INTEGRÁLNÍ POCET

integrály jsou dvojího druhu:

- <u>NEURČITÝ</u> (PRIMITIVNÍ FCE) –
  - výsledkem je opět <u>fce</u>

- <u>URČITÝ</u> – výsledkem je číslo
  (fce, v níž se NEVYSKYTUJE proměnná,
  podle které se integrovalo)

Neurčitý integrál

D Mějme dány dvě fce f a F v otevřeném intervalu I. Jestliže pro všechna $x \in I$ platí

$$\boxed{F'(x) = f(x)},$$

říkáme, že fce F je PRIMITIVNÍ FCE k fci f v intervalu I.

„nová" PF je definována pomocí derivace

otevřený interval ⇒ není problém s defcí derivace

$$F'(x) = f(x)$$

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = F'(x)$$

$$C \in R$$

$\Rightarrow$ $\underline{F(x)}$ je určena až na aditivní konstantu $\underline{C}$

$\Rightarrow$ pokud je $\underline{F(x)}$ PF k fci f, pak i fce $F(x) + C$ je PF k fci f

výpočet $\underline{F(x)}$:

$$F'(x) = f(x) \iff F(x) = \int f(x)\,dx$$

resp. $\underline{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$

$C \in R$

grafy fcí $\underline{F(x) + C}$: vůči sobě posunuty po ose y

„odvození" – z mat. hlediska není zcela OK

dfce: $F'(x) = f(x)$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$\Delta F = f \cdot \Delta x$

„malé změny"

$$dF(x) = f(x)\,dx$$

v aplikovaných předmětech: „kousek přírůstku fce F je roven fční hodnotě fce f násobené přírůstkem proměnné $\underline{x}$ (nezávislá proměnná)"

$$F = \int f \boxed{dx}$$

$\int$ … „součet" (viz určitý integrál)

$f(x)$ – fce; integrand

x – integrační proměnná

C – integrační konstanta

$\int$ – integrační znak

V: Existují-li v otevřeném intervalu $\underline{I}$

PF k fcím $\underline{f_1(x)}$ a $\underline{f_2(x)}$ a jsou-li $c_1, c_2 \in R$,

existuje PF k fci $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ a

platí: $\int f(x)\,dx = \int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))\,dx = \underline{c_1} \int f_1(x)\,dx + \underline{c_2} \int f_2(x)\,dx$

$$\Rightarrow \quad \int c f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$$

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$$

Př. Najděte PF k daně fci:

1) $f: y = 3x^2 - \sin x$

$F: y = \int (3x^2 - \sin x)\,dx =$

$= \int 3x^2\,dx - \int \sin x\,dx =$

$= 3\int x^2\,dx - \int \sin x\,dx =$

$= 3\,\frac{x^3}{3} + C_1 - (-\cos x) + C_2 =$

$= \underline{\underline{x^3 + \cos x + C}}, \; C \in \mathbb{R}$

2) $g: y = \frac{x^3 - 4x^2 + x}{x}$ $x \neq 0$

$$y = \frac{x^3}{x} - \frac{4x^2}{x} + \frac{x}{x} = x^2 - 4x + 1$$

$$G: y = \int (x^2 - 4x + 1)\,dx = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + C}}, C \in R$$

3, $h: \; y = \dfrac{5x^3 + 7x^2 - 3}{x^3}$ $x \neq 0$

$$y = 5 + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^3} = 5 + 7 \cdot x^{-1} - 3 \cdot x^{-3}$$

$$H: \; y = \int \left(5 + 7 \cdot x^{-1} - 3x^{-3}\right) dx =$$

$$= 5x + 7 \cdot \cancel{\frac{x^{-1+1}}{-1+1}} + 7 \ln|x| - 3 \frac{x^{-2}}{-2} + C =$$

$$= 5x + 7 \ln|x| + \frac{3}{2x^2} + C \,; \; C \in \mathbb{R}$$

$D_{\ln|x|} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

0 z tabuľky: $\int x^n dx = \dots$

tabuľka: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \iff \int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$D_{\frac{1}{x}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $D_{\ln x} = (0, \infty)$

4) $k: \ y = 4\sqrt{x}$ $\qquad x \geq 0$

$y = 4 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

$$K: \int 4x^{\frac{1}{2}} dx = 4 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{8}{3}x\sqrt{x} + C}}; \ C \in \mathbb{R}$$

5, $l: y = \sin^2 \frac{x}{2}$ $\qquad$ $\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$$y = \frac{1-\cos x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x$$

$$L: y = \frac{1}{2}\int (1-\cos x)\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}(x - \sin x) + C}} \ ; \ C \in \mathbb{R}$$

6, $m: y = tg^2 x$ $\qquad \cos x \neq 0$

$$y = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$M: y = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \underline{tg x - x + C}, \ C \in \mathbb{R}$$

$$(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

7, $\int dx = x + C, \ C \in \mathbb{R}$

8, $\int dt = t + C, \ C \in \mathbb{R}$

9, $\int o ds = os + C, \ C \in \mathbb{R}$

10, $\int k dh = kh + L, \ L \in \mathbb{R}$

Napište předpis PF k fci $p: y = x^2 - e^x$ tak, aby graf PF procházel bodem $Q = [1; 3]$.

$$P: y = \int (x^2 - e^x)\,dx = \frac{x^3}{3} - e^x \underline{+C} \quad ; C \in \mathbb{R}$$

(nekonečně mnoho fcí)

$$Q \in P: \ P(1) = 3$$

$$\frac{1^3}{3} - e^1 + C = 3$$

$$C = \frac{8}{3} + e$$

$$P: y = \frac{x^3}{3} - e^x + \frac{8}{3} + e$$

Integrační metody

1) Per partes

metoda vhodná pro součin 2 fcí vycházející ze vztahu pro derivaci součinu

Dány 2 fce $u(x), v(x)$; ex. je derivace ve všech bodech otevřeného intervalu:

$$\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

mají:

$$u(x)\cdot v'(x) = \left(u(x)\cdot v(x)\right)' - u'(x)\cdot v(x)$$

$$\boxed{\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx}$$

„součin nederivovaných –
integrál nových fcí"

vhodné pro: polynom · $\sin x$
polynom · $\cos x$
polynom · e^x
„speciality"

Vypočtěte :

1) $\int x \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{matrix} \right| =$

$= x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = \underline{\underline{x \sin x + \cos x + C}}$

$C \in \mathbb{R}$

2) $$\int 12x^2 \cdot \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= 12\left(- x^2 \cos x - \int 2x(-\cos x)\,dx \right) =$$

$$= 12\left(- x^2 \cos x + 2\int x \cos x \, dx\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= 12\left(- x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx\right)\right) =$$

$$= \underline{\underline{12\left(- x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x\right) + C}} \; ; \; C \in \mathbb{R}$$

$$3, \int \ln x \, dx \overset{x>0}{=} \int 1 \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{matrix} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{matrix} \right| =$$

$$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= \underline{\underline{x \cdot \ln x - x + C}} \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

4) $\int 3x^4 \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{matrix} u' = x^4 & u = \frac{x^5}{5} \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{matrix} \right| =$ $x > 0$

$$= 3\left(\frac{x^5}{5} \ln x - \int \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{x} \, dx\right) =$$

$$= \frac{3}{5}\left(x^5 \ln x - \int x^4 \, dx\right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{5}\left(x^5 \ln x - \frac{x^5}{5}\right)}} + C, \quad C \in R$$

$$5)\ \int e^x \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{matrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx = \left| \begin{matrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= e^x \sin x - e^x(-\cos x) + \int e^x \cdot (-\cos x) dx$$

$$\overset{?}{\parallel}$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$2\int e^x \cos x \, dx = e^x (\sin x + \cos x)$$

$$\int e^x \cos x = \underline{\underline{\frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C}} \; ; \; C \in \mathbb{R}$$

obecně : $\int f(x)\,dx \overset{\text{per partes ... n-krát}}{=} g(x) + k \cdot \int f(x)\,dx$

$\hookrightarrow k \neq 1$

$$6)\ \int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x} & v = \ln x \end{array} \right| =$$

$$= \ln^3 x - \int 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx =$$

$$= \ln^3 x - 2 \int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \underline{\int \frac{\ln^2 x}{x} = \frac{1}{3} \ln^3 x + C} \ ; \quad C \in \mathbb{R}$$

2, Substituce

V: Nechť $F(t)$ je PF k fci $f(t)$ na intervalu $(\alpha;\beta)$. Nechť $t=g(x)$ má derivaci $g'(x)$ v intervalu $(a;b)$. Pro každé $\underline{x} \in (a;b)$ nechť hodnota $g(x)$ patří do intervalu $(\alpha;\beta)$. Pak v intervalu $(a;b)$ je fce $F(g(x))$ PF k fci $f(g(x))\cdot g'(x)$, tedy platí:

$$\boxed{\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt}$$

vysvětlení: derivace složené fce

$$\Big(F(g(x))\Big)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(t) \cdot g'(x) =$$

$$= f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$\underbrace{F(t) \;\ldots\; \text{PF k fci } f(t)}$

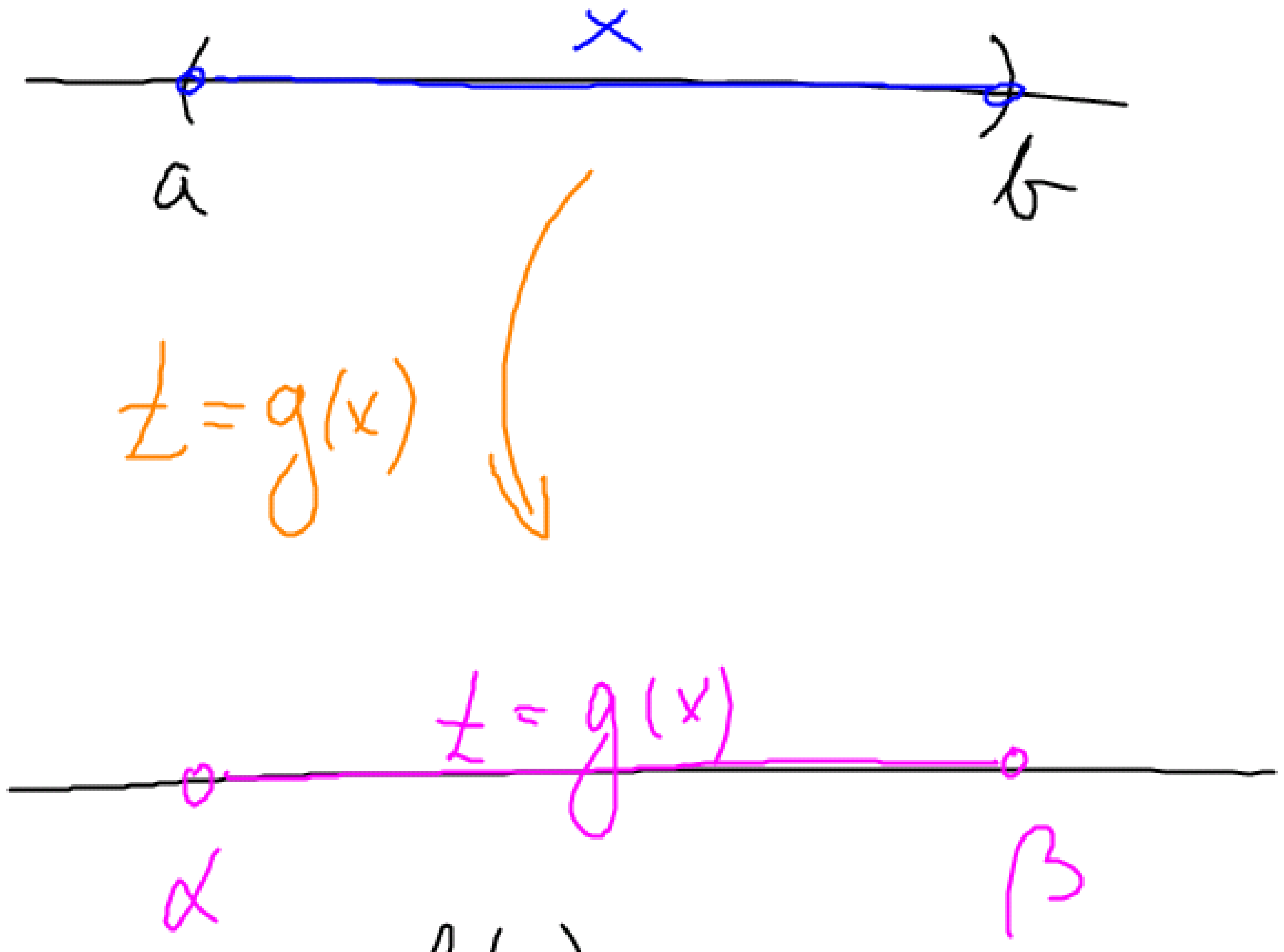
$t = g(x)$

$\int$

$$F(t) = \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

$$\int f(t)\,dt = \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

exje $g'(x)$ pro $x \in (a;b)$



hledáme PF na $(\alpha;\beta)$

$$f(t) \rightarrow F(t)$$

Vypočtěte:

$$1)\quad \int \overbrace{\sin(\underbrace{3x+1}_{g(x)})}^{f(g(x))}\,dx =$$

$$I. = \left| \begin{array}{l} t = 3x+1 \\ \frac{dt}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \sin t \,\frac{dt}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \sin t \,dt = \frac{1}{3}(-\cos t) + C = \underline{\underline{-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C}}$$

$$C \in R$$

II.

$$\int f(g(x))\cdot \underline{g'(x)}\,dx = \int f(t)\,dt$$

$$\int \sin(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\cdot \underline{3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C}}\,;\ C\in\mathbb{R}$$

„pravidlo" (zjednodušení)

$a, b \in \mathbb{R};\ a \neq 0$

$$\int f(\underbrace{ax+b})\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot a\,dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int f(t)\,dt = \frac{1}{a}F(t) + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{a}F(ax+b) + C}}\ ;\ C \in \mathbb{R}$$

lin. argument fce ⇒ získanou tabulkovou PF
DĚLíM derivací lin. argument (= číslo a)

2) $$\int \frac{1}{(5x-2)^3}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{5}{(5x-2)^3}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{t^3}\,dt =$$

$x \neq \frac{2}{5}$

$$= -\frac{1}{10}\,\frac{1}{t^2} + C = \underline{\underline{-\frac{1}{10(5x-2)^2} + C}}\;;\; C \in \mathbb{R}$$

3) $$\int x\sqrt{1-4x^2}\,dx =$$

$1-4x^2 \geq 0$

I.

$$= -\frac{1}{8}\int -8x\cdot\sqrt{1-4x^2}\,dx = -\frac{1}{8}\int \sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot t\sqrt{t} + C =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{12}(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2} + C}}\;;\; C \in \mathbb{R}$$

II.

$$\left| \begin{array}{l} t = 1-4x^2 \\ \frac{dt}{dx} = -8x \end{array} \right| = \int \cancel{x} \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{dt}{-8\cancel{x}} =$$

$x \neq 0$! , ač $0 \in D$

$$= -\frac{1}{8} \int \sqrt{t}\, dt = -\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{t^3} + C =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{12} \sqrt{(1-4x^2)^3} + C}} \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

4) $\int \sin\sqrt{x}\,dx$ $\qquad x \geq 0$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \end{array} \right| = \int \sin t \cdot 2t\,dt =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = \sin t & v = -\cos t \end{array} \right| = 2\left(-t\cos t + \int \cos t\,dt\right) =$$

$$= 2(-t\cos t + \sin t) = \underline{\underline{2\left(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right) + C}}, \; C \in \mathbb{R}$$

$\cos x \neq 0$

$$5)\ \int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)\, dx$$

$$= -\int \frac{1}{t}\, dt = -\ln|t| + C = \underline{\underline{-\ln|\cos x| + C}}\ ;\ C \in R$$

$$6)\ \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + C =$$

$$= \underline{\underline{\ln|f(x)| + C}}\ ;\ C \in R$$

7) 3 způsoby řešení

$$\int \sin 2x\,dx$$

a) $\int \sin 2x\,dx = \frac{-\cos 2x}{2} + C$

b) $\int \sin 2x\,dx = 2\int \underbrace{\sin x}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'(x)}\,dx = 2\int t\,dt =$

$= 2\frac{t^2}{2} + C = \underline{\underline{\sin^2 x + C}}$

c) $\int \sin 2x\,dx = 2\int \sin x \cdot \underbrace{\cos x}_{f}\,dx = -2\int t\,dt = -2\frac{t^2}{2} + C =$

$= \underline{\underline{-\cos^2 x + C}}$

defce PF: $F(x)' = f(x)$

$$\Updownarrow$$

$$(F(x) + C)' = f(x) \quad ; \; C \in \mathbb{R}$$

a, b, c, ... OK $\Leftrightarrow$ výsledné fce se <u>MUSEJÍ</u> lišit o konstantu

a, b) : $-\frac{\cos 2x}{2} - \sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin^2 x - \sin^2 x =$

$= -\frac{1}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

b, c) $\sin^2 x - (-\cos^2 x) = \underline{\underline{1}}$

3, Rozklad na parciální zlomky

pro funkce tvaru $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ – polynomy; stupeň $P(x) <$ stupeň $Q(x)$

- $Q(x)$ napsat jako součin:
  - kořenových činitelů $(x-\alpha_i)^{n_i}$; n_i – násobnost kořene α_i
  - kvadratických trojčlenů $(x^2+p_k x+q_k)^{m_j}$, které nelze v $\mathbb{R}$ rozložit; m_j – násobnost trojčlenu

- podíl $\frac{P(x)}{Q(x)}$ napsat jako součet zlomků typu

  — $\frac{A_i}{x-\alpha_i}$ (řádné násobnosti)

  — $\frac{B_k x_k + C_k}{x^2+p_k x+q_k}$ (řádné násobnosti)

- určit konstanty A_i, B_k, C_k
  $(\Sigma m_i + \Sigma 2 m_j = \text{stupeň } Q(x))$

- vypočítat integrály

Vypočtěte:

1) $$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx =$$

$$\frac{\boxed{1}}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} =$$

$$= \frac{A + Ax + B - Bx}{(1-x)(1+x)} = \frac{\boxed{A+B} + \underline{(A-B)}x}{(1-x)(1+x)}$$

$$A+B=1 \qquad \Rightarrow 2A = 1$$

$$A-B=0 \Rightarrow A=B \qquad A=\frac{1}{2}$$

$$B=\frac{1}{2}$$

$$= \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-x}+\frac{\frac{1}{2}}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| \overset{x^{\ell}}{=} \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C}}$$

$$C\in\mathbb{R}$$

2) $\int \frac{2x-3}{x^3+x^2}dx = \int \frac{2x-3}{x^2(x+1)}dx =$

$$\frac{2x-3}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$$= \frac{Ax+A \quad + Bx^2 + Bx + Cx^2}{x^2(x+1)} =$$

$$= \frac{(B+c)x^2 + (A+B)x + A}{x^2(x+1)}$$

$B+C=0$
$A+B=2$ $\Rightarrow B=2+3=5 \quad \Rightarrow C=-5$
$A=-3$

$$= \int \left(\frac{-3}{x^2} + \frac{5}{x} + \frac{-5}{x+1} \right) dx =$$

$$= -3 \int \frac{dx}{x^2} + 5 \int \frac{dx}{x} - 5 \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{-3}{-1} \frac{1}{x} + 5 \ln|x| - 5 \ln|x+1| + C =$$

$$\underline{\underline{= \frac{3}{x} + 5 \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C}} \quad ; \quad C \in R$$

3) $$\int \frac{2-x}{(x+3)(x^2+1)}\,dx =$$

$$\frac{2-x}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+1} =$$

$$= \frac{Ax^2+A+Bx^2+3Bx+Cx+3C}{(x+3)(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(3B+C)x+A+3C}{(x+3)(x^2+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ 3B+C=-1 \\ A+3C=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3B+C=-1 \\ -B+3C=2 \;/\cdot 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 10C=5 \\ C=\frac{1}{2} \Rightarrow B=3C-2=-\frac{1}{2} \\ \qquad\qquad A=\frac{1}{2} \end{array}$$

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x+3} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+3} - \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+3} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \ln|x+3| - \frac{1}{4} \ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C}} ; \; C \in R$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

4) $$\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+2x+3)}\,dx =$$

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3} =$$

$$= \frac{Ax^2+2Ax+3A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+2x+3)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(2A-B+C)x+3A-C}{(x-1)(x^2+2x+3)}$$

$$\left.\begin{aligned} A+B&=0 \\ 2A-B+C&=1 \\ 3A-C&=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 3A+C&=1 \\ 3A-C&=3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 6A&=4 \\ A&=\frac{2}{3} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} C&=1-3A=-1 \\ B&=-\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$= \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{2}{3}x - 1}{x^2+2x+3} \right) dx =$$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{2x+3}{x^2+2x+3} dx =$$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln\left(x^2+2x+3\right) - \frac{\sqrt{2}}{6} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C}}$$

$$C \in R$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{1}{x^2+2x+1-1+3}\,dx =$$

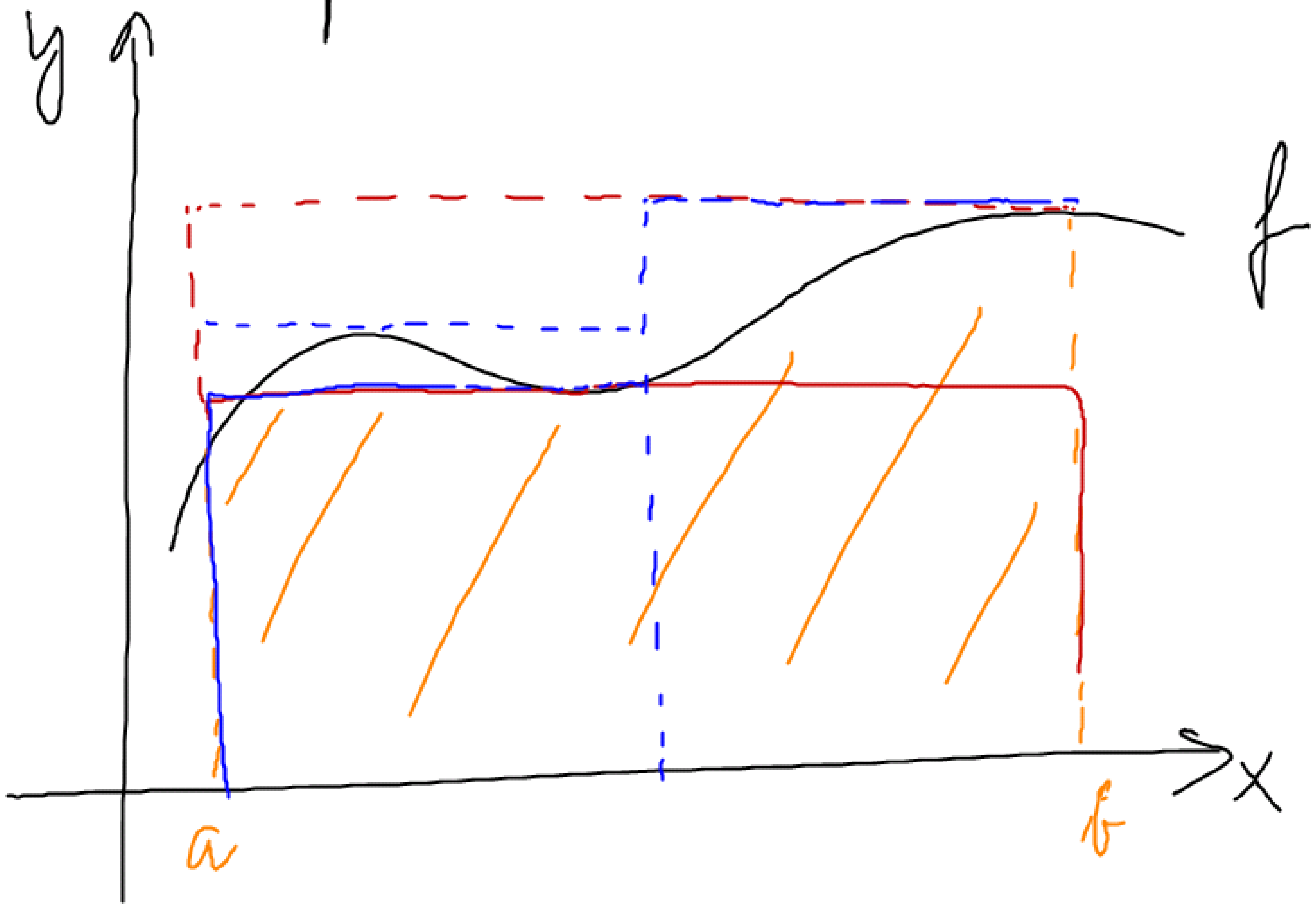
$$= \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{2}+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

Určitý integrál

Motivace: výpočet obsahu plochy pod grafem fce

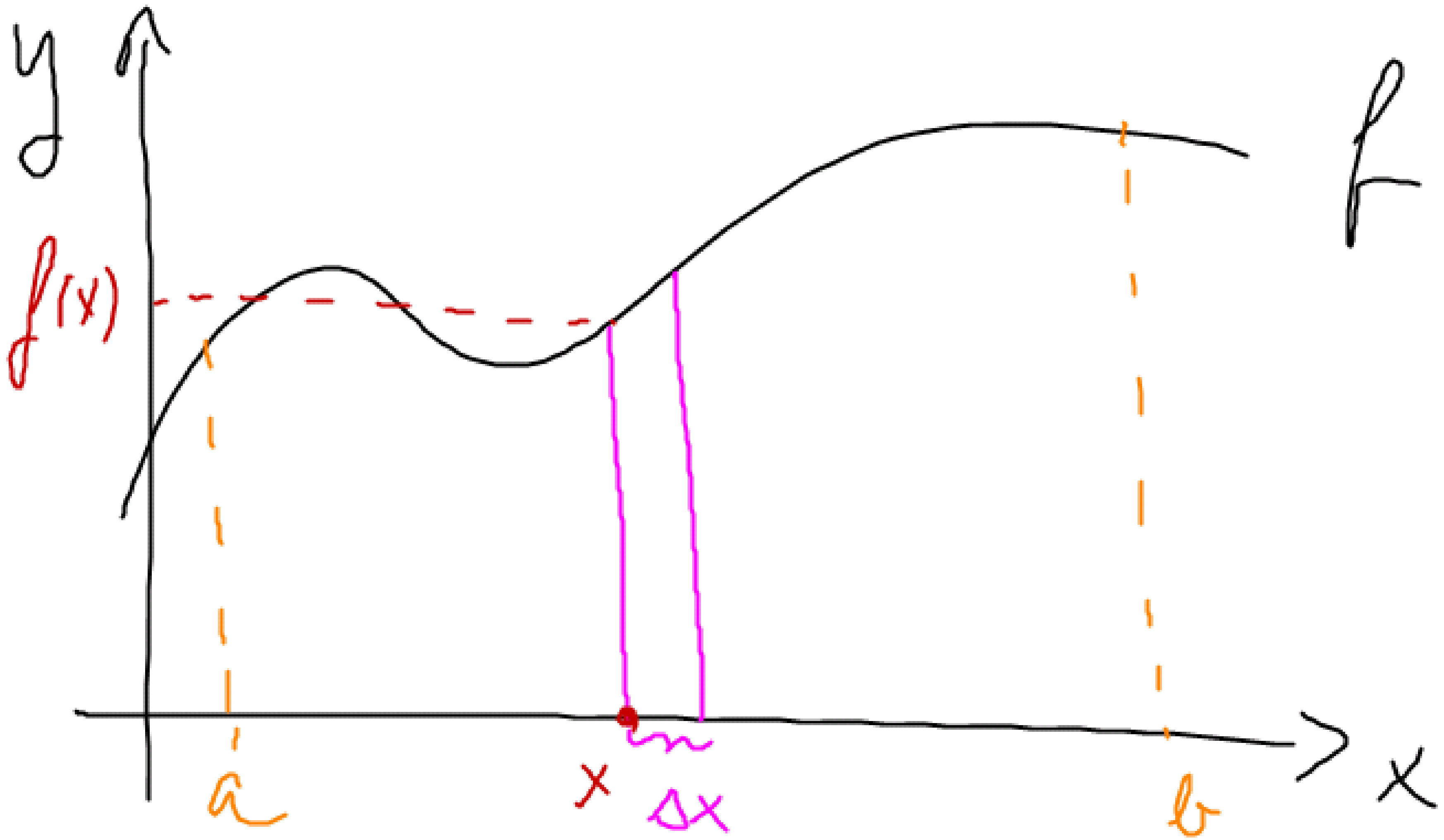


postup: odhad pomocí obsahu obdélníků

$$S_{\square} \leq S \leq S_{\text{⬚}}$$

$$\sum S_{\square} \leq S \leq \sum S_{\text{⬚}}$$

rostoucí počet dělení ⇒ klesá chyba měření $\underline{S}$



$\Delta x \to 0^+ \Rightarrow$ druhá strana obdélníka je $\underline{f(x)}$

$$\Rightarrow S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

aplikace $\Delta x \to 0^+ \Rightarrow$

- $n \to \infty$
- součet je nutné nahradit INTEGRÁLEM

korektní defce: nutno rozšířit PF na

UZAVŘENÝ INTERVAL

- derivace $F'(a)$ je derivace ZPRAVA
- derivace $F'(b)$ je derivace ZLEVA
- PF na $(c;d)$ tak, že $\langle a;b\rangle \subset (c;d)$

D Nechť $\underline{F}$ je PF k fci f v intervalu $\langle a;b\rangle$.

Rozdíl FUNKČNÍCH HODNOT $F(b)-F(a)$ se nazývá URČITÝ INTEGRÁL FUNKCE f v mezích od $\underline{a}$ do $\underline{b}$ a značí se $\int_a^b f(x)\,dx$.

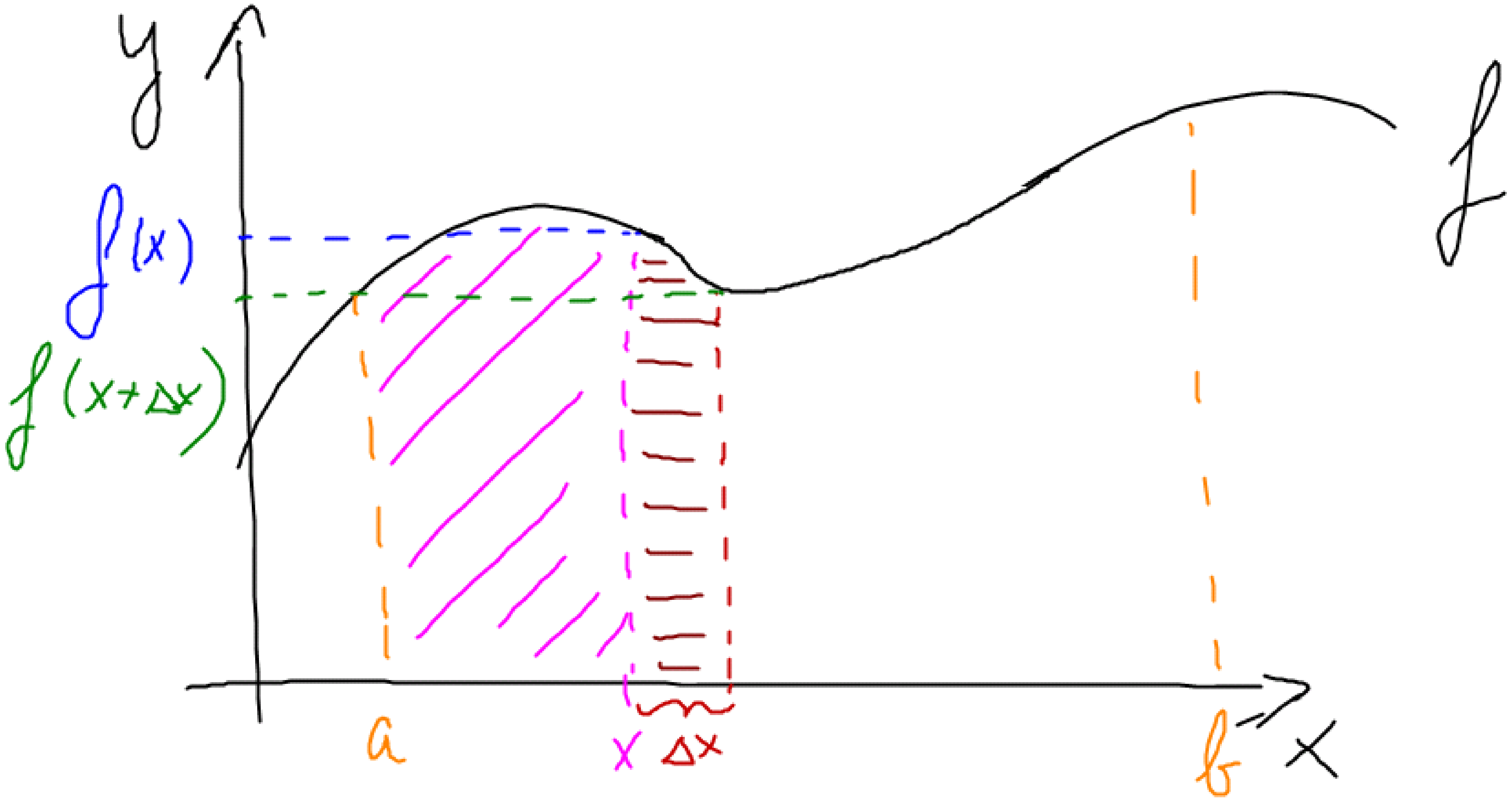
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

obecně: $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x)$$

a – dolní mez

b – horní mez

Plocha jako rozdíl $F(b)-F(a)$



zájem o plochu $\underline{S(x)}$; vlastnosti: $S(a)=0$
$S(b)=S$

$\underline{\Delta S(x)}$ při změně $\underline{x}$ o $\underline{\Delta x} = ?$

$$\Delta S = S(x+\Delta x) - S(x)$$

$$f(x+\Delta x)\cdot\Delta x \leq \Delta S(x) \leq f(x)\cdot\Delta x \qquad / : \Delta x$$

minimalizace chyby: $\Delta x \to 0 \Rightarrow x+\Delta x \to x$

$f(x+\Delta x) \to f(x)$

$$f(x+\Delta x) \leq \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \leq f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

$$\frac{dS(x)}{dx} = f(x)$$

$$S(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

poč. podmínky: $S(a)=0$

$$F(a)+C=0$$

$$C=-F(a)$$

$$S(x)=F(x)-F(a)$$

$$S(b)=S$$

$$\dashrightarrow \underline{F(b)-F(a)=S}$$

Vlastnosti určitého integrálu

1, Nechť $f_1(x)$ a $f_2(x)$ jsou funkce spojité v určitém intervalu $\underline{I}$ a $\underline{a}$ a $\underline{b}$ nechť jsou body z tohoto intervalu a $\underline{c_1}$ a $\underline{c_2}$ reálné konstanty. Pak platí:

$$\int_a^b \left(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right) dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\,dx$$

2, $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

3) Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ spojité funkce v intervalu $\langle a; b \rangle$ a je-li $f(x) \geq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a; b \rangle$, pak $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

(viz výpočet obsahu plochy)

4) (aditivnost určitého integrálu)

Je-li fce $f(x)$ spojitá v intervalu I, který obsahuje libovolně položené body a, b, c, pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

5) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

viz 2, a 5,

Vypočtěte:

1) $$\int_{-3}^{2}(x^2+2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-3}^{2} =$$

$$= \frac{2^3}{3}+2\cdot 2-\left(\frac{(-3)^3}{3}+2\cdot(-3)\right)=$$

$$=\frac{8}{3}+4+9+6=\underline{\underline{\frac{65}{3}}}$$

2) $$\int_{0}^{2\pi}\cos x\,dx = \left[\sin x\right]_{0}^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = \underline{\underline{0}}$$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\,dx < 0$ + symetrie

$S = 0$

Substituce v určitém integrálu

- analogicky jako v neurčitém integrálu
- POZOR!! na meze ⇐ substitucí

se mění meze integrálu

□ $\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ ... výpočet s $\underline{t}$,

vrátím se k $\underline{x}$ a použijeme meze $\underline{a}$, $\underline{b}$

□ $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$

Vypočtěte:

1) $$\int_0^1 e^{2x}\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - e^0\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(e^2-1)}}$$

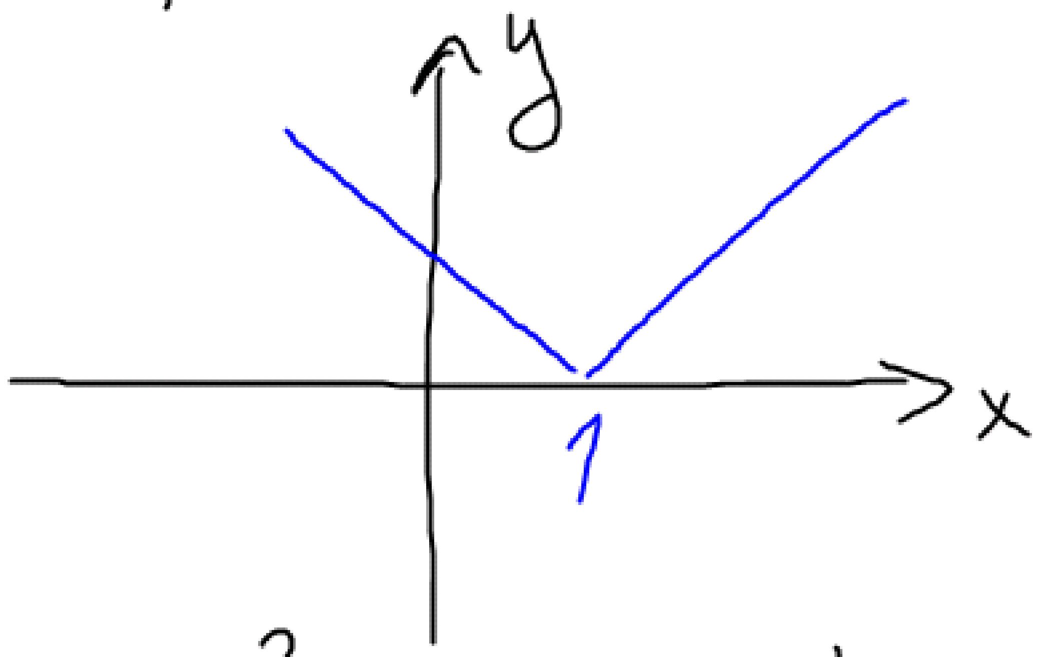
2) $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{1}{t}\,dt = \left[\ln|t|\right]_\alpha^\beta =$$

$$= \left[\ln|1+\sin x|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln\left|1+\sin\frac{\pi}{3}\right| - \ln\left|1+\sin\frac{\pi}{6}\right| =$$

$$= \ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \underline{\underline{\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}\right)}}$$

$t = 1+\sin x \qquad \frac{dt}{dx} = \cos x$

3) $\int_{-4}^{2} |3x-3|\,dx = 3\int_{-4}^{2} \underline{|x-1|}\,dx =$



$$= 3\left(\int_{-4}^{1}(-x+1)\,dx + \int_{1}^{2}(x-1)\,dx\right) =$$

$$= 3\left(\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{1} + \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{1}^{2}\right) =$$

$$= 3\left(1-\frac{1}{2}+4+\frac{16}{2}+\frac{4}{2}-2-\frac{1}{2}+1\right) = 13\cdot 3 = \underline{\underline{39}}$$

4) $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin x \, dx = - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos^2 x \cdot (-\sin x) dx =$$

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} t^2 dt = - \left[\frac{t^3}{3} \right]_{\alpha}^{\beta} = - \left[\frac{\cos^3 x}{3} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} =$$

$$= - \frac{1}{3} \left(\cos^3 \pi - \cos^3 \frac{\pi}{3} \right) = - \frac{1}{3} \left(-1 - \frac{1}{8} \right) = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

Per partes v určitém integrálu

analogicky jako u neurčitého integrálu

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = \left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\, dx$$

Vypočtěte:

$$1,\ \int_{\frac{e}{3}}^{1} \frac{\ln(3x)}{4x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(3x) & u' = \frac{1}{3x}\cdot 3 = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{4x^2} & v = -\frac{1}{4x} \end{array} \right| =$$

$$= -\left[\frac{\ln(3x)}{4x}\right]_{\frac{e}{3}}^{1} + \int_{\frac{e}{3}}^{1} \frac{1}{4x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\left[\frac{\ln(3x)}{x}\right]_{\frac{e}{3}}^{1} - \left[\frac{1}{x}\right]_{\frac{e}{3}}^{1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\ln 3 - \frac{\ln e}{\frac{e}{3}} + 1 - \frac{1}{\frac{e}{3}}\right) = -\frac{1}{4}\left(\ln 3 + 1 - \frac{3}{e}(1+1)\right) =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{4}\left(\ln 3 + 1 - \frac{6}{e}\right)}}$$

2) $\int_0^{\pi} (2x-3)\sin x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = 2x-3 & u' = 2 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| =$

$$= -\left[(2x-3)\cos x\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} \cos x\,dx =$$

$$= \left[-(2x-3)\cos x + 2\sin x\right]_0^{\pi} =$$

$$= -(2\pi-3)\cdot\cos\pi + 2\sin\pi + (2\cdot 0-3)\cdot\cos 0 - 2\cdot\sin 0 =$$

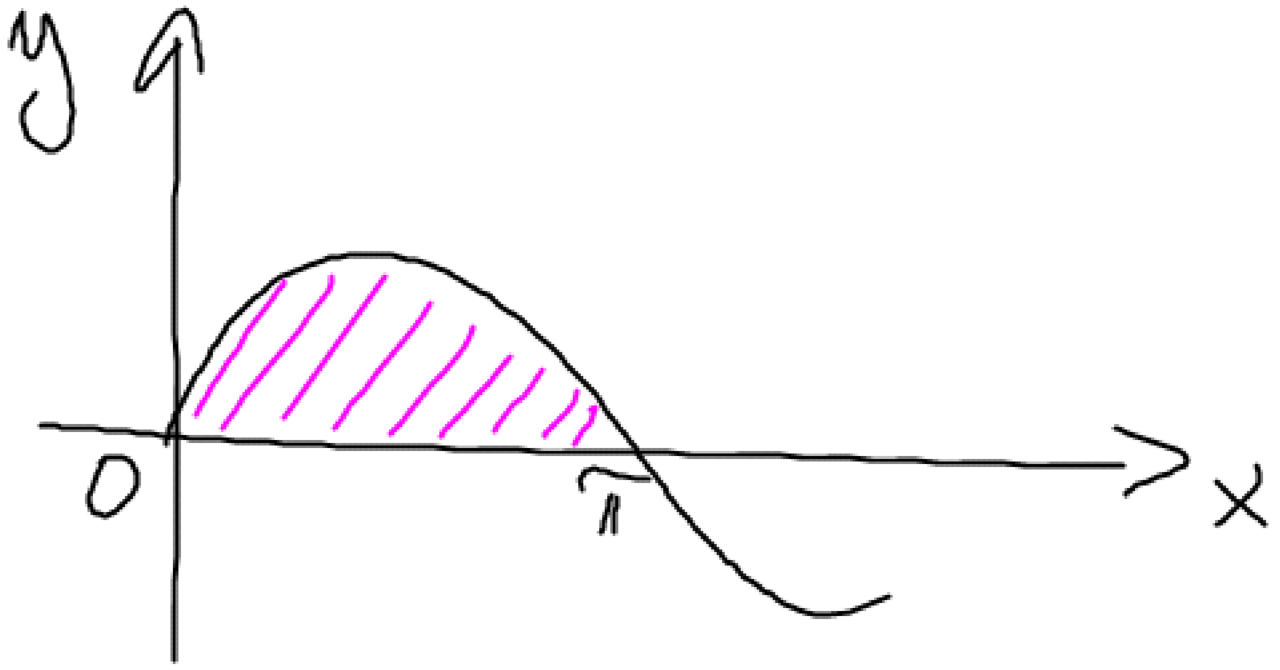
$$= 2\pi - 3 + 0 - 3 - 0 = \underline{\underline{2\pi - 6}}$$

Aplikace

I.) Obsah ploch

- nakreslit
- zvolit metodu výpočtu
  - 1 integrál (~ 1 plocha)
  - 2 integrály (~ rozdíl ploch)
  - několik integrálů (~ skládání ploch)

1) Obsah plochy pod „jedním obloukem" fce $y = \sin x$.



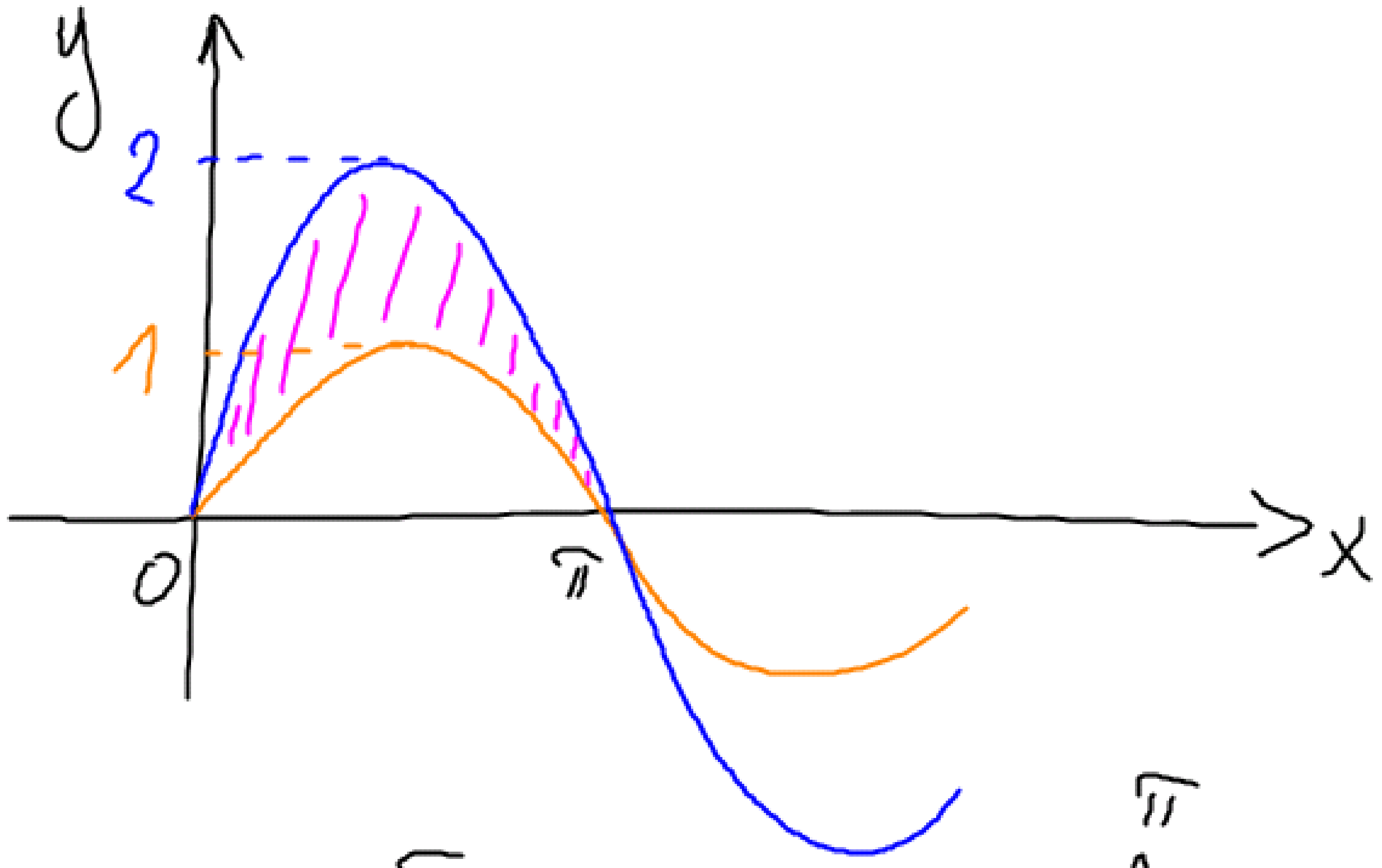
$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx =$$

$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi} =$$

$$= -(\cos \pi - \cos 0) = \underline{\underline{2\ j^2}}$$

2, Obsah plochy ohraničené křivkami

$y = \sin x$ a $y = 2\sin x$ („jeden oblouk")



$$S = \int_0^\pi 2\sin x\,dx - \int_0^\pi \sin x\,dx = \int_0^\pi \sin x\,dx = \underline{\underline{2\,j^2}}$$

3, Obsah plochy ohraničené křivkami

$$y = x^2 - 4x + 2 \quad a \quad y = -x^2 + 6x - 6.$$

Vrcholy:

$V_1 = [2;-2]$

$$y = x^2 - 4x + 2 = x^2 - 4x + 4 - 4 + 2 = (x-2)^2 - 2$$

$$y = -x^2 + 6x - 6 = -(x^2 - 6x + 9 - 9 + 6) = -(x-3)^2 + 3$$

$V_2 = [3;3]$

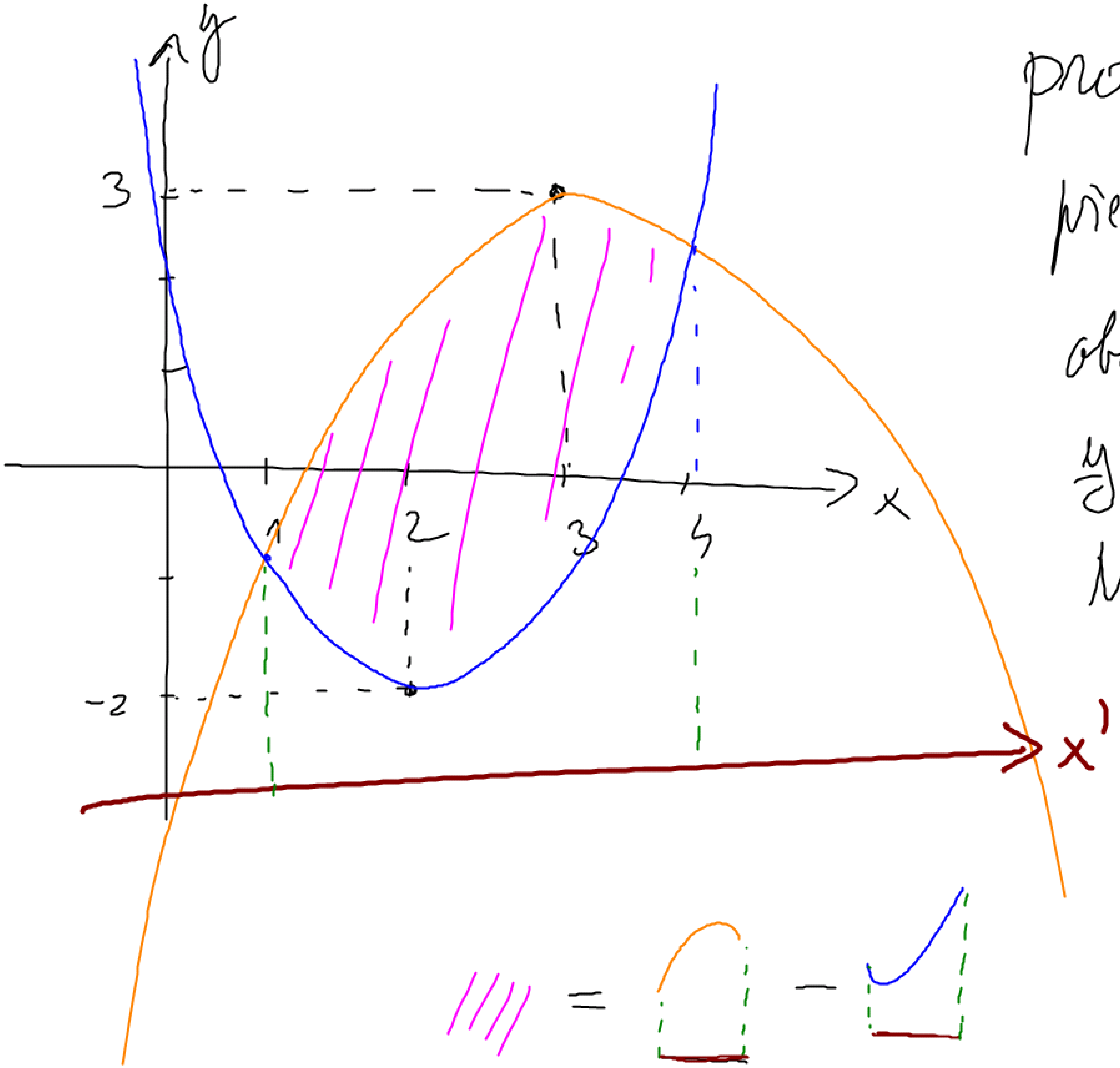
průsečíky: $x^2 - 4x + 2 = -x^2 + 6x - 6$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-4)(x-1) = 0$$

$x_1 = 1$ $\qquad$ $x_2 = 4$



pro žáky lepší
představa: posunout
obě křivky po ose
y minimálně o 2
NAHORU ⇒ nové osy

$$S = \int_1^4 (-x^2+6x-6+p)\,dx - \int_1^4 (x^2-4x+2+p)\,dx =$$

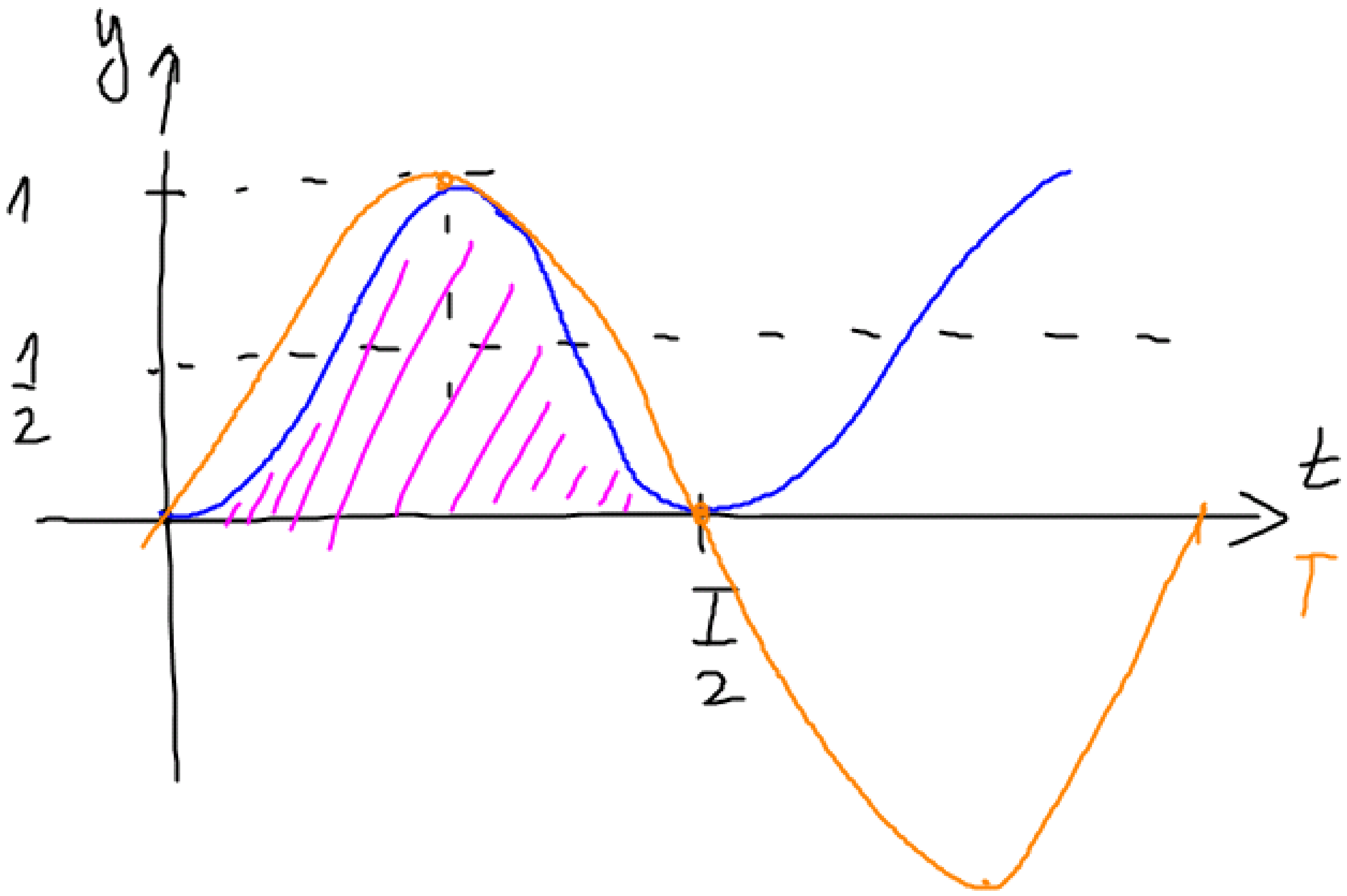
$$= \int_1^4 (-2x^2+10x-8)\,dx = \left[-\frac{2x^3}{3}+5x^2-8x\right]_1^4 =$$

$$= -\frac{128}{3}+80-32+\frac{2}{3}-5+8 = \frac{9}{0}\,{}^{:2}$$

4) Obsah plochy pod grafem fce $y = \sin^2 \omega t$ pro $t \in \langle 0; \frac{T}{2} \rangle$.

$$\underline{\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}}$$

$\times$ $y = \sin \omega t$



$$S = \int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2 \omega t \, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{2} \right) dt =$$

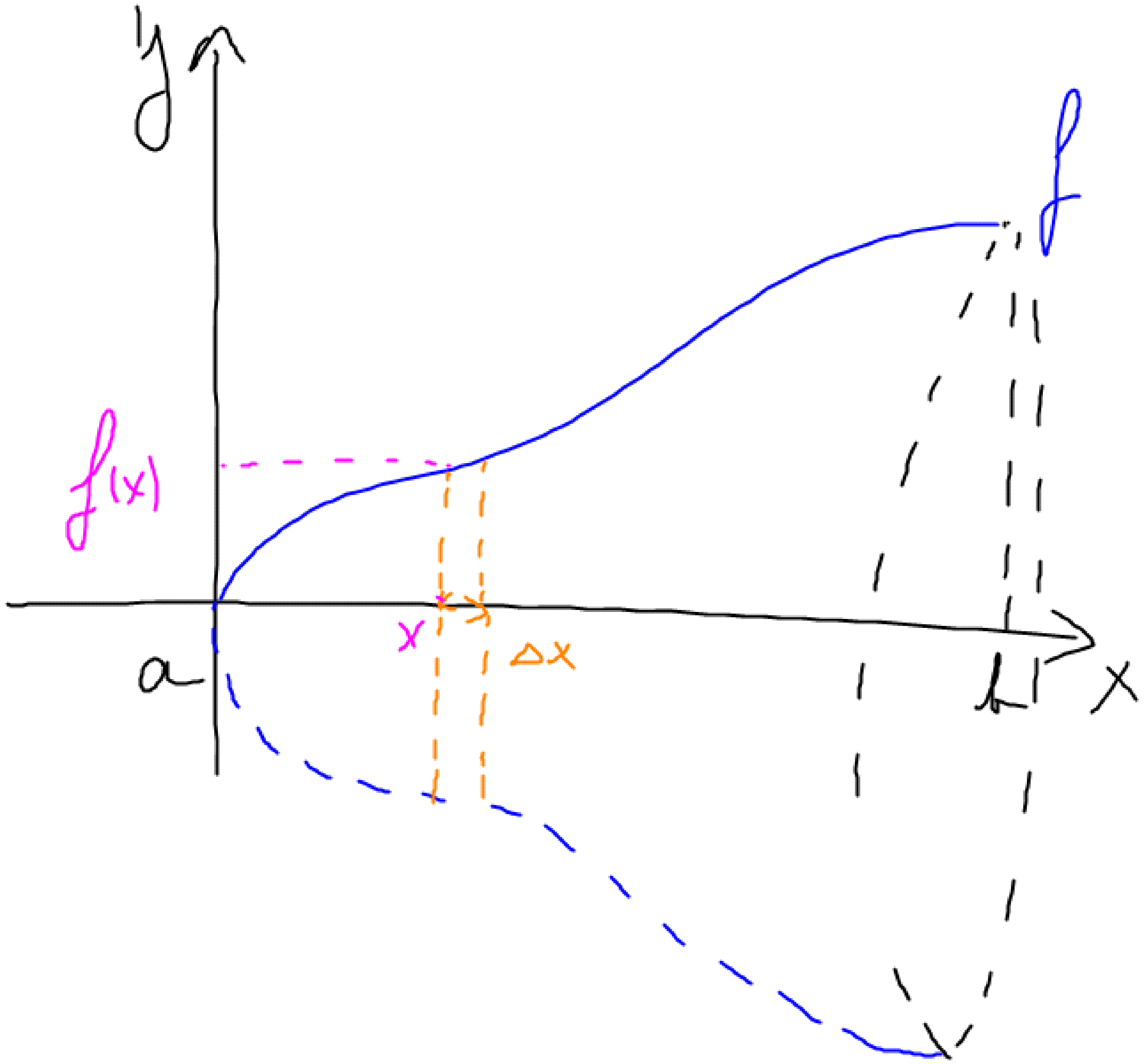
$$= \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{T}{2} - \frac{\sin\left(\cancel{2}\cdot\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cdot\frac{\cancel{T}}{\cancel{2}}\right)}{2\,\frac{2\pi}{T}} - 0 + \frac{\sin(2\pi\cdot 0)}{2\,\frac{2\pi}{T}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(T - 0\right) = \underline{\underline{\frac{T}{4}}}$$

na celé periodě je to jlo $\underline{\underline{\frac{T}{2}}}$

II. Objem rotačních těles



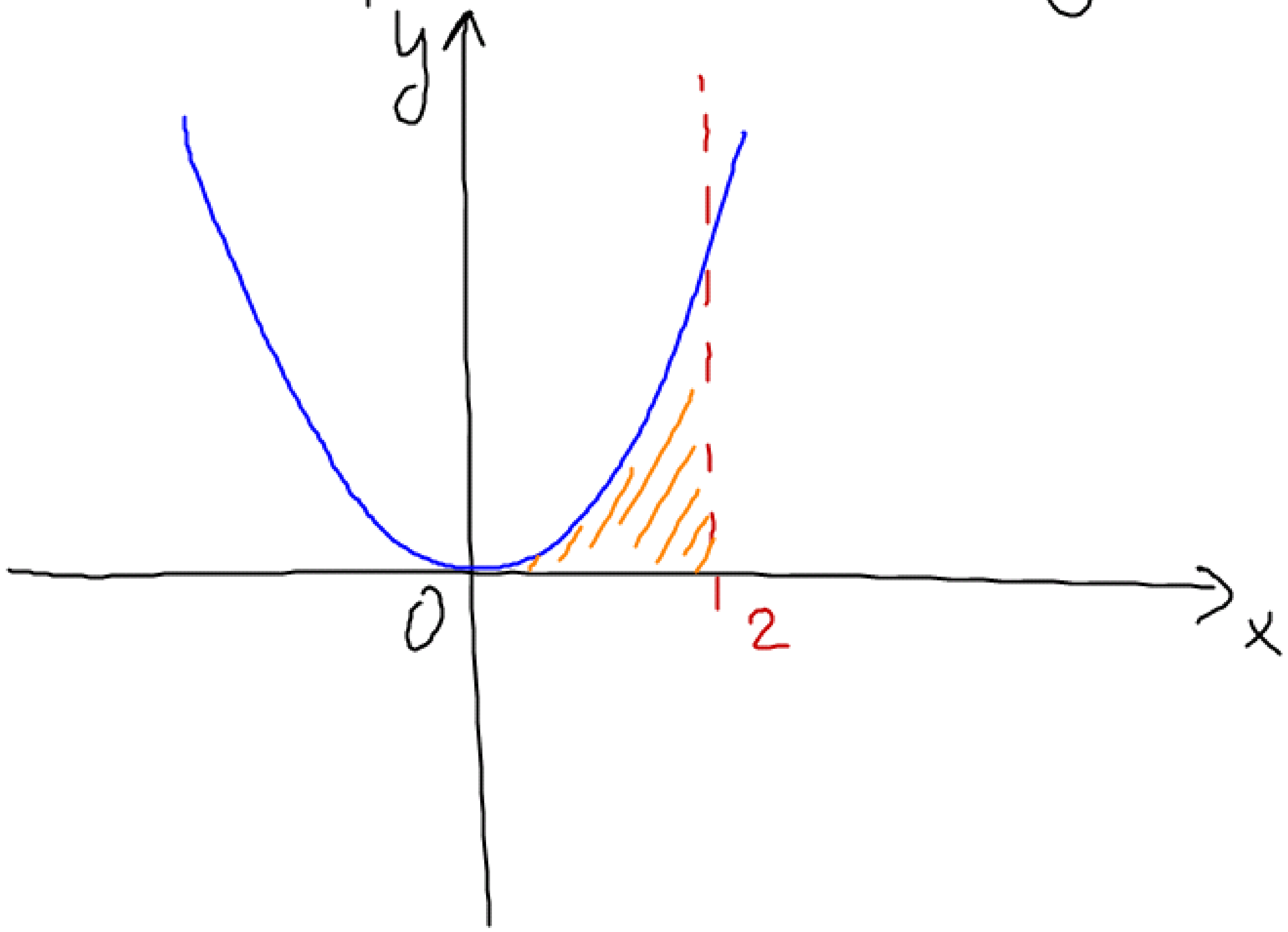
··· rotuje kolem $\underline{x}$

postup ~ hledání
$\underline{\Sigma}$ pod křivkou,
zde: místo obdélníků
uvažujeme válce :

$r = f(x)$, $v = \Delta x$

$$V_{\text{válce}} = \pi r^2 v \Rightarrow \underline{\underline{V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx}}$$

1) Objem tělesa: $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$ kolem $\underline{x}$.

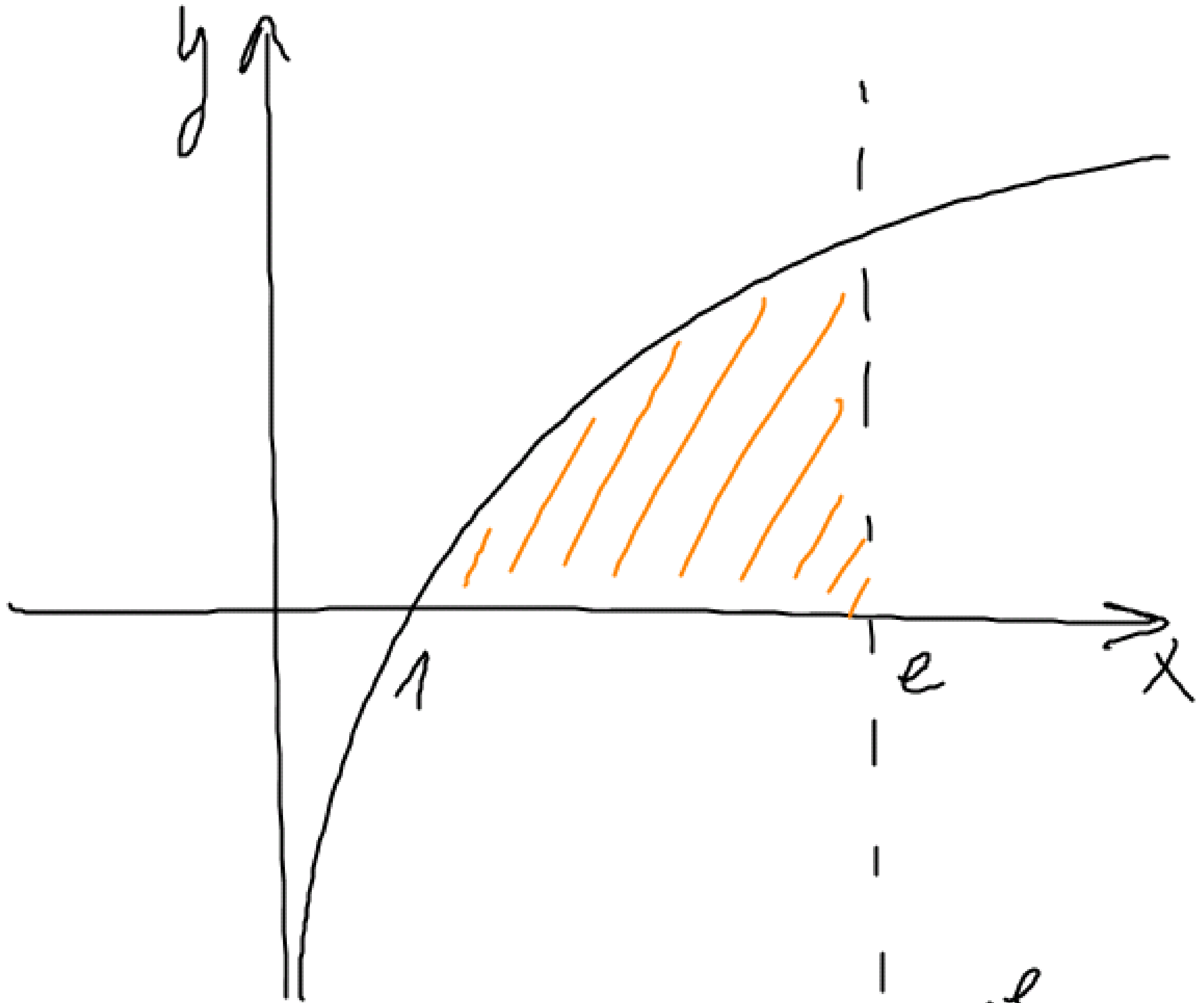


$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 \, dx =$$

$$= \pi \int_0^2 x^4 \, dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32}{5}\pi \; j^3$$

2, Objem tělesa: $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ kolem $\underline{x}$.



$$V = \pi \int_1^e \ln^2 x \, dx =$$

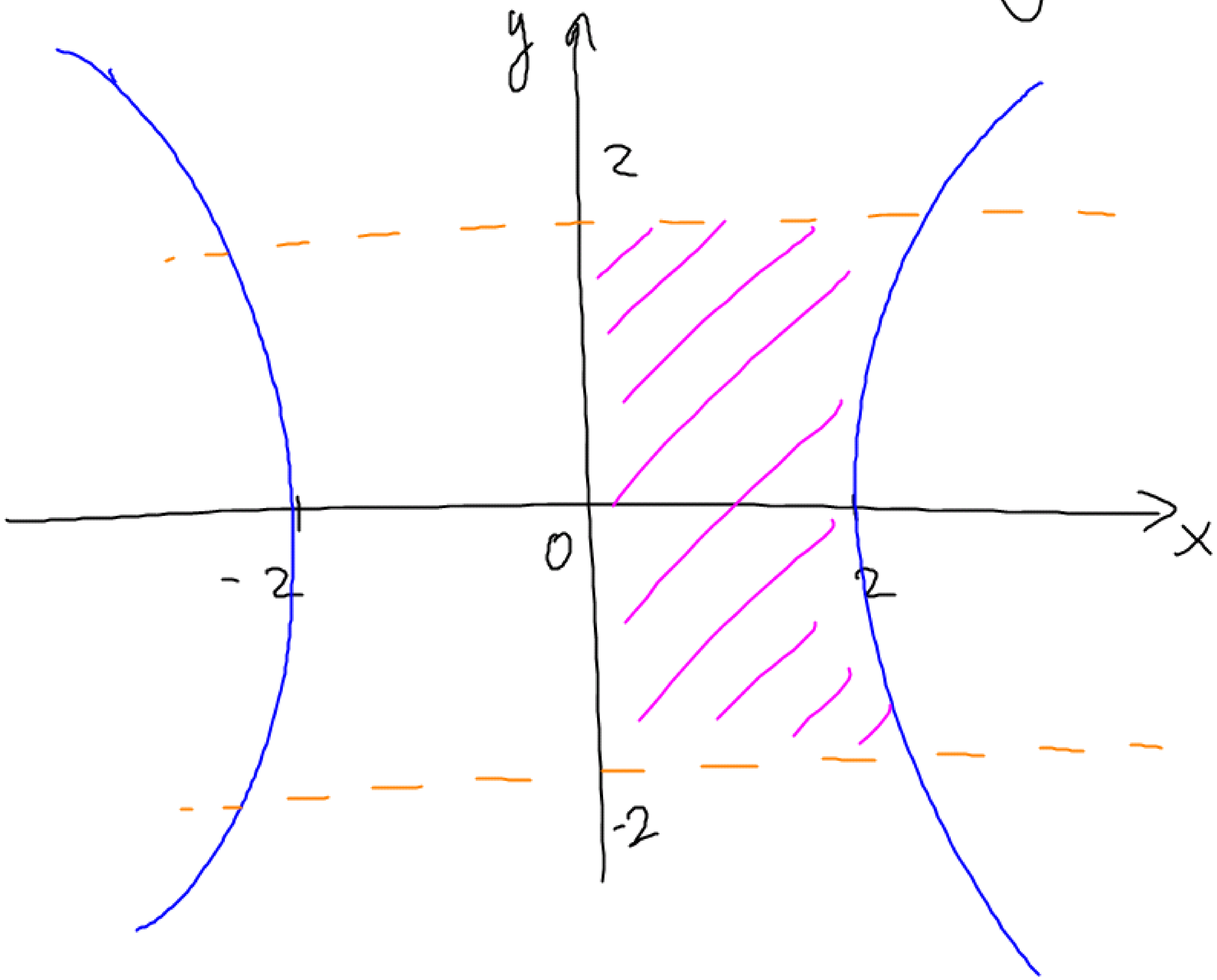
$$= \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \frac{2\ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| =$$

$$= \pi \left(\left[x \ln^2 x \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln x \, dx \right) = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| =$$

$$= \pi \left(\left[x \ln^2 x \right]_1^e - 2 \left[x \ln x \right]_1^e + 2 \int_1^e dx \right) = \pi \left[x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \right]_1^e =$$

$$= \pi (e \ln^2 e - 2e \ln e + 2e - \ln^2 1 + 2 \ln 1 - 2) = \underline{\underline{\pi (e-2) \, j^3}}$$

3, Objem tělesa : $x^2 - y^2 = 4$, $y = 2$, $y = -2$ kolem y



$$V = \pi \int_{-2}^{2} x^2 \, dy =$$

$$= 2\pi \int_{0}^{2} x^2 dy =$$

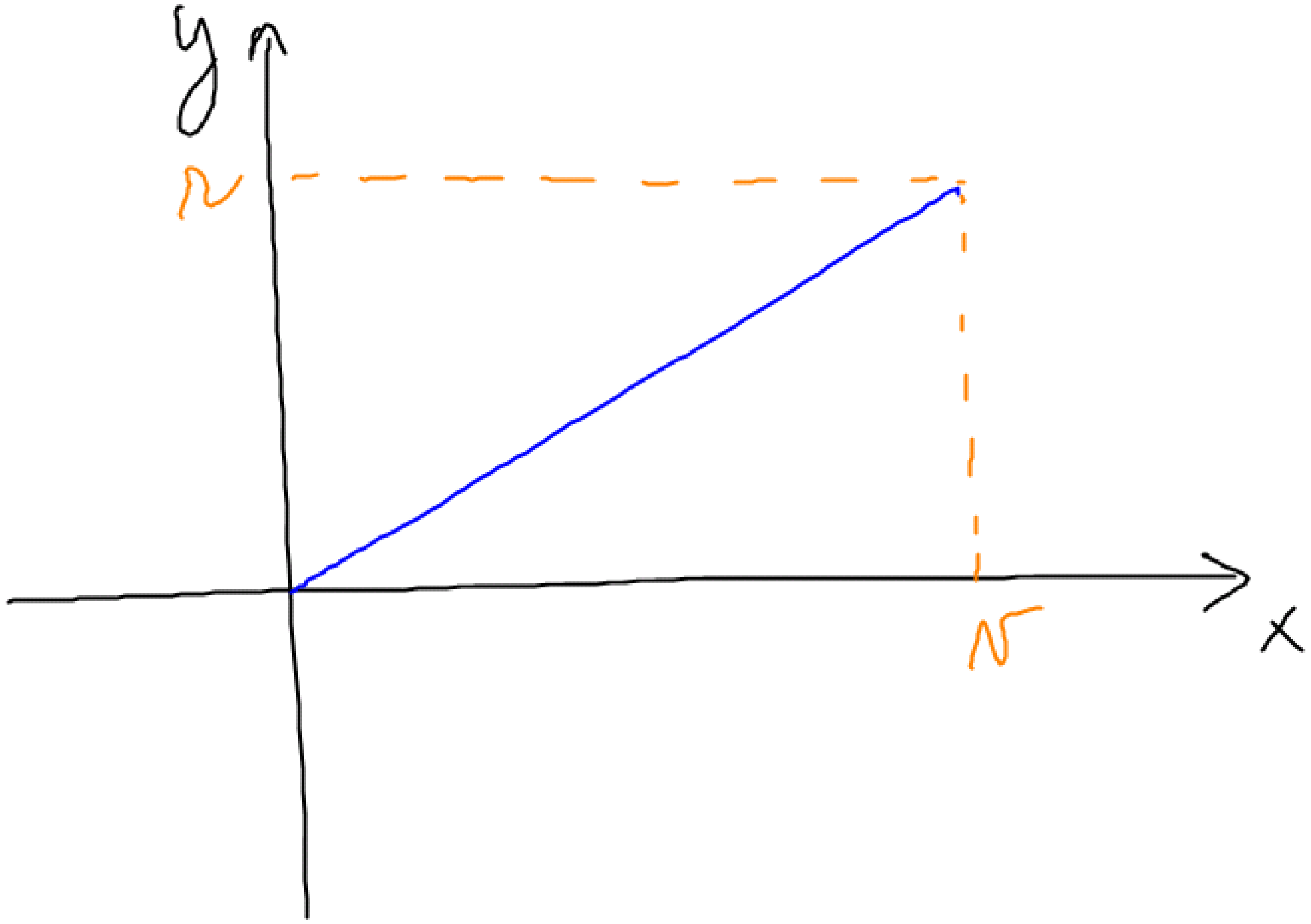
$$= 2\pi \int_{0}^{2} (4 + y^2) dy =$$

$$= 2\pi \left[4y + \frac{y^3}{3} \right]_0^2 =$$

$$= 2\pi \left(8 + \frac{8}{3} - 0 \right) =$$

$$\underline{\underline{= \frac{64}{3}\pi \quad j^3}}$$

4) Odvoďte vztah pro výpočet objemu rotačního kužele s výškou $\underline{v}$ a poloměrem podstavy $\underline{r}$.



$$y = kx = \frac{r}{v}x$$

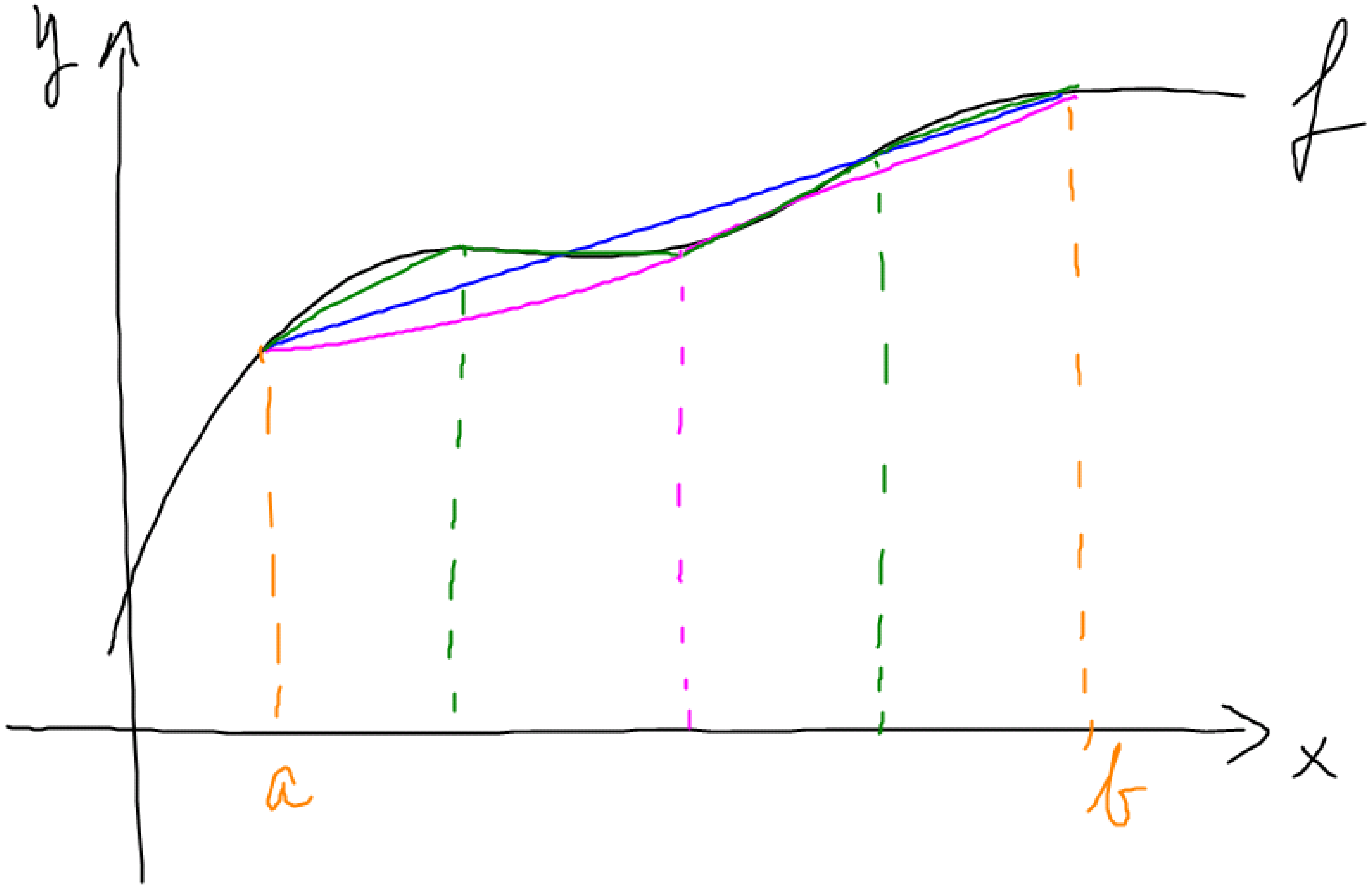
$$V = \pi \int_0^v y^2 \, dx =$$

$$= \pi \int_0^v \left(\frac{r}{v}x\right)^2 dx =$$

$$= \pi \frac{r^2}{v^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v =$$

$$= \pi \frac{r^2}{v^2} \cdot \frac{v^3}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi r^2 v}}$$

III. Délka křivky



postup ~ hledání $\underline{S}$ pomocí lomené čáry

$$l(x) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

- $\Delta x \to 0$
- „součet"

$$\Rightarrow l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

1) Délka „oblouku" křivky $f: y = \ln \sin x$; $x \in \langle \frac{\pi}{3} ; \frac{2}{3}\pi \rangle$

$$f' : y = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}}\, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}\, dx =$$

$$= \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)'$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} = \boxed{\frac{1}{2}} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \boxed{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{t}\, dt =$$

$$= \left[\ln|t| \right]_{\alpha}^{\beta} = \left[\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \ln \sqrt{3} - \ln \frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$$= \underline{\underline{\ln 3}}$$

2, Délka křivky $g: y = \ln(1-x^2)$; $x \in \langle 0; \frac{1}{2} \rangle$

$$g' : y = \frac{-2x}{1-x^2}$$

$$l = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2}}\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+2x^2+x^4}{(1-x^2)^2}}\, dx = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{\frac{1}{2}}} \sqrt{\left(\frac{1+x^2}{\underbrace{1-x^2}_{\rightarrow 0}}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-x^2}{1-x^2} + \frac{2x^2}{1-x^2}\right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+2x+x^2}{1-x^2} - \frac{2x}{1-x^2}\right) dx =$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x}{1-x}\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{2}{1-x^2}\right)dx \quad \text{(vydělení)} \quad =$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{(1-x)(1+x)}\,dx=-\left[x\right]_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx=$$

$A(1+x)+B(1-x)=A+B+x(A-B)$

$A+B=2 \Rightarrow A=B=1$

$A-B=0$

$$=\left[-x-\ln|1-x|+\ln|1+x|\right]_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}+0+\ln 1-\ln 1=\underline{\underline{\ln 3-\frac{1}{2}}}$$

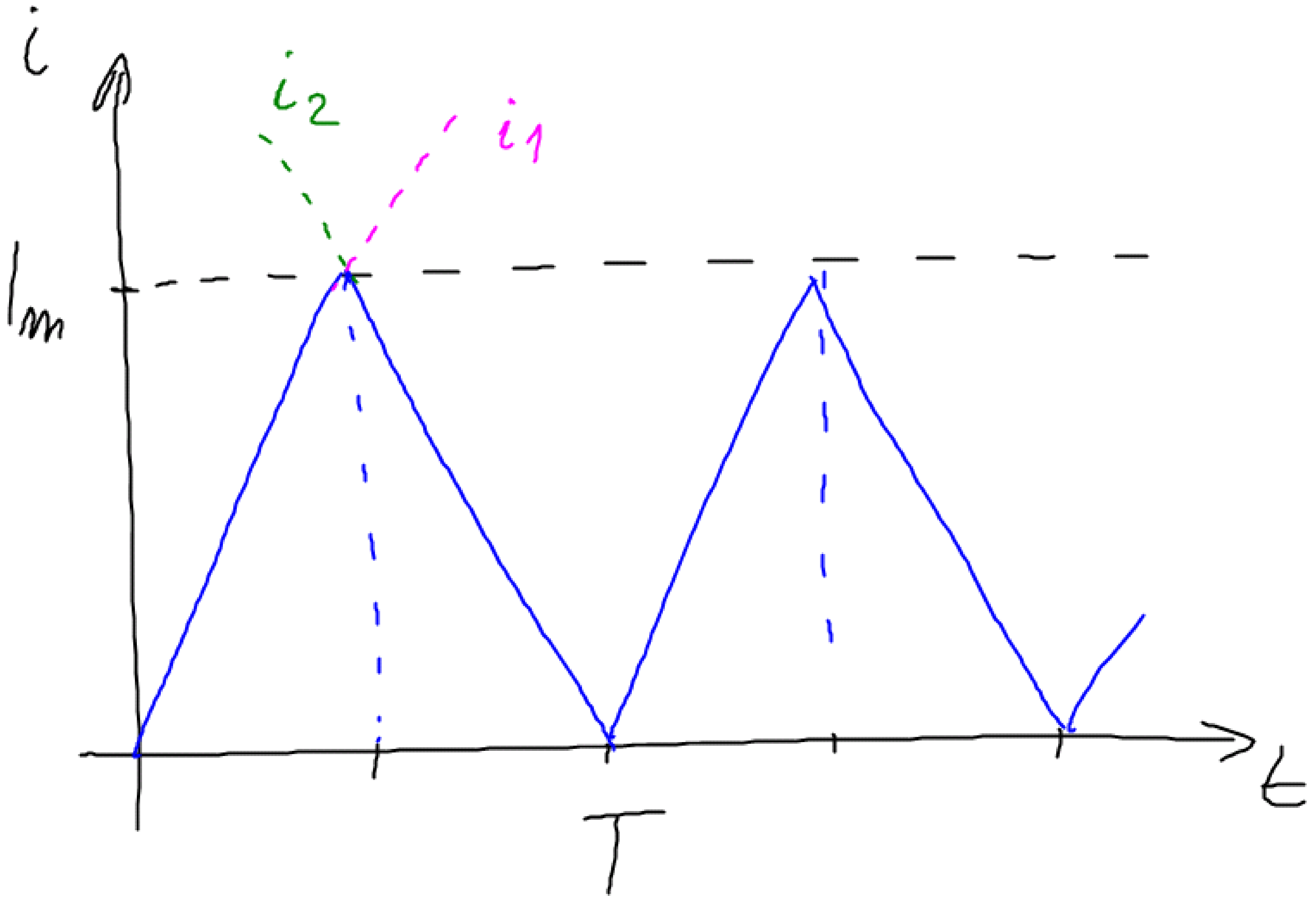
IV. Průběh el. proudu

Proud tekoucí rezistorem o odporu 100 Ω má trojúhelníkový průběh. Určete:

a) střední hodnotu el. proudu;

b) efektivní hodnotu el. proudu;

c) průměrný výkon.



$I_m = 2\ A$

$T = 0{,}2\ s$

a)

střední hodnota:

- DISKRÉTNÍ VELIČINA (průměr): $X_p = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$
- SPOJITÁ VELIČINA: $\overline{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$

$$i_1: \; i = \frac{I_m}{\frac{T}{2}}\, t$$

$$\underline{i = \frac{2I_m}{T}\, t}$$

$$i_2: \; i = -\frac{2I_m}{T} t + b$$

$$i(T) = 0$$

$$\to 0 = -\frac{2I_m}{T} \cdot T + b$$

$$b = 2I_m$$

$$\underline{i_2: \; i = -\frac{2I_m}{T} t + 2I_m}$$

$$\bar{i} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} i_1(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} i_2(t)\,dt$$

symetrie grafu: $\bar{i} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} i_1(t)\,dt =$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2I_m}{T} t\,dt = \frac{2}{T}\cdot\frac{2I_m}{T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{4 I_m}{T^2} \left(\frac{\frac{T^2}{4}}{2} - 0 \right) = \frac{4 I_m}{T^2} \cdot \frac{T^2}{8} = \underline{\underline{\frac{I_m}{2}}}$$

b) $W = Q = U_e I_e t$

obvod s REZISTOREM: $Q = \underbrace{I_e^2 R t}$ ZA PERIODU

totéž musíme dostat z proměnného průběhu $\underline{i}$ a $\underline{u}$:

$$Q = \int_0^T u i \, dt = \int_0^T i^2 R \, dt$$

$$Q = R\int_0^{\frac{T}{2}} i_1^2\,dt + R\int_{\frac{T}{2}}^{T} i_2^2\,dt =$$

$$= R\left(\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{2I_m}{T}t\right)^2 dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T}\left(-\frac{2I_m}{T}t + 2I_m\right)^2 dt\right) =$$

$$= 4I_m^2 R\left(\frac{1}{T^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{T}{2}} + \left[\frac{\left(-\frac{t}{T}+1\right)^3}{3\left(-\frac{1}{T}\right)}\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\right) =$$

$$= 4I_m^2 R\left(\frac{1}{T^2}\,\frac{\frac{T^3}{8}}{3} - 0 + \underset{0}{\cancel{\frac{\left(-\frac{T}{T}+1\right)^3}{-\frac{3}{T}}}} - \frac{\left(-\frac{\frac{T}{2}}{T}+1\right)^3}{-\frac{3}{T}}\right)$$

$$= 4I_m^2 R\left(\frac{T}{24} + T\cdot\frac{1}{24}\right) = \frac{1}{3}I_m^2 R T$$

$$\sqcup \Rightarrow I_e^2 R T = \frac{1}{3} I_m^2 R T$$

$$I_e = \frac{I_m}{\sqrt{3}}$$

$$\underline{\underline{I_e = \frac{\sqrt{3}}{3} I_m}}$$

c) $$P = \frac{Q}{t} = \frac{I_e^2 R T}{T} = I_e^2 R = \underline{\underline{\frac{I_m^2 R}{\textcircled{3}}}} \longleftarrow$$ průběh el. proudu

STŘÍDAVÝ PROUD: $I_e = \frac{\sqrt{2}}{2} I_m$

$$P = \frac{I_m^2 R}{2}$$

V. FOURIEROVA TRANSFORMACE

popis PERIODICKÉHO průběhu (zvuk, el. signál, ...) pomocí HARMONICKÝCH SLOŽEK (tj. pomocí $\cos(n\omega t)$ a $\sin(n\omega t)$; $n \in \mathbb{N}$)

periodický průběh:

$$y = y_{m1}\sin(\omega t+\varphi_1) + y_{m2}\sin(2\omega t+\varphi_2) +$$

$$+ y_{m3}\sin(3\omega t+\varphi_3) + \cdots =$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$= \underline{y_{m1}}\,\uwave{\sin\omega t}\cdot\underline{\cos\varphi_1} + \underline{y_{m1}}\,\uwave{\cos\omega t}\cdot\underline{\sin\varphi_1} + \underline{y_{m2}}\,\uwave{\sin(2\omega t)}\,\underline{\cos\varphi_2} + \underline{y_{m2}}\,\uwave{\cos(2\omega t)}\cdot\underline{\sin\varphi_2} + \ldots =$$

$\underline{\quad}$ konst.

$\sim$ záleží na $\underline{t}$

$$= a_0 + a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots$$

posun po ose y

FOURIEROVA ŘADA

Fourierův nápad: násobit JEDNOU KONKRÉTNÍ HARM. SLOŽKOU

např. $n = 3$; $\cos(3\omega t)$

$$y\cos(3\omega t) = a_0\cos(3\omega t) + a_1\cos\omega t\cdot\cos(3\omega t) + b_1\sin\omega t\cdot\cos(3\omega t) + \dots$$

postup:

- určit střední hodnoty $\cos(n\omega t)\cdot\cos(m\omega t)$, $\sin(n\omega t)\cos(m\omega t), \dots$
- určit $a_0, a_1, a_2, \dots ; b_1, b_2, \dots$

---

platí: $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$

---

v řadě jsou členy:

- $\cos(3\omega t) \longrightarrow$ stř. hodnota: 0
- $\cos(\omega t)\cdot\cos(3\omega t) = \frac{1}{2}\left(\overset{0}{\cos(4\omega t)} + \overset{0}{\cos(2\omega t)}\right)$
- $\sin(\omega t)\cdot\cos(3\omega t) = \frac{1}{2}\left(\sin(4\omega t) + \sin(-2\omega t)\right)$

$$\vdots \quad \cos(3\omega t)\cos(3\omega t) = \frac{1}{2}\Big(\cos(6\omega t) + \overbrace{\cos 0}^{1}\Big)$$

... střední hodnota je: $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}a_3 = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\cos(3\omega t)\,dt$$

$$a_3 = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos(3\omega t)\,dt$$

$$\Downarrow$$

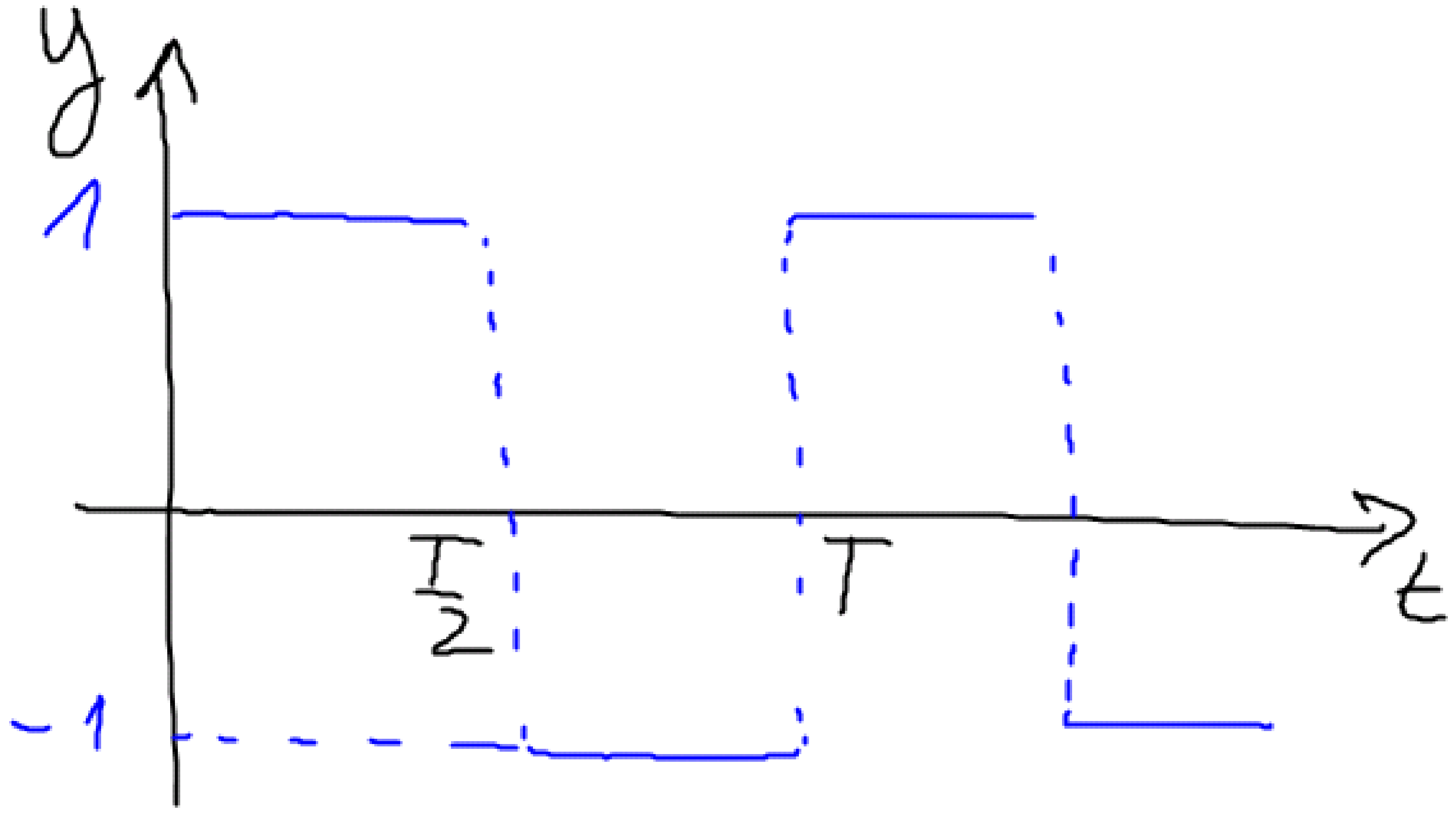
$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cdot\cos(n\omega t)\,dt} \qquad n = 0,1,2,\dots$$

analogicky: $$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cdot\sin(n\omega t)\,dt} \qquad n = 1,2,\dots$$

Př.

$f: \; y = 1$

$t \in \langle kT; (2k+1)\frac{T}{2})$



$y = -1 \; ; \; t \in \langle (2k+1)\frac{T}{2}; (k+1)T)$

$$\underline{\underline{a_0}} = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T}(-1)\,dt\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\left[t\right]_0^{\frac{T}{2}} - \left[t\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\right) = \frac{2}{T}\left(\frac{T}{2} - 0 - T + \frac{T}{2}\right) = \underline{\underline{0}}$$

$$a_m = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos(m\omega t)\,dt =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}}\cos(m\omega t)\,dt - \int_{\frac{T}{2}}^{T}\cos(m\omega t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\left[\frac{\sin(m\omega t)}{m\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \left[\frac{\sin(m\omega t)}{m\omega}\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\right) =$$

$$= \frac{2}{T\cdot m\cdot\frac{2\pi}{T}}\left(\underbrace{\sin\left(m\cdot\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{T}}\cdot\frac{\cancel{T}}{\cancel{2}}\right)}_{0} - \underbrace{\sin 0}_{0} - \underbrace{\sin\left(m\cdot\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cdot\cancel{T}\right)}_{0} + \underbrace{\sin\left(m\,\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right)}_{0}\right) =$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin(n\omega t)\,dt =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega t)\,dt - \int_{\frac{T}{2}}^{T} \sin(n\omega t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\right) =$$

$$= -\frac{2}{T\cdot n\cdot \frac{2\pi}{T}}\left(\cos\left(n\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) - \cos 0 - \cos\left(n\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) + \cos\left(n\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - 1 - 1 + \cos(n\pi)\right) =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right)$$

$b_1 = \frac{4}{\pi}$

$b_2 = 0$

$b_3 = \frac{4}{3\pi}$

$b_4 = 0$

$b_5 = \frac{4}{5\pi}$

$\vdots$

$$f: y = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{a_0}} + \sum_{n=1}^{N} \overset{0}{\overset{\shortparallel}{a_n}} \cos(n\omega t) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(n\omega t) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sin(\omega t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3\omega t) +$$

$$+ \frac{4}{5\pi} \sin(5\omega t) + \dots$$

N – nutno volit rozumně velké

malé ⇒ „nepřesná" fce

velké ⇒ bere čas, paměť, ...

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Základní pojmy

diferenciální rce – rce, v níž je jako neznámá fce s tím, že známe derivaci (derivace) této fce

metody řešení – problém ☹

- neexje obecný postup
- exjí „kuchařky" na řešení daného typu rovnice
- řada z nich NEŘEŠITELNÁ ANALYTICKY (tj. tužka + papír)

Pojmy ilustrované na řešení soustavy lin. rovnic

Řešte v $\mathbb{R}^3$:

$$2x - y - z = -6 \quad / \cdot (-2)$$

$$x + y - 2z = -9$$

$$-3x + 3y = 3$$

$$y = x + 1$$

$$2x - x - 1 - z = -6$$

$$z = x + 5$$

$O = \mathbb{R}^3$

$D = \mathbb{R}^3$

$P = \{[x;\ x+1;\ x+5];\ x \in \mathbb{R}\}$

úprava nalezeného řešení:

$$[t;\, t+1;\, t+5] = \underbrace{\underbrace{[0;\, 1;\, 5]}_{\text{BOD}} + t\underbrace{(1;1;1)}_{\text{VEKTOR}}}_{\text{PARAM. RCE PŘÍMKY VE 3D}}$$

$t \in \mathbb{R}$

BOD do soustavy:

$$2.0-1-5=-6 \cdots PS_1$$
$$0+1-2.5=-9 \cdots PS_2$$

BOD … řeší danou soustavu

VEKTOR do soustavy

$$\begin{array}{r}2.1-1-1=\\ 1+1-2.1=\end{array}\boxed{\begin{array}{c}0\\0\end{array}}$$

VEKTOR … řeší HOMOGENNÍ SOUSTAVU

$\underbrace{\qquad\qquad}$ ... PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ SOUSTAVY
(částečné)

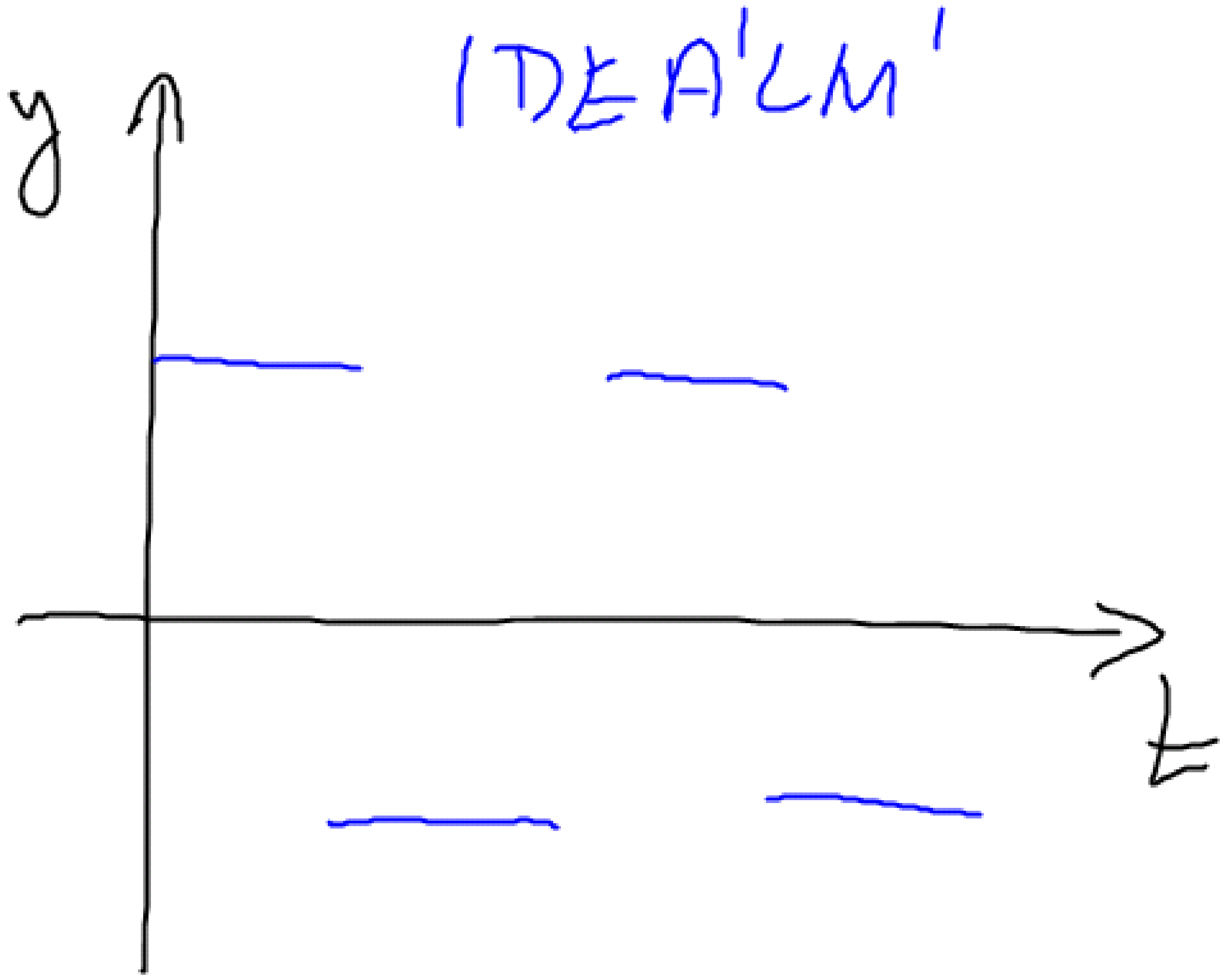
$\underbrace{\qquad\qquad}$ ... PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ SOUSTAVY

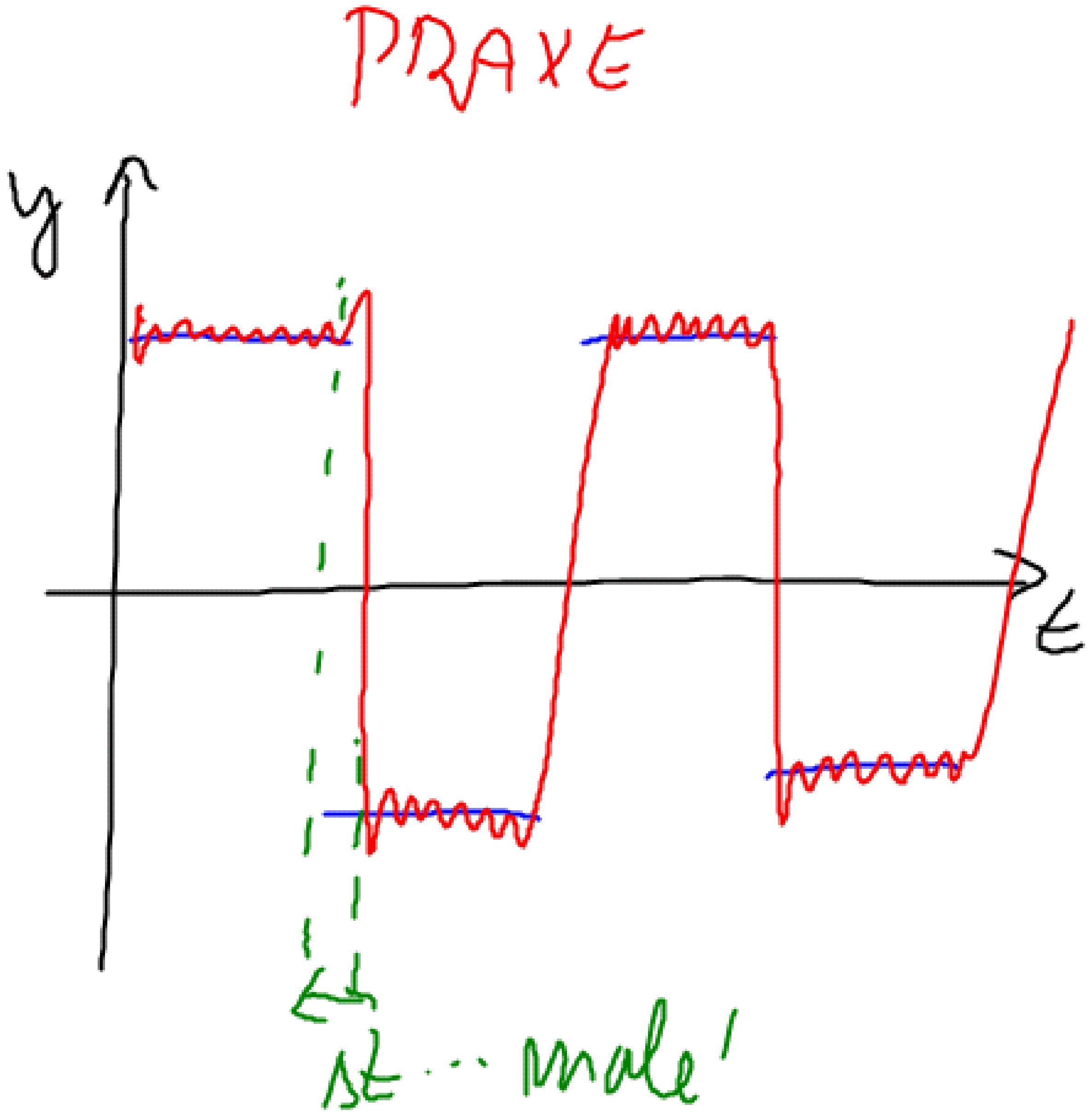
$t\underbrace{(1;1;1)}$ ... OBECNÉ ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ SOUSTAVY

$[0;1;5]+t(1;1;1)$ ... OBECNÉ ŘEŠENÍ SOUSTAVY

Dif.nce

- matematika – nutno ověřit spojitost, existenci derivací, ...
- aplikační předměty – spojitost, derivace bez problémů





1) Najdete PF k fci $f: y = x^2 - \sin 2x$.

$$F_{(x)} = \int (x^2 - \sin 2x)\,dx \quad \text{- - - -} \Leftrightarrow \text{. . .} \quad F'_{(x)} = f_{(x)}$$

derivace hledané fce

$$\underline{\underline{F_{(x)} = \frac{x^3}{3} + \frac{\cos 2x}{2} + C}} \quad ; \quad C \in R$$

2, Najděte PF k fci $g: y = e^{3x-2}$ tak, aby PF procházela bodem $A = [0;1]$.

$$G(v) = \int e^{3x-2}\,dx = \frac{e^{3x-2}}{3} + C$$

$$G(0) = 1$$

$$\frac{e^{3.0-2}}{3} + C = 1$$

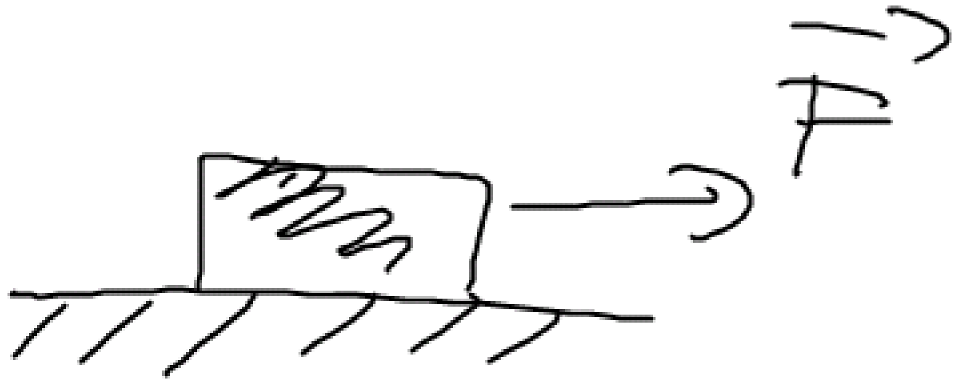
$$C = 1 - \frac{e^{-2}}{3}$$

$$G(x): y = \frac{e^{3x-2}}{3} + 1 - \frac{e^{-2}}{3}$$

ne F: POČÁTEČNÍ PODMÍNKY

3, HB se pohybuje pod vlivem stálé síly $\vec{F}$.

Určete průběh $s(t), v(t), a(t)$. Poč. podm: $v(0)=v_0, s(0)=s_0$



2. NZ: $\vec{F} = m\vec{a}$

pohyb po úsečce: $F = ma$

$$\underline{\underline{a = \frac{F}{m}}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \int a \, dt$$

$$v = \frac{F}{m}\int dt$$

$$v = \frac{F}{m}t + C$$

poč. podmínky:

$$v(0) = v_0$$

$$\frac{F}{m}\cdot 0 + C = v_0$$

$$C = v_0$$

$$\underline{\underline{v(t) = at + v_0}}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \quad s = \int v \, dt$$

$$s = \int (at + v_0) \, dt$$

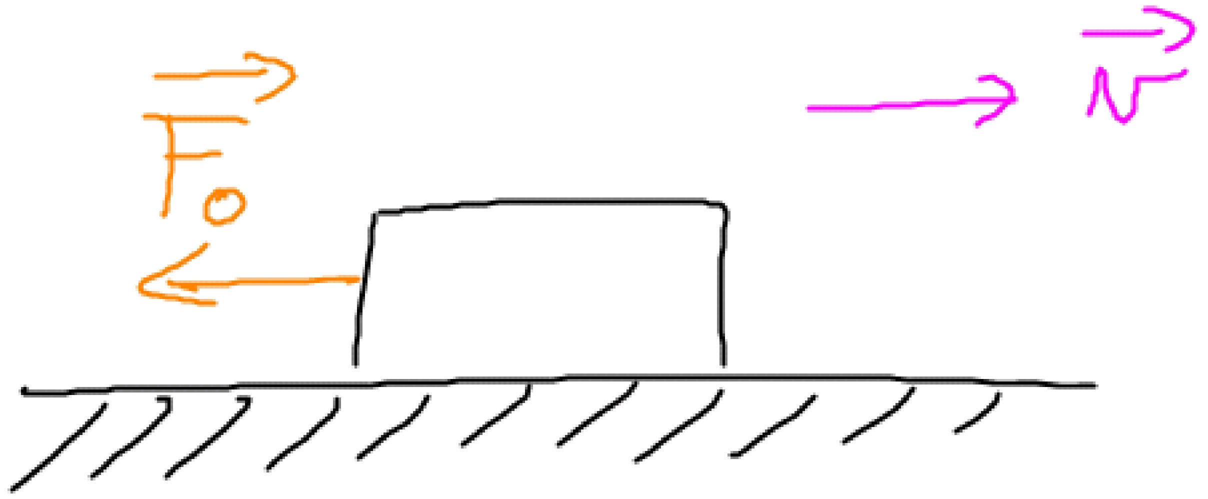
$$s = a\frac{t^2}{2} + v_0 t + C_1$$

poč. podmínky: $s(0) = s_0$

$$a \cdot \frac{0^2}{2} + v_0 \cdot 0 + C_1 = s_0$$

$$C_1 = s_0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0}}$$

4) HB o hmotnosti $\underline{m}$ je veden do pohybu poč. rychlosti o velikosti $\underline{v_0}$ a pohybuje se po úsečce. Působí na něj odporová síla, jejíž velikost je přímo úměrná velikosti rychlosti. Najděte: $s(t), v(t), a(t)$.



$$F_o \sim v$$

$$F_o = -kv$$

↳ působí PROTI směru RYCHLOSTI

2NZ: $ma = F_o$

$$ma = -kv$$

$$m\frac{dv}{dt} = -kv$$

řešení: SEPARACE PROMĚNNÝCH

$$m\frac{dv}{v} = -k\,dt$$

$$\int\frac{dv}{v} = \int -\frac{k}{m}\,dt$$

$$\log_a x = y$$

$$\Updownarrow$$

$$x = a^y$$

$$\ln|v| + C_1 = -\frac{k}{m}t + C_2$$

$$\ln|v| = -\frac{k}{m}t + C$$

$$|v| = \underbrace{e^{-\frac{k}{m}t + C}}_{\searrow 0}$$

$$v = e^{-\frac{k}{m}t + C}$$

$$v = e^{-\frac{k}{m}t} \cdot e^{C}$$

$$v = K \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$$

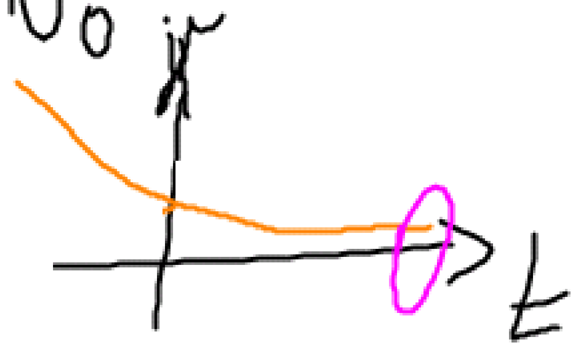
poč. podmínky: $v(0) = v_0$

$$K \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot 0} = v_0$$

$$K = v_0 \Rightarrow \underline{\underline{v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}}}$$

$t = 0 \Rightarrow v = v_0$

$\boxed{t \to \infty}$



$\Rightarrow v \to 0$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{d}{dt}\left(v_0 e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$\underline{\underline{a = -\frac{k v_0}{m} e^{-\frac{k}{m}t}}}$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$s = \int v \, dt$$

$$s = \int v_0 e^{-\frac{k}{m}t} \, dt$$

$$s = -\frac{m}{k} v_0 e^{-\frac{k}{m}t} + C$$

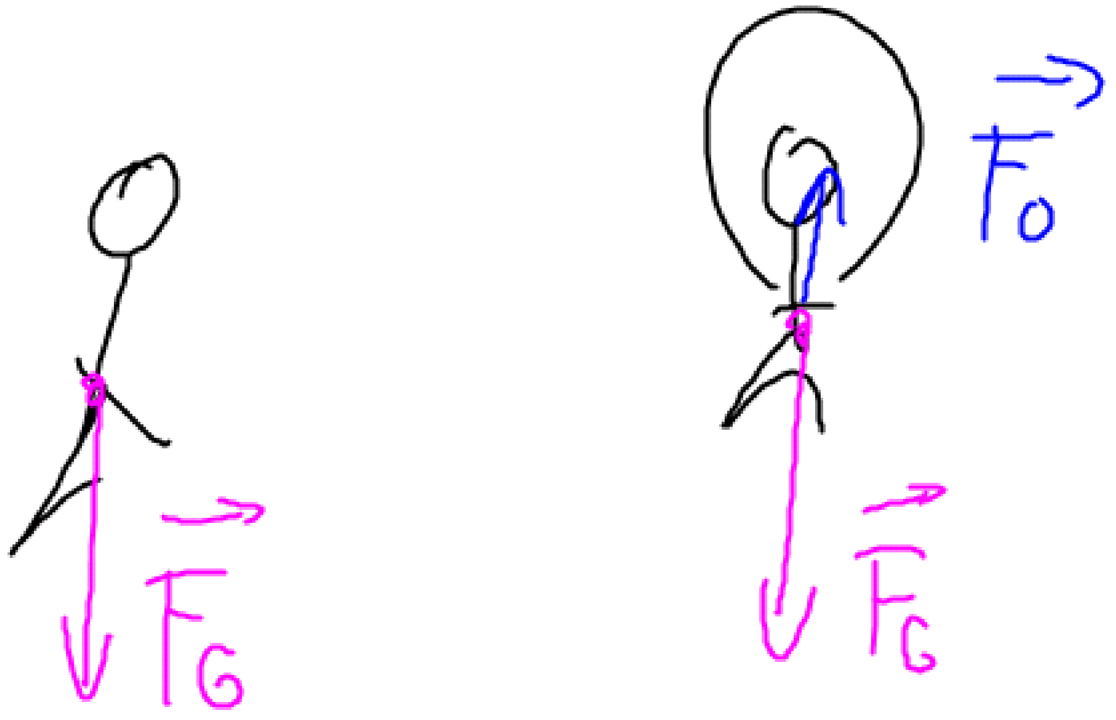
poč. podmínky: $s(0) = s_0$

$$-\frac{m}{k} v_0 e^{-\frac{k}{m} \cdot 0} + C = s_0$$

$$C = s_0 + \frac{m v_0}{k}$$

$$\underline{\underline{s(t) = \frac{m v_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + s_0}}$$

5) Parašutista o hmotnosti $\underline{m}$ vyskočil z letadla. První část pádu lze považovat za volný pád. Těsně před otevřením padákem měl velikost rychlosti $\underline{v_0}$. Určete velikost rychlosti, kterou dopadne na zem, a průběh $v(t)$. Odporová síla má velikost úměrnou 2. mocnině velikosti rychlosti.



$F_G = \text{konst.}$

$F_o \sim v^2$

$F_o = C v^2$

v_d $\cdots$ $F_G = F_o$

$$mg = C v_d^2$$

$$\underline{\underline{v_d = \sqrt{\frac{mg}{C}}}}$$

2. NZ: $F_G - F_o = ma$

$$mg - Cv^2 = m\frac{dv}{dt}$$

$$dt = \frac{m}{mg - Cv^2}\,dv$$

$$\int dt = \int \frac{m}{mg - Cv^2}\,dv$$

$$t + K = \int \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}g\left(1 - \frac{cv^2}{mg}\right)} dv =$$

$$= \frac{1}{g} \int \frac{dv}{1 - \left(\sqrt{\frac{c}{mg}}\, v\right)^2} = \frac{1}{g} \int \frac{dv}{1 - \left(\frac{v}{v_d}\right)^2}$$

VÍME: $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + K_2$

$$t + K = \frac{1}{g} \cdot v_d \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \frac{v}{v_d}}{1 - \frac{v}{v_d}} \right|$$

$$\frac{2g}{v_d}(t+k) = \ln\left|\frac{1+\frac{v}{v_d}}{1-\frac{v}{v_d}}\right|$$

$$\frac{1+\frac{v}{v_d}}{1-\frac{v}{v_d}} = e^{\frac{2g(t+k)}{v_d}}$$

$$\frac{v_d+v}{v_d-v} = e^{\frac{2g(t+k)}{v_d}}$$

$$v_d+v = e^{\frac{2g(t+k)}{v_d}}\left(v_d-v\right)$$

$$v = v_d\,\frac{e^{\frac{2g(t+k)}{v_d}}-1}{e^{\frac{2g(t+k)}{v_d}}+1} \qquad (1)$$

poč. podmínky: $v(0) = v_0$

$$v_d \frac{e^{\frac{2gK}{v_d}} - 1}{e^{\frac{2gK}{v_d}} + 1} = v_0$$

$$v_d \frac{L - 1}{L + 1} = v_0$$

$$L - 1 = \frac{v_0}{v_d}(L + 1)$$

$$L = \frac{\frac{v_0}{v_d} + 1}{1 - \frac{v_0}{v_d}} \qquad (2)$$

(2) do (1):

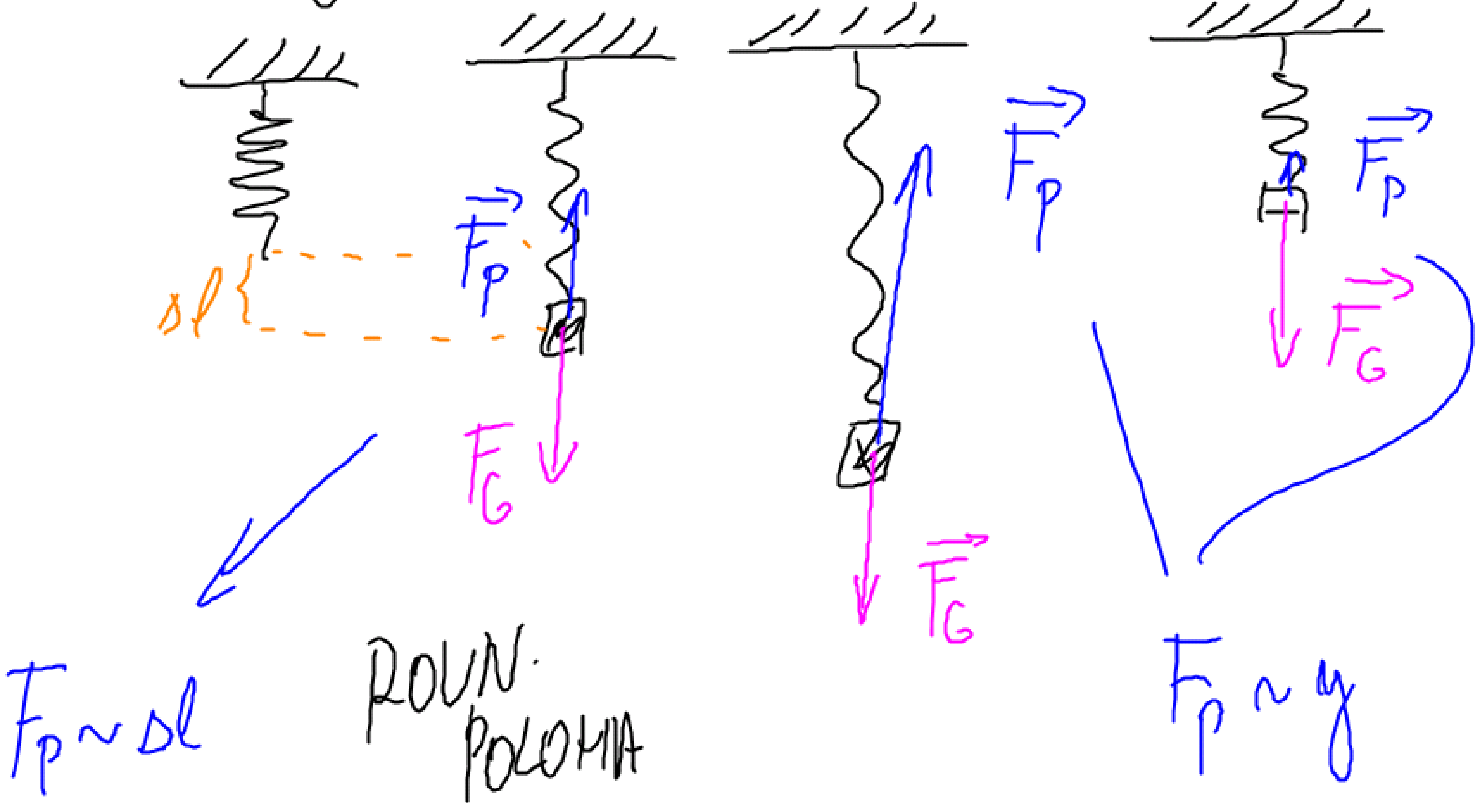
$$v = v_d \frac{e^{\frac{2gt}{v_d}} \cdot L - 1}{e^{\frac{2gt}{v_d}} \cdot L + 1}$$

$$v = v_d \frac{e^{\frac{2gt}{v_d}} \left(\frac{\frac{v_0}{v_d} + 1}{1 - \frac{v_0}{v_d}} \right) - 1}{e^{\frac{2gt}{v_d}} \left(\frac{\frac{v_0}{v_d} + 1}{1 - \frac{v_0}{v_d}} \right) + 1} \; ; \; v_d = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

$$\underline{\underline{\qquad\qquad}}$$

$$c = \frac{1}{2} \rho C S$$

6) Těleso o hmotnosti <u>m</u> bylo uvedeno do kmitavého pohybu na pružině s tuhostí <u>k</u> v odporovém prostředí. Přitom na něj působí síla, jejíž velikost je úměrná velikosti rychlosti. Najděte závislost y(t).



2.NZ: $ma = \underbrace{-ky}_{\vec{F_p}} \underbrace{-Cv}_{\vec{F_o}}$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - C\frac{dy}{dt}$$

předpoklad: řešení je ve tvaru $y = Ae^{-\lambda t}$

$$\frac{dy}{dt} = -A\lambda e^{-\lambda t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = A\lambda^2 e^{-\lambda t}$$

$$m\frac{d^2y}{dt} + C\frac{dy}{dt} + ky = 0$$

obyčejná dif. rce 2. řádu s nulovou pravou stranou

└┘ ~ „normální" (totální) derivace

dosadíme předpokládané řešení:

$$mA\lambda^2 e^{-\lambda t} - CA\lambda e^{-\lambda t} + kAe^{-\lambda t} = 0$$

$$e^{-\lambda t} \neq 0$$

$$A \neq 0$$

$$m\lambda^2 - C\lambda + k = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{C}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

charakteristický polynom (rce) dané dif. rce

$$D = \left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2} = \frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ … vlastní úhl. frekvence

$$b = \frac{c}{2m}$$

$$\lambda_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

1) $b^2 > \omega_0^2 \Rightarrow b^2 - \omega_0^2 > 0 \Rightarrow$ 2 reálné kořeny

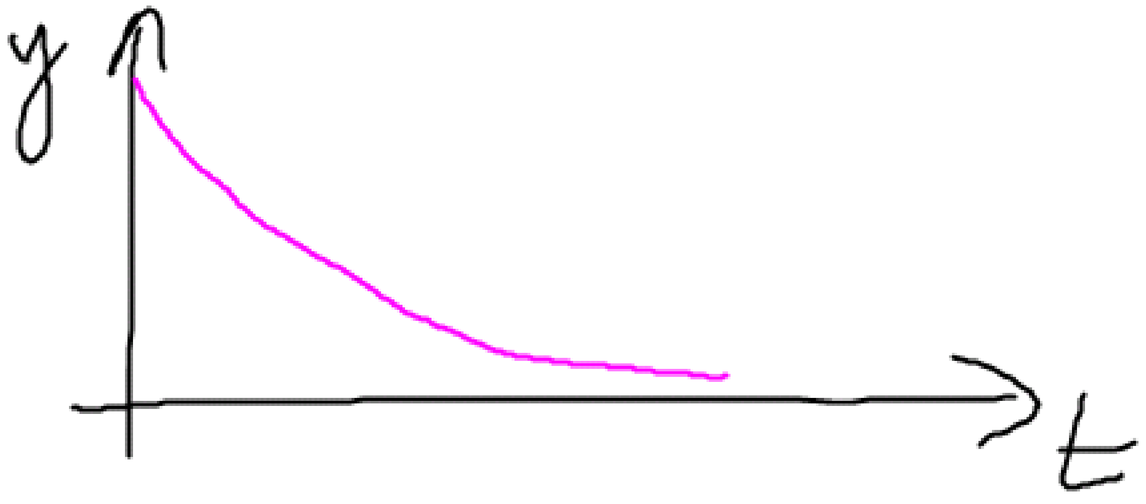
předpoklad: $y = A \cdot e^{-\lambda t}$

v této situaci: $y = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t}$

$$y = A_1 e^{\left(-b-\sqrt{b^2-\omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-b+\sqrt{b^2-\omega_0^2}\right)t}$$

NEKMITÁ

nadkritické tlumení ; aperiodický případ



2, $b^2 = \omega_0^2 \Rightarrow b^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow$ 1 dvojnásobný reálny koreň

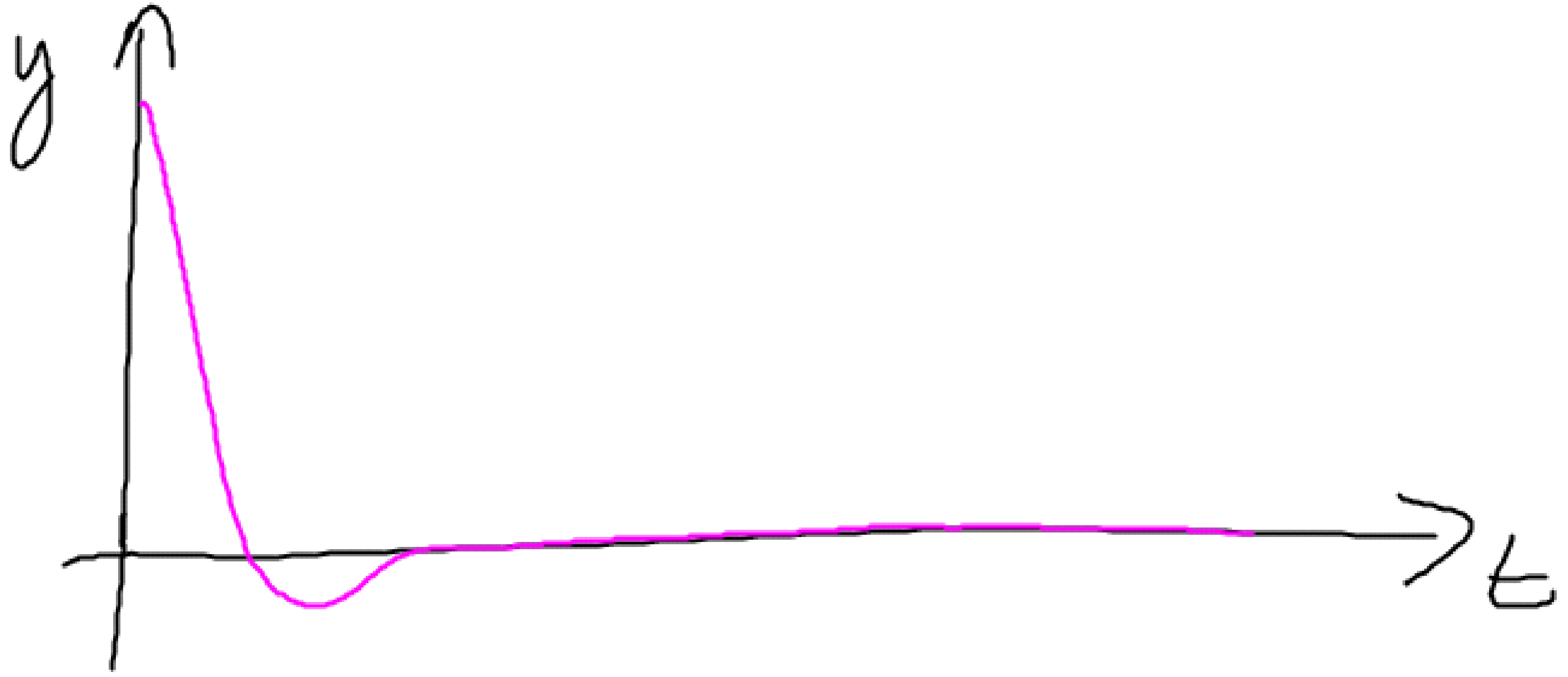
$\lambda_{1,2} = b$

riešenie: $y = (A_1 + A_2 t)e^{-\lambda t}$

$y = (A_1 + A_2 t) \cdot e^{-bt}$

NEKMITÁ

kritické tlmenie; medzný prípad



3) $b^2 < \omega_0^2 \Rightarrow b^2 - \omega_0^2 < 0$

$$\sqrt{\underbrace{b^2-\omega_0^2}_{<0}} = \sqrt{-1(\underbrace{\omega_0^2-b^2}_{>0})} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{\omega_0^2-b^2} =$$

$$= i\sqrt{\omega_0^2-b^2} = i\omega$$

$$\lambda = b \pm i\omega \in \mathbb{C}$$

řešení: $y = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t}$

$$y = A_1 e^{(-b-i\omega)t} + A_2 e^{(-b+i\omega)t} =$$

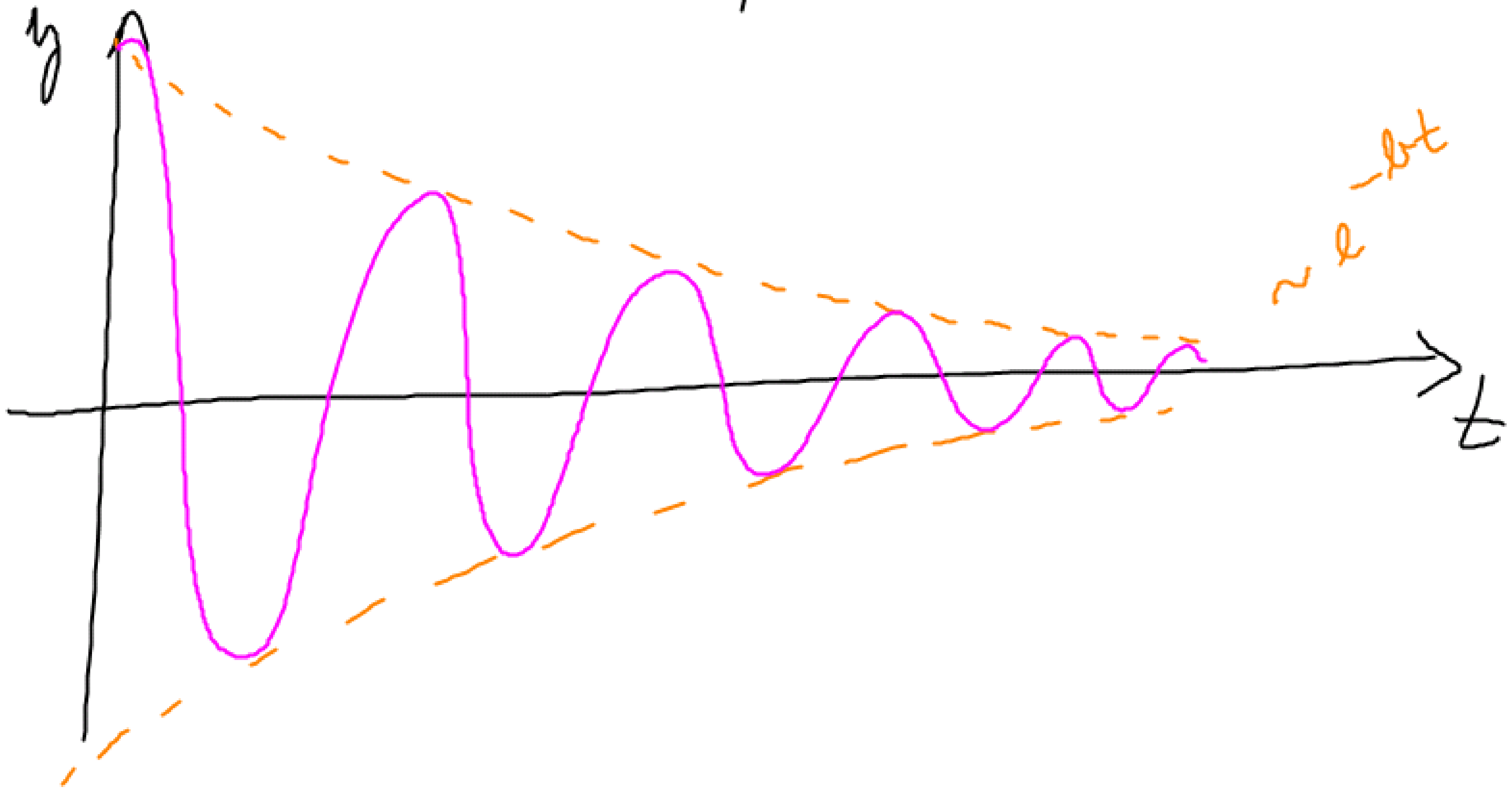
$$= e^{-bt}\left(A_1 e^{-i\omega t} + A_2 e^{i\omega t}\right)$$

víme: $e^{-i\varphi} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi$

$$y = e^{-bt}\Big(A_1(\cos\omega t - i\sin\omega t) + A_2(\cos\omega t + i\sin\omega t)\Big)$$

KMITÁ

podkritické tlumení; tlumené kmitání



je zřejmé, že $y \in R \iff \mathrm{Im}(y(t)) = 0$

$$\iff y(t) = y^*(t)$$

y^* - komplexně sdružené k y

$$\cancel{e}^{-bt}\left(A_1(\cos\varphi - i\sin\varphi) + A_2(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right) =$$

$$= \cancel{e}^{-bt}\left(A_1^*(\cos\varphi + i\sin\varphi) + A_2^*(\cos\varphi - i\sin\varphi)\right)$$

$$(A_1 - A_2^*)(\cos\varphi - i\sin\varphi) + (A_2 - A_1^*)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 0$$

$$A_1 = A_2^* \quad a \quad \underbrace{A_2 = A_1^*}$$

předpoklad: $A_1 = p + iq$ $\qquad \boxed{p, q \in \mathbb{R}}$

$$A_2 (= A_1^*) = p - iq$$

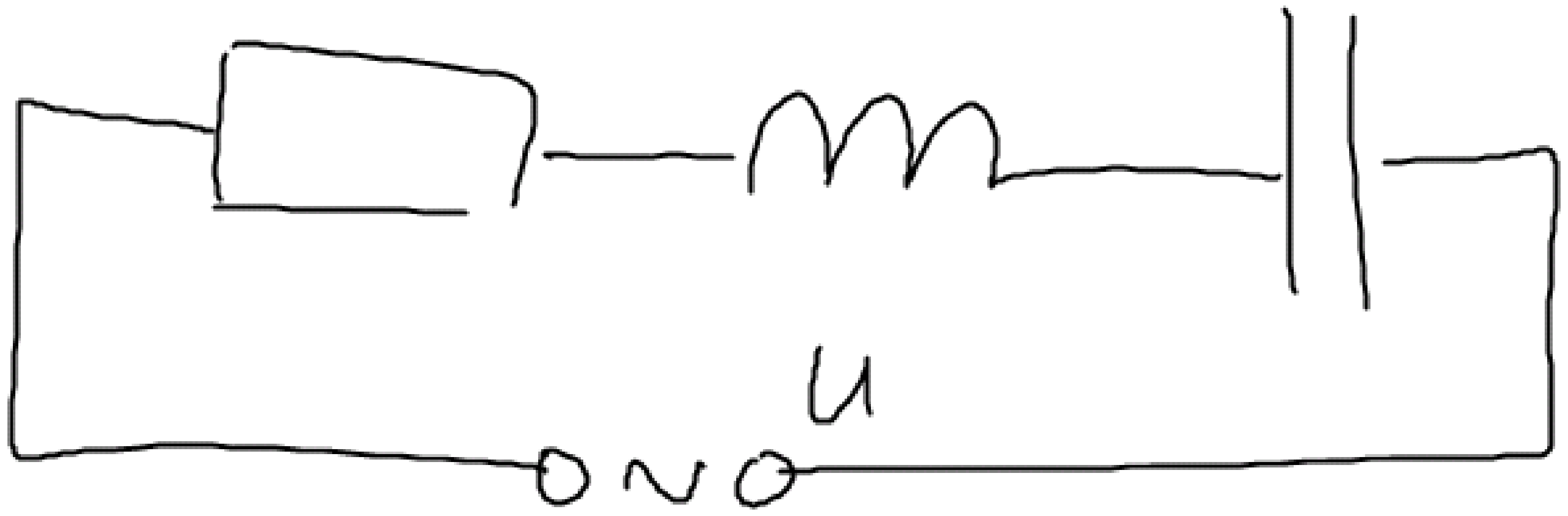
úprava $\underline{y(t)}$: $y(t) = e^{-bt}\left((A_1 + A_2)\cos\omega t + (A_2 - A_1)\, i \sin\omega t\right) =$

$$= e^{-bt}\left((p + iq + p - iq)\cos\omega t + (p - iq - p - iq)\, i \sin\omega t\right) =$$

$$= \underbrace{e^{-bt}\left(2p\cos\omega t + 2q\sin\omega t\right)}_{\in \mathbb{R}}$$

$v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow$ 2 rce pro $\underbrace{\text{2 poč. podmínky}}_{y(0) = y_0 \,\wedge\, v(0) = v_0}$ a 2 neznámé p, q

7) sériový RLC obvod



$$U_R = RI = R\frac{dQ}{dt}$$

$$U_L = \frac{d\phi}{dt} = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2Q}{dt^2}$$

$$U_C = \frac{Q}{C}$$

$$U_R + U_L + U_C = U$$

$$R\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = U$$

DALŠÍ POSTUP

FORMÁLNĚ STEJNÉ JAKO 6)