Střední průmyslová škola sdělovací techniky
Panská 3
Praha 1

© Jaroslav Reichl, 2017

Sbírka úloh

z aplikované matematiky

určená studentům 4. ročníku technického lycea jako doplněk ke studiu aplikované matematiky

Jaroslav Reichl

OBSAH

1. Základní pojmy algebry

1.1 Jsou dány dvě množiny: množina *K* rockových klubů v Praze a množina *S* rockových skupin hrajících v rockových klubech. Rozhodněte, za jakých podmínek je kartézský součin $K \times S$: a) zobrazením, b) prostým zobrazením, c) bijekcí. Podmínky v jednotlivých částech úlohy vypište slovně. Řešte bez ohledu na reálný smysl nalezených podmínek.

1.2 Je dána množina *S* všech staveb, které lze vytvořit ze stejných kostek dětské stavebnice, a operace *p postavení dvou kostek na sebe*. Zjistěte, zda grupoid (*K*, *p*) je a) grupou, b) Abelovou grupou. Podmínky (ověření definice) vypište slovně. Řešte bez ohledu na reálný smysl platných podmínek.

2. Vektory (lineární kombinace, závilost, nezávislost, generátory)

2.1 Zjistěte, zda jsou vektory $\vec{a} = (3;1;3)$, $\vec{b} = (0;2;1)$ a $\vec{c} = (3;-1;2)$ lineárně závislé nebo nezávislé. Pokud jsou lineárně závislé, napište příslušnou lineární kombinaci vektorů.

2.2 Zjistěte, zda jsou vektory $\vec{u} = (4;1;5)$, $\vec{v} = (1;0;-1)$ a $\vec{w} = (0;-1;2)$ lineárně závislé nebo nezávislé. Pokud jsou lineárně závislé, napište příslušnou lineární kombinaci vektorů.

2.3 Zjistěte, pro které $\sigma \in \mathbb{R}$ jsou vektory $\vec{e} = (3;-2;\sigma)$, $\vec{f} = (4;-1;0)$ a $\vec{g} = (2;0;-2)$ a) lineárně závislé, b) lineárně nezávislé. V případě a) napište příslušnou lineární kombinaci vektorů.

2.4 Zjistěte, zda vektory $\vec{u} = (1;2;3)$, $\vec{v} = (0;2;3)$ a $\vec{w} = (4;2;-1)$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

2.5 Zjistěte, zda vektory $\vec{a} = (-1;2;3)$, $\vec{b} = (0;2;0)$ a $\vec{c} = (0;2;-1)$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

2.6 Zjistěte, zda vektory $\vec{m} = (0;1;3)$, $\vec{n} = (0;2;0)$ a $\vec{p} = (0;2;1)$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

2.7 Zjistěte, pro která $\omega \in \mathbb{R}$ vektory $\vec{p} = (-1;-2;3)$, $\vec{q} = (\omega;0;2)$ a $\vec{r} = (1;-1;0)$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

3. Matice

3.1 Určete hodnost matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

3.2 Určete hodnost matice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Jsou dány matice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.3 Vypočtěte součet matic A a B.

3.4 Vypočtěte rozdíl matic A a B.

3.5 Vypočtěte součin matic B a C.

3.6 K součinu matic A a C přičtěte matici B.

3.7 Určete inverzní matici k matici: a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

3.8 Určete inverzní matici k matici $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}$ v závislosti na reálném koeficientu α.

3.9 Určete inverzní matici k matici $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Soustavy rovnic

4.1 V množině $\mathbb{R}^3$ řešte soustavu rovnic o neznámých *x*, *y*, *z*: $x + y + z = 1$, $x + 2y + 3z = 0$ a $3x + 3y + z = -1$.

4.2 V množině $\mathbb{R}^3$ řešte soustavu rovnic o neznámých p, q, r: $p-q-r=1$, $-p+q-r=1$ a $-p-q+r=1$.

4.3 V množině $\mathbb{R}^3$ řešte soustavu rovnic o neznámých a, b, c: $3a+2b+c=-1$, $a+2b+3c=0$ a $a+b+c=1$.

4.4 V množině $\mathbb{R}^3$ řešte soustavu rovnic o neznámých k, l, m: $k-l-m=1$, $k+l+m=1$ a $-k-l-m=-1$.

4.5 Určete, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ má soustava rovnic o neznámých c, d a e v množině $\mathbb{R}^3$ právě jedno řešení a toto řešení určete: $c+3d-2e=2$, $c+4d-3e=\alpha$ a $d-e+2c=0$.

4.6 V množině $\mathbb{R}^3$ určete řešení zadané soustavy rovnic o neznámých u, v a w v závislosti na koeficientu $\beta \in \mathbb{R}$: $2u-w=3$, $3u-\beta v+3w=1$ a $w+2v=2$.

4.7 V množině $\mathbb{R}^4$ řešte soustavu rovnic o neznámých w, x, y, z: $w-x-y=2$, $x+y+z=1$, $w-x-z=-2$ a $w+x+y=-1$.

5. Determinanty

5.1 Vypočtěte determinant matice $M=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5.2 Řešte v množině reálných čísel rovnici $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=0$.

5.3 Vypočtěte determinant matice $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

5.4 Vypočtěte determinant matice $Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5.5 Řešte v množině reálných čísel rovnici $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & k & 2 \\ -1 & 3 & k \end{vmatrix}=15$.

5.6 Řešte v množině reálných čísel rovnici $\begin{vmatrix} r & 2 & 1 \\ 4 & r & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=4$.

5.7 Řešte v množině reálných čísel rovnici $\begin{vmatrix} u & 3 & -2 \\ 0 & u & 4 \\ u & 6 & u \end{vmatrix}=0$.

5.8 Vypočtěte determinant matice $W=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.9 Vypočtěte determinant matice $R=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.10 Vypočtěte determinant matice $K=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

5.11 Vypočtěte determinant matice $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Operace s vektory

Jsou dány vektory $\vec{a} = (-3; 1; 0)$, $\vec{b} = (-2; -1; 1)$, $\vec{c} = (1; 2; -3)$ a $\vec{d} = (-1; 3; 2)$.

6.1 Vypočtěte $|\vec{c}|$.

6.2 Vypočtěte $\vec{c} \cdot \vec{d}$

6.3 Vypočtěte $\vec{a} \times \vec{b}$.

6.4 Vypočtěte $\vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a}$.

6.5 Vypočtěte $\vec{c}\,\vec{d} \times \vec{b} \cdot \vec{a}$.

6.6 Vypočtěte $|\vec{a} \cdot \vec{d} \times \vec{c}\,\vec{b}|$.

6.7 Najděte jednotkový vektor ve směru vektoru $\vec{b}$.

6.8 Je dán rovnoběžník *AHOJ* body $A = [1; -2; 1]$, $H = [-2; 3; 1]$ a $O = [3; 1; 0]$. Určete obsah rovnoběžníku *AHOJ*.

6.9 Člověk zavírá okno volně otočné kolem pantů. Ruka člověka působí v místě, které je popsáno polohovým vektorem $\vec{r} = (1; 0,5; 1,5)\ \mathrm{m}$, a vektor síly je $\vec{F} = (2; -1; 0)\ \mathrm{N}$. Určete vektor momentu sil a jeho velikosti.

6.10 Elektron vletí rychlostí $\vec{v} = (1; -1; 2) \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ do homogenního magnetického pole popsaného magnetickou indukcí $\vec{B} = (-3; 2; 1)\ \mathrm{mT}$. Určete vektor magnetické síly a vypočtěte její velikost. Jaký úhel svírá vektor rychlosti s vektorem magnetické indukce?

6.11 Proton urychlovaný elektrickým polem s intenzitou $\vec{E} = (3; 2; -1) \cdot 10^4\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$ vletí rychlostí $\vec{v} = (1; 0; -3) \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ do homogenního magnetického pole popsaného magnetickou indukcí $\vec{B} = (-10; 10; 20)\ \mathrm{mT}$. Určete vektor magnetické síly a vypočtěte její velikost. Jaký úhel svírá vektor rychlosti s vektorem elektrické intenzity?

7. Parciální derivace

Vypočtěte parciální derivace zadané funkce:

7.1 $f(x, y, z) = 2y^2 - x \cdot z + e^{z \cdot \sin(z + x^2)}$;

7.2 $g(x, y, z) = 2x \cdot y^2 - x^3 \cdot \ln z^4 + y \cdot \cos(\ln(x + 2y))$;

7.3 $h(x, y) = \sin(x + y^2) \cdot e^{x^3} - y \cdot \ln\sqrt{x}$.

7.4 Vypočtěte parciální derivace zadané funkce a ve směru osy x najděte body podezřelé z lokálního minima: $v(x, y) = x^2 \cdot y^2 - 4x \cdot y + 2 \cdot \ln y$.

7.5 Vypočtěte parciální derivace zadané funkce a ve směru osy x najděte body podezřelé z lokálního minima: $k(x, y, z) = 2x \cdot y^2 - x \cdot y \cdot z + \ln e^{z \cdot \cos(2z + y)}$.

8. Lineární diferenciální operátory

8.1 Je dána funkce $f(x, y, z) = 2y^2 - xz + e^{z \sin(z + x^2)}$. Určete $\operatorname{grad} f$.

8.2 Je dán vektor $\vec{v}(x, y, z) = \left(3x^2 + xy; \sin(x + y^2 z); 2x\cos(\sqrt{z}) + y\right)$. Vypočtěte $\operatorname{div} \vec{v}$.

8.3 Je dán vektor $\vec{u}(x, y, z) = \left(\frac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$. Vypočtěte $\operatorname{rot} \vec{u}$.

8.4 Je dán vektor $\vec{w}(x, y, z) = \left(\frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$. Vypočtěte $\operatorname{rot}\vec{u}$.

8.5 Aplikujte na vektor $\vec{a}(x, y, z) = \left(x \ln y;\ y \cos\left(z^2 x\right);\ x^2 + 3y^2 - 2z\right)$ operátory rotace a divergence ve správném pořadí.

8.6 Aplikujte na skalární funkci $g(x, y, z) = y \log x + z \cdot e^{2x+y} - 2z$ operátory gradient a divergence ve správném pořadí.

8.7 Aplikujte na vektor $\vec{b}(x, y, z) = \left(e^x \cdot \ln(y \cdot z);\ 2x^3 - 3y + z;\ z \cdot \sin\left(z^2 + x \cdot y\right)\right)$ operátory gradient a divergence ve správném pořadí.

8.8 Vypočtěte divergenci vektoru elektrické intenzity, který je v okolí bodového náboje Q v prostředí s relativní permitivitou ε_r definován vztahem $\vec{E} = \frac{k}{\varepsilon_r} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{r_0}$, kde $\vec{r_0}$ je jednotkový vektor. Výpočet proveďte v kartézské soustavě souřadnic.

8.9 Vypočtěte gradient potenciálu elektrického pole, který je v okolí bodového náboje Q v prostředí s relativní permitivitou ε_r definován vztahem $\varphi = \frac{k}{\varepsilon_r} \cdot \frac{Q}{r}$. Výpočet proveďte v kartézské soustavě souřadnic.

8.10 Vypočtěte gradient potenciálu gravitačního pole, který je definován vztahem $V = -\frac{\kappa \cdot M \cdot m}{r}$, kde M je hmotnost centrálního tělesa, m je hmotnost tělesa pohybujícího se v centrálním poli a κ je gravitační konstanta. Výpočet proveďte v kartézské soustavě souřadnic.

9. Lineární diferenciální operátory 2

9.1 Odvoďte vztah pro $\operatorname{grad}(\alpha\,\beta)$, kde α, β jsou skaláry proměnných *x*, *y* a *z*.

9.2 Odvoďte vztah pro $\operatorname{div}\left(\lambda\vec{v}\right)$, kde λ je skalár proměnných *x*, *y* a *z* a $\vec{v}$ je vektor proměnných *x*, *y* a *z*.

9.3 Vypočtěte $\operatorname{grad}(\alpha \cdot \beta)$, kde $\alpha = x \sin y - 3z \cos x$ a $\beta = y - z \cdot \mathrm{e}^x$.

9.4 Vypočtěte $\operatorname{div}\left(\lambda\vec{v}\right)$, kde $\lambda = y - 5z \cos x$ a $\vec{v} = (x - yz;\ y - xz;\ z - xy)$.

9.5 Vypočtěte $\Delta\delta$, kde $\delta = y^2 \cdot \mathrm{e}^{x^2} - z^3 \sin x$.

9.6 Je dána funkce $f\left(x(t), y(t), z(t), t\right) = x^2(t) + \sin\left(y(t)\right) + z(t) - t^3$. Vypočtěte totální derivaci funkce *f* podle proměnné *t*.

9.7 Vysvětlete fyzikální význam Maxwellovy rovnice $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$.

9.8 Vysvětlete fyzikální význam Maxwellovy rovnice $\operatorname{div}\vec{B} = 0$.

9.9 Vysvětlete fyzikální význam Maxwellovy rovnice $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

9.10 Vysvětlete fyzikální význam Maxwellovy rovnice $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$.

10. Diferenciální rovnice

10.1 Hmotný bod o hmotnosti *m* se pohybuje po úsečce pod vlivem síly, jejíž velikost narůstá lineárně s časem, tj. platí: $F = k \cdot t$, kde *k* je kladná konstanta. Najděte závislost uražené dráhy, velikosti rychlosti a velikosti zrychlení na čase, jestliže v čase $t_0 = 0\ \mathrm{s}$ má hmotný bod velikost rychlosti v_0 a již uraženou dráhu s_0.

10.2 Hmotný bod o hmotnosti *m* se pohybuje po úsečce pod vlivem síly, jejíž velikost klesá exponenciálně s časem, tj. platí: $F = F_0 \cdot e^{-k \cdot t}$, kde F_0 a *k* jsou kladné konstanty. Najděte závislost uražené dráhy, velikosti rychlosti a velikosti zrychlení na čase, jestliže v čase $t_0 = 0\ \mathrm{s}$ má hmotný bod velikost rychlosti v_0 a již uraženou dráhu s_0.

10.3 Hmotný bod o hmotnosti *m* se pohybuje po úsečce pod vlivem síly, jejíž velikost klesá lineárně s velikostí rychlosti, tj. platí: $F = -k \cdot v(t)$, kde *k* je kladná konstanta. Najděte závislost uražené dráhy, velikosti rychlosti a velikosti zrychlení na čase, jestliže v čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ má hmotný bod velikost rychlosti v_0 a již uraženou dráhu s_0.

10.4 Hmotný bod o hmotnosti *m* se pohybuje po úsečce pod vlivem síly, jejíž velikost roste exponenciálně s velikostí rychlosti, tj. platí: $F = F_0 \cdot e^{k \cdot v(t)}$, kde F_0 a *k* jsou kladné konstanty. Najděte závislost uražené dráhy, velikosti rychlosti a velikosti zrychlení na čase, jestliže v čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ má hmotný bod velikost rychlosti v_0 a již uraženou dráhu s_0.

Řešení úloh

1. Základní pojmy algebry

1.1 a) O zobrazení se bude jednat, jestliže v každém klubu bude hrát maximálně jedna skupina. b) Zobrazení bude prosté, pokud v každém klubu bude hrát maximálně jedna skupina a současně každá skupina bude hrát maximálně v jednom klubu. c) O bijekci se bude jednat, pokud budou splněny podmínky z části b) a současně skupin i klubů bude stejný počet.

1.2 Aby byl daný grupoid grupou, musí být splněny čtyři základní vlastnosti: uzavřenost operace na dané množině, asociativní zákon, existence neutrálního prvku a existence symetrického prvku. Uzavřenost na množině jistě splněná je - postavením dvou kostek na sebe vytvoříme stavbu, kterou lze z kostek realizovat. Při stavění stejných kostek na sebe lze postavit první, na ní druhou a až na ně postavit třetí, ale lze postupovat i tak, že na první postavíme rovnou dvě předem na sebe postavené kostky. Neutrální prvek existuje - nepostavíme žádnou kostku. Symetrický prvek lze nalézt také - kostku z dané kostky sundáme. Takže daný grupoid je grupa. Vzhledem k tomu, že lze kostky na sebe stavět v libovolném pořadí, je tato grupa Abelovou grupou.

2. Vektory (lineární kombinace, závilost, nezávislost, generátory)

2.1 jsou lineárně závislé; $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

2.2 jsou lineárně nezávislé

2.3 a) $\sigma = 5$, $\vec{g} = \frac{4}{5}\vec{f} - \frac{2}{5}\vec{e}$; b) $\sigma \neq 5$

2.4 ano, generují

2.5 ano, generují

2.6 ne, negenerují

2.7 $\omega = -2$

3. Matice

3.1 2

3.2 3

3.3 $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3.4 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

3.5 $\begin{pmatrix} -3 & 12 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

3.6 $\begin{pmatrix} 3 & 11 & -8 \\ -1 & 16 & 3 \end{pmatrix}$

3.7 a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, c) neexistuje

3.8 pro $\alpha = -6$ inverzní matice neexistuje, pro $\alpha \neq -6$ je to matice $\frac{1}{\alpha + 6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & -3 \end{pmatrix}$

3.9 $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

4. Soustavy rovnic

4.1 $O = D = \mathbb{R}^3$, $P = \{[4; -5; 2]\}$

4.2 $O=D=\mathbb{R}^3$, $P=\{[-1;-1;-1]\}$

4.3 $O=D=\mathbb{R}^3$, $P=\emptyset$

4.4 $O=D=\mathbb{R}^3$, $P=\{[1;t;-t];t\in\mathbb{R}\}$

4.5 $O=D=\mathbb{R}^3$, $P=\left\{\left[\frac{2-\alpha}{2};\frac{10-3\alpha}{2};\frac{14-5\alpha}{2}\right];\alpha\in\mathbb{R}\right\}$

4.6 $O=D=\mathbb{R}^3$, pro $\beta=-9$ je $P=\emptyset$, pro $\beta\neq-9$ je $P=\left\{\left[\frac{5(\beta+4)}{2(\beta+9)};\frac{5}{2}\left(1-\frac{\beta+4}{\beta+9}\right);-3+\frac{5(\beta+4)}{\beta+9}\right];\beta\in\mathbb{R}\setminus\{-9\}\right\}$

4.7 $O=D=\mathbb{R}^4$, $P=\left\{\left[\frac{1}{2};0;-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]\right\}$

5. Determinanty

5.1 6

5.2 $O=D=\mathbb{R}$, $P=\{6\}$

5.3 35

5.4 -9

5.5 $O=D=\mathbb{R}$, $P=\{1,2\}$

5.6 $O=D=\mathbb{R}$, $P=\{-1,3\}$

5.7 $O=D=\mathbb{R}$, $P=\{0,-1-\sqrt{13},-1+\sqrt{13}\}$

5.8 30

5.9 -8

5.10 15

5.11 -7

6. Operace s vektory

6.1 $\sqrt{14}$

6.2 -1.

6.3 $(1;3;5)$

6.4 -8

6.5 $(-18;-36;54)$

6.6 $38\sqrt{6}$

6.7 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3};-\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

6.8 $\sqrt{395}$ j^2

6.9 $\vec{M}=(1,5;3;-2)\ \mathrm{N\cdot m}$; $M\doteq 3,9\ \mathrm{N\cdot m}$

6.10 $\vec{F}=(-5;-7;-1)\cdot 1,602\cdot 10^{-16}\ \mathrm{N}$; $F\doteq 1,4\cdot 10^{-15}\ \mathrm{N}$; $109°$

6.11 $\vec{F}=(6;3;0)\cdot 1,602\cdot 10^{-15}\ \mathrm{N}$; $F\doteq 1,1\cdot 10^{-14}\ \mathrm{N}$; $59,5°$

7. Parciální derivace

7.1 $\frac{\partial f}{\partial x}=-z+2e^{z\cdot\sin\left(x^2+z\right)}\cdot x\cdot z\cdot\cos\left(x^2+z\right)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4y$, $\frac{\partial f}{\partial z}=-x+e^{z\cdot\sin\left(x^2+z\right)}\cdot\left(z\cdot\cos\left(x^2+z\right)+\sin\left(x^2+z\right)\right)$

7.2 $\frac{\partial g}{\partial x}=2y^2-3x^2\cdot\ln z^4-\frac{y\cdot\sin\left(\ln\left(x+2y\right)\right)}{x+2y}$, $\frac{\partial g}{\partial y}=4xy+\cos\left(\ln\left(x+2y\right)\right)-\frac{2y\cdot\sin\left(\ln\left(x+2y\right)\right)}{x+2y}$, $\frac{\partial g}{\partial z}=-\frac{4x^3}{z}$

7.3 $\frac{\partial h}{\partial x}=e^{x^3}\cdot\cos\left(x+y^2\right)+3e^{x^3}\cdot x^2\cdot\sin\left(x+y^2\right)-\frac{y}{2x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}=2e^{x^3}\cdot y\cdot\cos\left(x+y^2\right)-\ln\sqrt{x}$

7.4 $\frac{\partial v}{\partial x}=2x\cdot y^2-4y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=2x^2\cdot y-4x+\frac{2}{y}$, podezřelé body: $x=\frac{2}{y}$

7.5 $\frac{\partial k}{\partial x}=2y^2-y\cdot z$, $\frac{\partial k}{\partial y}=4x\cdot y-x\cdot z-z\cdot\sin\left(y+2z\right)$, $\frac{\partial k}{\partial z}=x\cdot y+\cos\left(y+2z\right)-2z\cdot\sin\left(y+2z\right)$, podezřelé body: $y=0$ nebo $y=\frac{z}{2}$

8. Lineární diferenciální operátory

8.1 $\left(-z+2x\cdot z\cdot e^{z\sin\left(z+x^2\right)}\cdot\cos\left(z+x^2\right);4y;-x+e^{z\sin\left(z+x^2\right)}\left(z\cdot\cos\left(z+x^2\right)+\sin\left(z+x^2\right)\right)\right)$

8.2 $6x+y+2xy\cos\left(x+xy^2\right)-\frac{x\sqrt{z}\sin\left(\sqrt{z}\right)}{z}$; $z>0$

8.3 $\left(\frac{3yz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}};\frac{-4xz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}};\frac{xy}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right)$; $(x;y;z)\neq(0;0;0)$

8.4 $\left(\frac{-2x^2+xy-2y^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}};\frac{y^2-3yz+z^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}};\frac{-3x^2-2xz-3z^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right)$; $(x;y;z)\neq(0;0;0)$

8.5 0

8.6 $-\frac{y}{x^2}+5z\cdot e^{2x+y}$; $x>0$

8.7 $\left(y\cdot\cos\left(z^2+x\cdot y\right)-2y\cdot z^2\cdot\sin\left(z^2+x\cdot y\right)+e^x\cdot\ln\left(y\cdot z\right);\frac{e^x}{y}+x\cdot\cos\left(z^2+x\cdot y\right)-2x\cdot z^2\cdot\sin\left(z^2+x\cdot y\right);\right.$
$\left.\frac{e^x}{z}+6z\cdot\cos\left(z^2+x\cdot y\right)-4z^3\cdot\sin\left(z^2+x\cdot y\right)\right)$

8.8 0

8.9 $\left(\frac{-k\cdot Q\cdot x}{\varepsilon_r\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}};\frac{-k\cdot Q\cdot y}{\varepsilon_r\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}};\frac{-k\cdot Q\cdot z}{\varepsilon_r\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right)$; $(x;y;z)\neq(0;0;0)$

8.10 $\left(\frac{\kappa\cdot M\cdot m\cdot x}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}};\frac{\kappa\cdot M\cdot m\cdot y}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}};\frac{\kappa\cdot M\cdot m\cdot z}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right)=\frac{\kappa\cdot M\cdot m}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}(x,y,z)=\frac{\kappa\cdot M\cdot m}{r^2}\vec{r_0}$; $(x;y;z)\neq(0;0;0)$

9. Lineární diferenciální operátory 2

9.1 $\mathrm{grad}\left(\alpha\,\beta\right)=\alpha\,\mathrm{grad}\beta+\beta\,\mathrm{grad}\alpha$

9.2 $\mathrm{div}\left(\lambda\vec{v}\right)=\lambda\,\mathrm{div}\vec{v}+\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\lambda$

9.3 $\left(\left(y-z\cdot \mathrm{e}^x\right)\left(3z\cdot\sin x+\sin y\right)+\mathrm{e}^x z\left(3z\cos x-x\sin y\right);-3z\cos x+x\left(y-z\cdot\mathrm{e}^x\right)\cos y+x\sin y;\right.$ $\left.-3\left(y-2z\cdot\mathrm{e}^x\right)\cos x-x\cdot\mathrm{e}^x\sin y\right)$

9.4 $4y-xz-15z\cos x-5\left(z-xy\right)\cos x+5z\left(x-yz\right)\sin x$

9.5 $\delta=2\mathrm{e}^{x^2}\left(1+y^2+2x^2y^2\right)+z\sin x\left(z^2-6\right)$

9.6 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\left(2x,\cos y,1\right)\cdot\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)-3t^2$

9.7 $6x+y+2xy\cos\left(x+xy^2\right)-\dfrac{x\sqrt{z}\sin\left(\sqrt{z}\right)}{z}$; $z>0$

10. Diferenciální rovnice

10.1 $a\left(t\right)=\dfrac{k\cdot t}{m},\ v\left(t\right)=\dfrac{k\cdot t^2}{2m}+v_0,\ s\left(t\right)=\dfrac{k\cdot t^3}{6m}+v_0\cdot t+s_0$

10.2 $a\left(t\right)=\dfrac{F_0\cdot e^{-k\cdot t}}{m},\ v\left(t\right)=-\dfrac{F_0\cdot e^{-k\cdot t}}{k\cdot m}+v_0+\dfrac{F_0}{k\cdot m},\ s\left(t\right)=\dfrac{F_0\cdot e^{-k\cdot t}}{k^2\cdot m}+\left(v_0+\dfrac{F_0}{k\cdot m}\right)\cdot t+s_0-\dfrac{F_0}{k^2\cdot m}$

10.3 $v\left(t\right)=v_0\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot t},\ a\left(t\right)=-v_0\cdot\dfrac{k}{m}\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot t},\ s\left(t\right)=-v_0\cdot\dfrac{m}{k}\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot t}+v_0\cdot\dfrac{m}{k}+s_0$

10.4 $v\left(t\right)=-\dfrac{1}{k}\cdot\ln\left(e^{-k\cdot v_0}-\dfrac{k\cdot F_0}{m}\cdot t\right),$ $a\left(t\right)=\dfrac{F_0}{m\cdot\left(e^{-k\cdot v_0}-\dfrac{k\cdot F_0}{m}\cdot t\right)},$

$$s\left(t\right)=-\frac{1}{k}\cdot\left(-t+t\cdot\ln\left(e^{-k\cdot v_0}-\frac{k\cdot F_0}{m}\cdot t\right)-\frac{m\cdot e^{-k\cdot v_0}\cdot\ln\left(e^{-k\cdot v_0}-\frac{k\cdot F_0}{m}\cdot t\right)}{k\cdot F_0}\right)+s_0+\frac{m\cdot v_0\cdot e^{-k\cdot v_0}}{k\cdot F_0}$$

Zdroje a inspirace příkladů:

[1] život, fantazie a zkušenosti Jaroslava Reichla

Sbírka neprošla jazykovou úpravou. Za případné chyby se omlouvám a prosím na jejich upozornění.