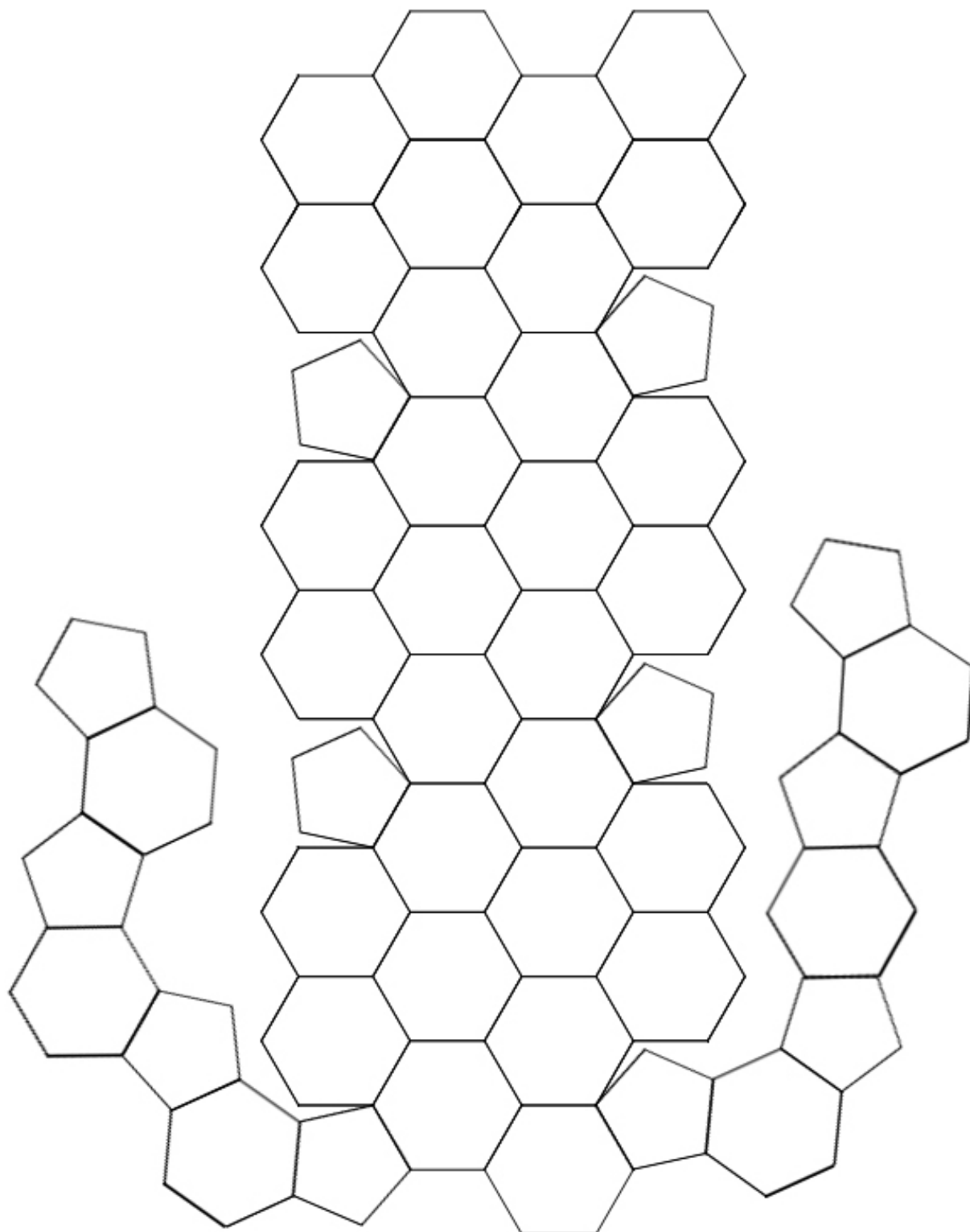


obr. 139

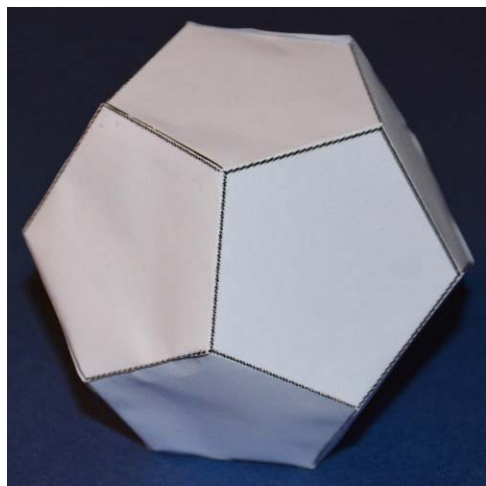


obr. 140

Šablony zobrazené na obr. 135 dvakrát vytiskneme a vystříhneme. Pozor, ani zde nejsou na obrázku zobrazeny přesahy papíru nutné ke slepení modelu. Na obr. 136 jsou zobrazeny dvě části šablony B, na obr. 137 jsou zobrazeny dvě části šablony A. Podle plných čar mezi jednotlivými šestiúhelníky šablony přehneme. Každou z částí A slepíme k sobě tak, jak je zobrazeno na obr. 138. Dvě části šablony B slepíme do prstence zobrazeného na obr. 139. Poté všechny tři části slepíme k sobě, až vznikne skelet tělesa připomínajícího fotbalový míč (viz obr. 140). Tím je druhý typ modelu fullerenu C_{60} vyroben. Tento model je svými geometrickými vlastnostmi totožný s modelem zobrazeným na obr. 144.



obr. 141



obr. 142



obr. 143



obr. 144



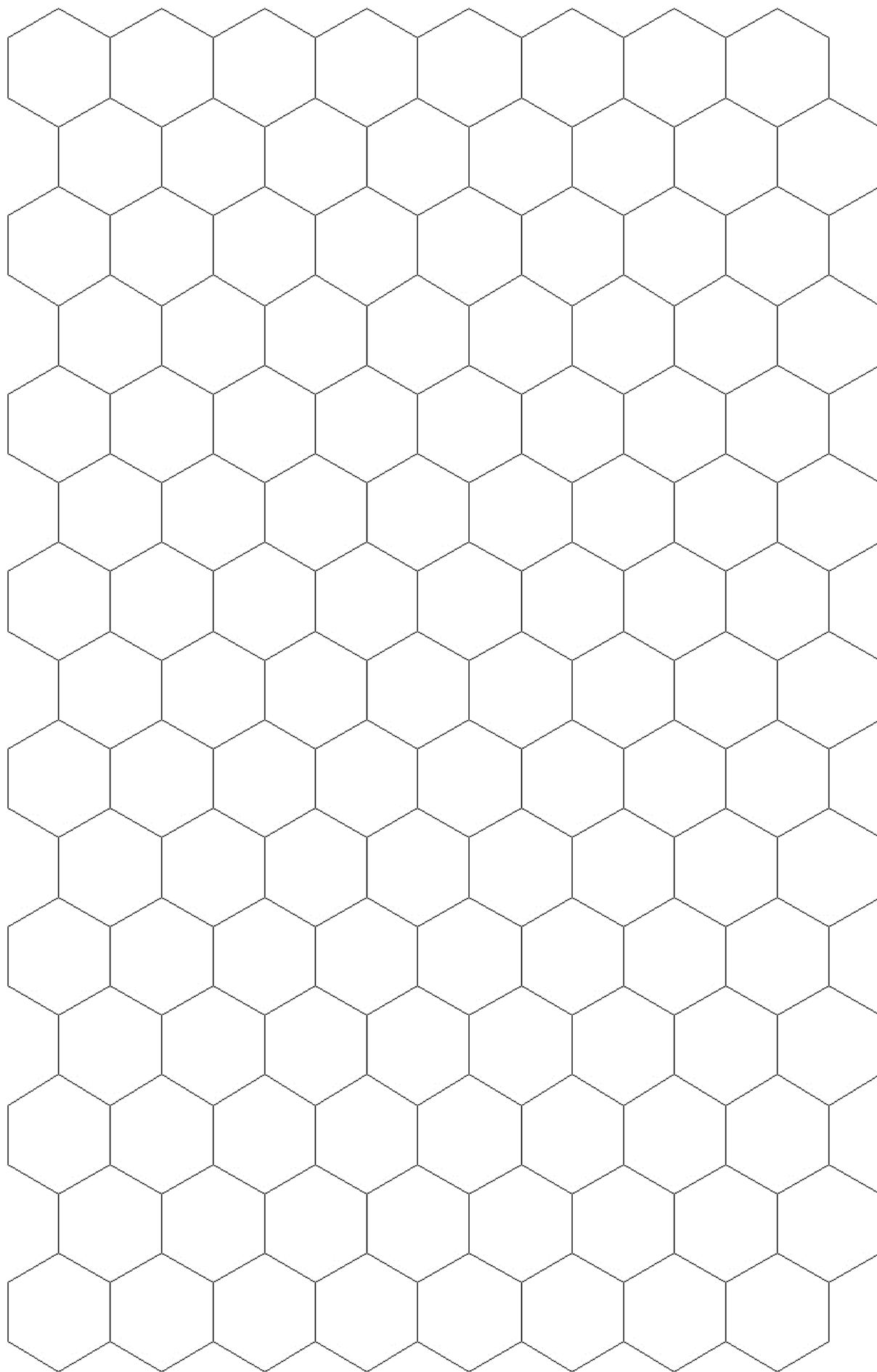
obr. 145

S fullereny souvisí také výroba nanotrubiček, které mají podobnou strukturu jako fullereny. I tyto trubičky lze vytvořit z papíru. Pro lepší názornost, aby bylo zřejmé, jak se struktura opakuje, je lepší tyto modely vyrobit z průhledné fólie. V tom případě síť zobrazenou na obr. 146 nevytiskneme na papír formátu A4, ale na průhlednou fólii. Je nutné dát ale pozor, abychom do tiskárny, v níž budeme síť tisknout, dali správnou fólii určenou právě pro tisk v dané tiskárně. V případě, že použijeme špatnou fólii, můžeme velmi rychle zničit válec a další součástky v tiskárně.

Vytiskneme-li síť zobrazené na obr. 146 třikrát, můžeme vyrobit modely tří jednovrstvých uhlíkových nanotrubic, které se liší svým stočením:

1. zig-zag - vystříženou šablonu stočíme tak, abychom získali válcovou plochu, jejíž osa je rovnoběžná s delší stranou šablony. Přilepíme-li nyní krajní šestiúhelníky k sobě, získáme věrohodný model této struktury nanotrubic. Vytvořené modely jsou zobrazené na obr. 147 a na obr. 150.
2. armchair - vystříženou šablonu stočíme do válcové plochy, jejíž osa je v tomto případě rovnoběžná s kratší stranou šablony. Pokud nyní přilepíme k sobě opět krajní šestiúhelníky, získáme modely zobrazené na obr. 148 a na obr. 151.
3. chiral - vystříženou šablonu stočíme podobně, jako v případě modelu struktury zig-zag. Rozdíl je v tom, že neslepíme k sobě ty šestiúhelníky, které jsou všechny v jednom svislém sloupci šablony (dle obr. 146). Okraje šablony před slepením nebudou navzájem rovnoběžné, ale budou vůči sobě natočené. Přitom ale dodržíme pravidlo, že lepíme šestiúhelníky přesně na šestiúhelníky. Slepením vzniknou modely zobrazené na obr. 149 a na obr. 152.

Názvy jednotlivých struktur nanotrubic jsou odvozené od vzhledu neslepených okrajů trubice.



obr. 146



obr. 147



obr. 148



obr. 149



obr. 150



obr. 151



obr. 152

27. Zdroje a literatura

- [1] Ústní sdělení Zdeňka Poláka z Jiráskova gymnázia v Náchodě.
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Napier%27s_bones
- [3] <http://clanky.rvp.cz/clanek/s/G/9283/ZAHADA-KECUPU.html/>
- [4] <http://clanky.rvp.cz/clanek/o/g/2203/PRINCIP-KLENBY.html/>
- [5] http://fyzikalnisuplik.websnadno.cz/mechanika/tahova_odolnost_papiru.pdf
- [6] https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=27cbeFSi7-M
- [7] https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=rVCSObipAOM
- [8] <http://kabinet.fyzika.net/dilna/dvojkuzel/fyzikalni-pomucka-dvojkuzel.php>
- [9] Minh D. V, Rukavička M.: *Fullereny*, SPŠST Panská, Praha 2012
- [10] <http://www.studiumchemie.cz/nanodemonstrace.php?id=14>