

1. Analytická geometrie - bod, souřadnice bodu, vzdálenost bodů

- 1.1 Rozhodněte, zda trojúhelník s vrcholy $A = [3; 2]$, $B = [-1; -1]$ a $C = [1; -6]$ je pravoúhlý.
- 1.2 Na ose y najděte bod, který je vzdálený od bodu $A = [4; -6]$ o délku 5.
- 1.3 Na ose z najděte bod, který má stejnou vzdálenost od bodů $A = [-2; 1; 4]$ a $B = [3; 0; 1]$.
- 1.4 Určete délku těžnic v trojúhelníku KLM , jsou-li dány body $K = [2; 0]$, $L = [2; 3]$, $M = [-2; 0]$.
- 1.5 V trojúhelníku ABC je délka strany AB rovna $\sqrt{10}$ a vzdálenost bodu A od středu protilehlé strany je rovna $\frac{\sqrt{17}}{2}$, přičemž tento bod má souřadnice $\left[4; \frac{3}{2}\right]$. Bod B má souřadnice $[5; 0]$ a x -ová souřadnice bodu A je 2. Určete zbývající souřadnici bodu A , souřadnice bodu C , souřadnice zbývajících středů stran trojúhelníka ABC a délky zbývajících stran trojúhelníka.

2. Analytická geometrie - vektory (souřadnice, umístění, délka, lineární závislost a nezávislost, odchylka)

- 2.1 Zjistěte, zda vektor $\vec{v} = (1; 2; -1)$ je roven vektoru \overrightarrow{AB} , je-li dáno: $A = [-1; 1; 5]$ a $B = [0; 3; 4]$.
- 2.2 Určete velikost vektoru $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, kde $A = [-1; 0; 3]$ a $B = [2; 2; -2]$.
- 2.3 Určete zbývající souřadnici vektoru $\vec{w} = \left(2; w_y; -\frac{5}{3}\right)$ tak, aby vektor \vec{w} byl jednotkový.
- 2.4 Zjistěte souřadnice součtu vektorů $\vec{a} = (1; 3; 4)$, $\vec{b} = (-2; 3; -1)$, $\vec{c} = (0; -3; 2)$ a $\vec{d} = (0; 1; -2)$.
- 2.5 Jsou dány vektory $\vec{a} = (0; 2; -4)$, $\vec{b} = (1; 2; -1)$, $\vec{c} = (-2; 2; 3)$. Zjistěte souřadnice vektoru a) $\vec{w} = \vec{a} + 0,5\vec{b} - 2\vec{c}$, b) $\vec{w} = -2(\vec{a} + \vec{b}) + 0,1\vec{c}$, c) $\vec{w} = -\vec{a} - 4(0,5\vec{b} - 2\vec{c})$.
- 2.6 Zjistěte, zda vektory $\vec{u} = (12; 1; 14)$, $\vec{v} = (-1; -3; 0)$ a $\vec{w} = (2; 1; 2)$ lineárně závislé či nezávislé.
- 2.7 Zjistěte, zda vektory $\vec{u} = (0; 0; 1)$, $\vec{v} = (2; 1; 1)$ a $\vec{w} = (1; 1; 1)$ lineárně závislé či nezávislé.
- 2.8 Určete $u_3 \in R$ tak, aby vektory $\vec{u} = (4; 4; u_3)$, $\vec{v} = (-2; -2; -1)$, $\vec{w} = (1; 2; 3)$ byly lineárně závislé.
- 2.9 Vypočtete úhel vektorů $\vec{u} = (1; -2)$ a $\vec{v} = (2; 1)$.
- 2.10 Vrcholy trojúhelníku ABC jsou $A = [2; -4; 9]$, $B = [-1; -4; 5]$ a $C = [6; -4; 6]$. Vypočtete délky stran trojúhelníka ABC a úhel při vrcholu C .
- 2.11 Zjistěte, zda čtyřúhelník s vrcholy $A = [5; 2; 6]$, $B = [6; 4; 4]$, $C = [4; 3; 2]$ a $D = [3; 1; 4]$ je čtverec.

3. Analytická geometrie - přímka v rovině (rovnice parametrická, obecná, směrová, vzájemná poloha, odchylka)

- 3.1 Napište parametrické vyjádření přímky p dané bodem $A = [1; -2]$ a vektorem $\vec{u} = (-3; 4)$ s ní rovnoběžným.
- 3.2 Napište parametrické vyjádření přímky procházející body $A = [5; 3]$ a $B = [7; 4]$.
- 3.3 Napište parametrické vyjádření přímky p , která prochází bodem $A = [2; 6]$ a je rovnoběžná s přímkou BC , kde $B = [3; 7]$ a $C = [-4; 8]$.
- 3.4 Rozhodněte, zda body $M = [5; 3]$ a $N = \left[-\frac{31}{2}; 0\right]$ leží na přímce p dané bodem $A = [-5; 7]$ a vektorem $\vec{u} = (3; 2)$.
- 3.5 Napište rovnici přímky, která prochází bodem $A = [2; 1]$ a je kolmá k vektoru $\vec{n} = (7; 2)$.
- 3.6 Napište rovnici přímky, která prochází bodem $A = [3; -2]$ a je rovnoběžná s osou y .
- 3.7 Napište obecnou rovnici přímky, jestliže přímka je dána parametrickým vyjádřením $x = -3 + 5t$ a $y = 1 - 4t; t \in R$.
- 3.8 Napište obecnou rovnici přímky, je-li přímka dána body $A = [-3; 7]$ a $B = [5; -2]$.
- 3.9 Napište obecnou rovnici přímky p , která je kolmá k přímce $q: 3x - 2y + 2 = 0$ a prochází bodem $A = [4; -1]$.
- 3.10 Jsou dány body $A = [-2; 1]$ a $B = [6; 7]$. Bodem A veďte přímku p a bodem B přímku q tak, aby přímky p , q byly vzájemně kolmé a jejich průsečík P ležel na ose x .
- 3.11 Určete souřadnice těžiště trojúhelníka, který je dán body $K = [2; 0]$, $L = [4; 2]$ a $M = [-2; 4]$.
- 3.12 Do soustavy souřadnic zakreslete trojúhelník ODS , jehož strany OD , DS a SO leží po řadě na přímkách $2x + y - 1 = 0$, $-x + y - 2 = 0$ a $x + 2y + 6 = 0$. Určete graficky i početně souřadnice jeho vrcholů.

3.13 Napište rovnici přímky, která prochází průsečíkem přímek $3x - 2y - 9 = 0$ a $4x + y - 1 = 0$ a je rovnoběžná s přímkou $2x + y - 3 = 0$.

3.14 Napište rovnici přímky, která prochází průsečíkem přímek $x + 2y + 3 = 0$ a $3x - y - 5 = 0$ a je kolmá k přímce $3x - 4y = 6$.

3.15 Napište rovnice kolmic vedených k přímce $2x - 4y - 10 = 0$ v jejím průsečíku s osou a) x , b) y .

3.16 Určete vzájemnou polohu dvou přímek p, q , které jsou dány:

$$p: 2x - 3y + 19 = 0$$

$$p: 8x - 2y + 7 = 0$$

$$p: x = 4 - 1,2t, y = 1 - 1,3t; t \in \mathbb{R}$$

$$q: 3x - 2y + 2 = 0$$

$$q: x = 3 + t, y = 15,5 + 4t; t \in \mathbb{R}$$

$$q: x = r, y = 1 - r; r \in \mathbb{R}$$

3.17 Určete velikost vnitřních úhlů trojúhelníka ABC , jehož strany leží na přímkách $a: x\sqrt{3} - y + 1 = 0$, $b: y - 3\sqrt{3} - 1 = 0$ a $c: x\sqrt{3} + 3y - 20\sqrt{3} - 3 = 0$. Určete souřadnice vrcholů tohoto trojúhelníka.

3.18 Světelný paprsek prochází bodem $A = [3; 2]$, odráží se od zrcadla, které leží na přímce $x + y + 1 = 0$ a dopadá do bodu $B = [2; 0]$. Najděte rovnici přímky, na níž leží dopadající a odražený paprsek.

3.19 Světelný paprsek vychází z bodu $K = [5; 4]$, dopadá na osu x pod úhlem 60° , odráží se od ní a poté dopadá na osu y , od ní se také odráží. Určete rovnice přímek, na nichž leží všechny 3 paprsky a souřadnice bodů, v nichž se paprsek odráží od jednotlivých os.

3.20 Určete množinu bodů, které mají od přímky $8x - 6y + 5 = 0$ vzdálenost rovnou 3.

3.21 Napište rovnici přímky, která je ve vzdálenosti 5 od bodu $A = [-4; 2]$ a je a) rovnoběžná, b) kolmá k přímce dané rovnicí $3x - 4y + 2 = 0$.

3.22 Přímka prochází bodem $P = [-2; 5]$ a má od bodu $Q = [3; 5]$ vzdálenost $\sqrt{5}$. Napište její rovnici.

3.23 Napište rovnici trajektorie pohybu bodu $M = [x; y]$, jehož vzdálenost od přímky $p: y = 2x - 4$ je třikrát větší než vzdálenost od přímky $q: y = 4 - 2x$.

3.24 V rovnici přímky $p: 3x + by - 1 = 0$ určete parametr b tak, aby: a) přímka procházela bodem $E = [2; 2]$, b) přímka p byla rovnoběžná s osou y , c) směrový úhel přímky p měl velikost $\frac{\pi}{6}$.

3.25 Napište rovnice os úhlů, jejichž ramena leží na přímkách, které jsou dány rovnicemi:

$$a) x - 3y + 3 = 0 \text{ a } 3x - y + 10 = 0$$

$$b) 6x - 8y + 11 = 0 \text{ a } 12x + 5y + 2 = 0$$

3.26 Vypočtete obsah trojúhelníku s vrcholy $A = [2; 3]$, $B = [5; 1]$ a $C = [0; 0]$.

4. Analytická geometrie - přímka v prostoru (parametrické vyjádření, vzájemná poloha, odchylka)

4.1 Určete zbývající souřadnice bodu $L = [x_L; -3; z_L]$, který leží na přímce MN dané body $M = [1; 1; -1]$ a $N = [-5; -9; 2]$.

4.2 Napište parametrické vyjádření stran trojúhelníka OSN , kde $O = [2; -2; 2]$, $S = [-3; 0; -2]$ a $N = [0; -4; 2]$.

4.3 Určete vzájemnou polohu přímek p a q . Přímka p je dána body $A = [3; -2; -4]$ a $B = [-1; 3; 0]$, přímka q je určena bodem $C = [-2; 2; 1]$ a vektorem $\vec{v} = (1; -5; 6)$, který je s přímkou q rovnoběžný.

4.4 Přímka k prochází body $E = [3; -2; 4]$ a $F = [5; -1; 3]$; přímka l pak prochází body $G = [1; -6; 2]$ a $H = [5; 3; h_3]$. Určete souřadnici h_3 bodu H tak, aby přímky k a l byly: a) různoběžné, b) splývající a c) mimoběžné.

4.5 Zjistěte, zda mohou body $A = [1; 3; 4]$, $B = [2; -2; -1]$, $C = [-3; -2; 1]$ a $D = [5; -1; 0]$ tvořit vrcholy rovinného čtyřúhelníku.

4.6 Je dána přímka p parametrickým vyjádřením $x = m + 2t$, $y = 3t$, $z = 6 - 4t$; $t \in \mathbb{R}$ a přímka q s parametrickým vyjádřením $x = 5 + s$, $y = 1 - 4s$, $z = -4 + s$; $s \in \mathbb{R}$. Určete hodnotu reálného parametru m tak, aby přímky byly různoběžné a poté určete jejich průsečík.

4.7 Určete vzájemnou polohu přímek p a q , které jsou dány takto: $p: x = 1 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = -1 + 3t$; $t \in \mathbb{R}$ a $q: x = 2 + 2s$, $y = 5 + 3s$, $z = s$; $s \in \mathbb{R}$.

5. Analytická geometrie - rovina (parametrické vyjádření, vzájemná poloha rovin, vzájemná poloha přímky a roviny, vzdálenost bodu od přímky a roviny)

5.1 Rovina τ je určena body $K = [1; 2; -3]$, $L = [3; -2; 0]$ a $M = [-1; -2; -3]$. Zjistěte, zda v této rovině leží body $P = [-1; -2; -3]$, $Q = [-5; 2; -6]$ a $R = [11; -2; -6]$.

5.2 Rovina λ je dána body $E = [-1; 3; -3]$, $K = [2; -3; 4]$ a $G = [5; -1; 7]$. Určete zbývající souřadnici bodu $S = [x_s; -4; 1]$ tak, aby ležel v rovině λ .

5.3 Rovina τ je dána bodem $P = [1; 0; -3]$ a vektory a) $\vec{u} = (-1; 2; 1)$ a $\vec{v} = (3; -4; 2)$, b) $\vec{u} = (4; 6; -2)$ a $\vec{v} = (-2; -3; 1)$. Napište její obecnou rovnici.

5.4 V rovině $\tau: 2x + y - 4z + d = 0$ leží bod $A = [2; 2; 1]$. Určete zbývající souřadnici bodu $B = [4; -3; z_B]$ tak, aby v rovině τ ležel, a zbývající souřadnici bodu $C = [-1; y_C; 2]$ tak, aby v rovině τ neležel.

5.5 Rovina ω je dána body $A = [2; 4; -2]$, $B = [0; 3; -1]$ a $C = [1; -2; 3]$. Napište její obecnou rovnici.

5.6 Jsou dány body $P = [3; -1; 2]$ a $Q = [-2; 4; 3]$. Napište obecnou rovnici roviny τ , která prochází bodem Q a je kolmá k vektoru \overline{PQ} .

5.7 Napište obecnou rovnici roviny procházející bodem $L = [3; -6; 1]$, který je patou kolmice vedené počátkem soustavy souřadnic k této rovině.

5.8 Napište obecnou rovnici roviny, která prochází bodem $A = [-1; 2; -3]$ a je a) kolmá k přímce $p: x = 3 - 2t$, $y = -1 + t$, $z = 4 + 2t$; $t \in \mathbb{R}$.

5.9 Napište obecnou rovnici roviny rovnoběžné s osou x a procházející body $M = [0; 1; 3]$ a $N = [2; 4; 5]$.

5.10 Napište obecnou rovnici roviny procházející osou x a bodem $K = [0; -2; 3]$.

5.11 Napište obecnou rovnici roviny rovnoběžné s osou y a protínající osy x a z v bodech $A = [x_A; 0; 0]$ a $B = [0; 0; z_B]$.

5.12 Napište rovnici roviny, která prochází bodem $P = [2; -1; 3]$ a protíná kladné části os souřadnic ve stejných vzdálenostech od počátku.

5.13 Najděte pravoúhlý průmět bodu $Q = [3; 1; -1]$ do roviny $x + 2y + 3z - 30 = 0$.

5.14 Zjistěte, jak daleko od počátku kartézského systému souřadnic leží rovina daná rovnicí $15x - 10y - 6z - 190 = 0$.

5.15 Vypočítejte souřadnice bodu, který je souměrný s počátkem soustavy souřadnic podle roviny $\sigma: 6x + 2y - 9z + 121 = 0$.

5.16 Jsou dány body $A = [1; -2; -2]$, $B = [2; -1; -1]$, $C = [1; -1; -2]$ a $M = [0; 2; -2]$. Vypočítejte vzdálenost bodu M od roviny ABC a najděte souřadnice bodu M v osově souměrnosti podle přímky AB .

5.17 Bodem $D = [3; -2; 1]$ ved'te přímku kolmou k rovině $\tau: 2x - 3y - z + 11 = 0$.

5.18 Vypočítejte úhly, které svírá rovina $\sigma: 2x - 2y + z - 6 = 0$ s osami kartézského systému souřadnic.

5.19 Osou z ved'te rovinu τ , jejíž odchylka od roviny $\rho: 2x + y - z\sqrt{5} = 0$ je 60° .

ŘEŠENÍ

1. Analytická geometrie - bod

1.1 není pravouhelný

1.2 $B = [0; -3]$; $B' = [0; -9]$ 1.4 $t_k = \frac{5}{2}$; $t_l = \sqrt{13}$; $t_m = \frac{\sqrt{73}}{2}$

1.3 $X = \left[0; 0; \frac{11}{6}\right]$

1.5 $A = [2; 1]$, $C = [3; 3]$, $S_{AC} = \left[\frac{5}{2}; 2\right]$, $S_{AB} = \left[\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $|BC| = \sqrt{13}$,

$|AC| = \sqrt{5}$

2. Analytická geometrie - vektory

2.1 $\vec{v} = \vec{AB}$

2.2 $\vec{v} = \sqrt{38}$

2.3 nelze

2.4 $\vec{v} = (-1; 4; 3)$

2.5 a) $\vec{w} = (4, 5; -1; 10, 5)$; b) $\vec{w} = (-2, 2; -7, 8; 10, 3)$,

c) $\vec{w} = (-18; 10; 30)$

2.6 lineárně závislé

2.7 lineárně nezávislé

2.8 $u_3 = 2$

2.9 vektory jsou kolmé

2.10 $|AB| = |AC| = 5$, $|BC| = 5\sqrt{2}$, $\gamma = 45^\circ$

2.11 jedná se o čtverec

3. Analytická geometrie - přímka v rovině

3.1 $x = 1 - 3t$, $y = -2 + 4t$; $t \in \mathbb{R}$

3.2 $x = 5 + 2t$, $y = 3 + t$; $t \in \mathbb{R}$

3.3 $x = 2 - 7t$, $y = 6 + t$; $t \in \mathbb{R}$

3.4 $M \notin p$, $N \in p$

3.5 $7x + 2y - 16 = 0$

3.6 $x - 3 = 0$

3.7 $4x + 5y + 7 = 0$

3.8 $9x + 8y - 29 = 0$

3.9 $2x + 3y - 5 = 0$

3.10 $p: x + 7y - 5 = 0$, $q: 7x - y - 35 = 0$ nebo $p:$

$x + y + 1 = 0$, $q: -x + y - 1 = 0$

3.11 $T = \left[\frac{4}{3}; 2\right]$

3.12 $O = \left[\frac{8}{3}; -\frac{13}{3}\right]$, $D = \left[-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right]$, $S = \left[-\frac{10}{3}; -\frac{4}{3}\right]$

3.13 $2x + y + 1 = 0$

3.14 $4x + 3y + 2 = 0$

3.15 a) $2x + y - 10 = 0$, b) $4x + 2y - 5 = 0$

3.16 různoběžné $P = \left[\frac{53}{5}; \frac{32}{5}\right]$; shodné; různoběžné $P = \left[\frac{52}{25}; -\frac{27}{25}\right]$

3.17 $A = \left[\frac{11\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}; 3\sqrt{3}+1\right]$, $B = \left[\frac{20\sqrt{3}-3}{4\sqrt{3}}; \frac{24\sqrt{3}-3}{4\sqrt{3}}\right]$, $C = [3; 3\sqrt{3}+1]$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 60^\circ$

3.18 dopadající: $5x - 4y - 7 = 0$, odražený: $4x - 5y - 8 = 0$

3.19 $X = [-4\sqrt{3} + 5; 0]$, $Y = [0; 12 - 5\sqrt{3}]$, $x\sqrt{3} - 3y + 12 - 5\sqrt{3} = 0$, $x\sqrt{3} + y - 12 + 5\sqrt{3} = 0$,
 $x\sqrt{3} - 3y + 36 - 15\sqrt{3} = 0$

3.20 2 rovnoběžné přímky: $8x - 6y + 35 = 0$, $8x - 6y - 25 = 0$

3.21 a) $3x - 4y + 45 = 0$, $3x - 4y - 5 = 0$, b) $4x + 3y + 35 = 0$, $4x + 3y - 15 = 0$

3.22 $x + 2y - 8 = 0$ nebo $x - 2y + 12 = 0$

3.23 přímka $x + y - 2 = 0$ nebo $4x + y - 8 = 0$

3.24 a) $b = -\frac{5}{2}$, b) $b = 0$, c) $b = -3\sqrt{3}$

3.25 a) $2x + 2y + 7 = 0$, $4x - 4y + 13 = 0$, b) $42x + 154y - 123 = 0$, $198x - 54y + 163 = 0$

3.26 $\frac{13}{2}$ čtverečních jednotek

4. Analytická geometrie - přímka v prostoru

4.1 $x_L = -1, 4$, $z_L = 0, 2$

4.2 $OS: x = 2 - 5t$, $y = -2 + 2t$, $z = 2 - 4t$; $t \in \mathbb{R}$, $ON: x = 2 - 2r$, $y = -2 - 2r$, $z = 2$; $r \in \mathbb{R}$, $SN: x = -3 + 3s$, $y = -4s$, $z = -2 + 4s$; $s \in \mathbb{R}$

4.3 mimoběžné

4.5 nemohou (přímky AC a BD jsou mimoběžné)

4.4 a) $h_3 = -\frac{31}{7}$, b) nelze, c) $h_3 \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{31}{7} \right\}$

4.6 $m = -3$

4.7 mimoběžné

5. Analytická geometrie - rovina

5.1 $P \in \tau, Q \notin \tau, R \notin \tau$

5.2 $x_S = -\frac{5}{8}$

5.3 a) $8x + 5y - 2z - 14 = 0$, b) vektory neurčují rovinu

5.4 $2x + y - 4z - 2 = 0, z_B = -\frac{3}{4}, y_C \neq 12$

5.5 $x - 9y + 11z + 56 = 0$

5.6 $-5x + 5y + z - 33 = 0$

5.7 $3x - 6y + z - 46 = 0$

5.8 $-2x + y + 2z + 2 = 0$

5.9 $2y - 3z + 7 = 0$

5.10 $-3y + 2z = 0$

5.11 $z_B x + x_A z - x_A z_B = 0$

5.12 $x + y + z - 4 = 0$

5.13 $Q' = [5; 5; 5]$

5.14 10

5.15 $O' = [-12; -4; 18]$

5.16 $\frac{\sqrt{2}}{2}; M' = [4; -4; 0]$

5.17 $x = 3 + 2t, y = -2 - 3t, z = 1 - t; t \in \mathbb{R}$

5.18 $41,81^\circ; 41,81^\circ; 19,47^\circ$

5.19 $3x - y = 0$ nebo $x + 3y = 0$