



**Střední průmyslová škola sdělovací techniky**

**Panská 3**

**Praha 1**

© Jaroslav Reichl, 2022

# **Kvadratické funkce, rovnice a nerovnice**

sbírka úloh z matematiky

**Jaroslav Reichl**

## Obsah

1. Kvadratické funkce.....	3
2. Kvadratické rovnice.....	3
3. Vztahy mezi kořeny kvadratické rovnice .....	4
4. Iracionální rovnice.....	5
5. Kvadratické nerovnice.....	6
6. Kvadratické nerovnice s absolutní hodnotou .....	7
7. Kvadratické rovnice s parametrem .....	7
8. Kvadratické rovnice s absolutní hodnotou .....	7
9. Soustavy rovnic, z nichž alespoň jedna je kvadratická .....	7
10. Slovní úlohy.....	8
Řešení.....	10
1. Kvadratické funkce.....	10
2. Kvadratické rovnice.....	14
3. Vztahy mezi kořeny kvadratické rovnice .....	15
4. Iracionální rovnice.....	15
5. Kvadratické nerovnice.....	15
6. Kvadratické nerovnice s absolutní hodnotou .....	16
7. Kvadratické rovnice s parametrem .....	16
8. Kvadratické rovnice s absolutní hodnotou .....	16
9. Soustavy rovnic, z nichž alespoň jedna je kvadratická .....	17
10. Slovní úlohy.....	17

## 1. Kvadratické funkce

Nakreslete pěkně graf funkce dané funkce, určete souřadnice vrcholu, definiční obor a obor hodnot:

1.1  $f: y = x^2 - 3;$

1.3  $h: y = -x^2 + 1;$

1.2  $g: y = 2(x-1)^2;$

1.4  $j: y = -(x+3)^2 - 2.$

1.5 Napište předpis sudé kvadratické funkce, jejímž oborem hodnot je množina  $H = \langle 3; \infty \rangle$ . Zamyslete se nad počtem řešení této úlohy.

1.6 Napište předpis kvadratické funkce, která má vrchol v bodě  $V = [-2; y_v]$  a jejímž oborem hodnot je množina  $H = (-\infty; 5)$ . Zamyslete se nad počtem řešení této úlohy.

1.7 Napište předpis kvadratické funkce, která má vrchol v bodě  $V = [3; y_v]$ , jejímž oborem hodnot je množina  $H = \langle -1; \infty \rangle$  a jejíž graf prochází bodem  $Q = [2; 1]$ .

1.8 Napište předpis kvadratické funkce, která protíná osu  $x$  v bodech  $K = [-3; 0]$  a  $L = [1; 0]$  a jejímž oborem hodnot je množina  $H = (-\infty; 2)$ .

Nakreslete pěkně graf dané funkce, určete souřadnice vrcholu, vypočítejte průsečík s osou  $y$  a určete definiční obor a obor hodnot:

1.9  $k: y = x^2 - 4x + 5;$

1.18  $u: y = \frac{1}{2}x^2 + |x| - 2;$

1.10  $l: y = 2x^2 + 2x;$

1.19  $v: y = -2x^2 + 4|x|;$

1.11  $m: y = -x^2 + 6x - 7;$

1.20  $w: y = \frac{3}{2}x^2 - 3|x| - \frac{1}{2};$

1.12  $n: y = -\frac{1}{2}x^2 - x - 2;$

1.21  $z: y = |-x^2 + 2|x| + 3|;$

1.13  $p: y = |x^2 - 2x - 1|;$

1.22  $a: y = |2x^2 - 8|x| + 3|;$

1.14  $q: y = \left| \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \right|;$

1.23  $b: y = x^2 + |x-1| - x;$

1.15  $r: y = -|2x^2 - 12x + 16|;$

1.24  $c: y = -x|x-2| + 1;$

1.16  $s: y = |-x^2 - 8x - 12| + 2;$

1.25  $d: y = |x|x+1| + x + 2|.$

1.17  $t: y = x^2 - 4|x|;$

## 2. Kvadratické rovnice

Řešte v množině reálných čísel:

2.1  $x^2 + 1 = 5;$

2.20  $1 - \frac{2p+1}{1-p} = 2p - \frac{3p+2}{p-1};$

2.2  $2x^2 - 5 = 7;$

2.21  $\frac{2-3q}{q-2} - 2\frac{q-1}{q+2} = 1;$

2.3  $2y - 3y^2 = y;$

2.22  $\frac{3-2r}{r-3} - \frac{r-1}{3+r} = \frac{4}{9-r^2};$

2.4  $m^2 + m - 6 = 0;$

2.5  $2z^2 + 7z + 6 = 0;$

2.23  $\frac{3-u}{u^2-u} = \frac{u+1}{u-u^3} - \frac{2-4u}{u^2+u};$

2.6  $6\lambda^2 - 3\lambda - 3 = 0;$

2.7  $8t^2 + 2t - 3 = 0;$

2.24  $x^4 - 20x^2 + 64 = 0;$

- 2.8  $w^2 + \frac{w}{24} - \frac{1}{8} = 0;$
- 2.9  $g^2 + \frac{31}{35}g + \frac{6}{35} = 0;$
- 2.10  $2k^2 + 3k + 5 = 0;$
- 2.11  $5(1 - 2z^2) - 5 = 4z;$
- 2.12  $2a^2 + 4a(2 - a) = 8;$
- 2.13  $5b(1 - 2b) - 5b = -4;$
- 2.14  $2c^2 - 2c(1 - c) - 3 = 2c;$
- 2.15  $1 + d^2 - 2(1 - d^2) - 3d = 2d + 1;$
- 2.16  $1 - 2(f^2 - 1) - 3f = 2 - f(2 - f);$
- 2.17  $(\lambda - 3)(\lambda + 2) + 9\lambda = 3(\lambda^2 - 5) - 1;$
- 2.18  $3g - g(2g^2 - 1) = 2g - g^2(2 - g) + 3g^2;$
- 2.19  $\frac{y+2}{y} - \frac{y-1}{2} = 2y + 1;$
- 2.25  $4n^2 \cdot (n^2 + 3) = 4 \cdot (12 - n^2) + n^2 \cdot (3n^2 + 8);$
- 2.26  $\beta^8 - 15\beta^4 = 16;$
- 2.27  $\sqrt[3]{y^5} + 2\sqrt[3]{y^4} = 3y;$
- 2.28  $\frac{x^2 - 9}{x} - \frac{5x}{x^2 - 9} = 4;$
- 2.29  $\frac{2q^2}{q^2 + 2} + \frac{q^2 + 2}{2q^2} = 2;$
- 2.30  $\alpha^3 - \alpha^2 + 1 = \alpha;$
- 2.31  $3w^3 = w^2 + 2w - 1;$
- 2.32  $v \cdot (v - 1) \cdot (v - 2) \cdot (v - 3) = -1;$
- 2.33  $y^2 \cdot (2 - y)^2 = 1 + 2(1 - y)^2;$
- 2.34  $\frac{g^4 + 1}{2} + \frac{g^4 + 2}{4} + \frac{g^4 + 4}{8} = 5;$
- 2.35  $\alpha^4 = (\alpha - 1)^4;$
- 2.36  $(a^2 + a)^2 - 8(a^2 + a) + 12 = 0.$

2.37 V množině reálných čísel řešte rozkladem rovnici  $z^2 - 5z - 50 = 0.$

2.38 V množině reálných čísel řešte rozkladem rovnici  $k^2 + 17z + 72 = 0.$

2.39 V množině reálných čísel řešte rozkladem rovnici  $m^2 + m - 56 = 0.$

2.40 V množině reálných čísel řešte rozkladem rovnici  $n^2 - 4z + 3 = 0.$

2.41 V množině reálných čísel řešte rozkladem rovnici  $2s^2 - 12s - 32 = 0.$

2.42 V množině reálných čísel řešte rozkladem rovnici  $-3v^2 - 9v + 120 = 0.$

2.43 V množině reálných čísel řešte rozkladem rovnici  $0,5n^2 + 3n + 4 = 0.$

2.44 V množině reálných čísel řešte rozkladem rovnici  $\frac{z^2}{16} - z + 3 = 0.$

2.45 Vypočtete:  $k = 1 + \frac{8}{2 + \frac{8}{2 + \frac{8}{2 + \dots}}}$ .

2.46 Vypočtete:  $m = 2 + \frac{18}{3 + \frac{18}{3 + \frac{18}{3 + \dots}}}$ .

2.47 Vypočtete:

$$n = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}} + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}}}$$

### 3. Vztahy mezi kořeny kvadratické rovnice

3.1 Napište kvadratickou rovnici, jejíž absolutní člen je 20 a jedním z kořenů je číslo 2.

3.2 Napište kvadratickou rovnici, jejíž lineární člen je -5 a jedním z kořenů je číslo 3.

3.3 V kvadratické rovnici  $9x^2 - 24x + c = 0$  určete absolutní člen  $c$  tak, aby se kořeny této rovnice lišily o dva.

- 3.4** V kvadratické rovnici  $4x^2 + b \cdot x + 63 = 0$  určete koeficient lineárního členu  $b$  tak, aby se kořeny této rovnice lišily o jedna.
- 3.5** Napište kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla  $-9$  a  $7$ .
- 3.6** Napište kvadratickou rovnici, která má kořeny o deset menší, než jsou kořeny kvadratické rovnice  $2u^2 + 4u - 15 = 0$ , aniž tuto rovnici řešíte.
- 3.7** Napište kvadratickou rovnici, která má kořeny o dva větší, než jsou kořeny kvadratické rovnice  $3v^2 - 8v + 3 = 0$ , aniž tuto rovnici řešíte.
- 3.8** Napište kvadratickou rovnici, která má kořeny čtyřikrát větší, než jsou kořeny kvadratické rovnice  $-k^2 - 7k + 11 = 0$ , aniž tuto rovnici řešíte.
- 3.9** Napište kvadratickou rovnici, která má kořeny poloviční ve srovnání s kořeny kvadratické rovnice  $4n^2 - 10n + 5 = 0$ , aniž tuto rovnici řešíte.
- 3.10** Napište kvadratickou rovnici, která má kořeny opačné ve srovnání s kořeny kvadratické rovnice  $5p^2 + p - 3 = 0$ , aniž tuto rovnici řešíte.
- 3.11** Napište kvadratickou rovnici, která má za kořeny čísla převrácená ke kořenům kvadratické rovnice  $4q^2 - 11q + 5 = 0$ , aniž tuto rovnici řešíte.
- 3.12** Napište kvadratickou rovnici, která má za kořeny čísla rovná druhé mocnině kořenů kvadratické rovnice  $5z^2 + 6z - 4 = 0$ , aniž tuto rovnici řešíte.

#### **4. Iracionální rovnice**

Řešte v množině reálných čísel:

- |             |   |             |  |
|-------------|---|-------------|--|
| <b>4.1</b>  | $\sqrt{2u^2 - 100} = u;$                              | <b>4.19</b> | $\sqrt{s + 3 - 4\sqrt{1 - s}} = 1 + \sqrt{s};$                                 |
| <b>4.2</b>  | $\sqrt{2y^2 - 49} = y;$                               | <b>4.20</b> | $t + \sqrt{1 + t} \sqrt{t + \frac{7}{4}} = 1;$                                 |
| <b>4.3</b>  | $\sqrt{x^2 + 7} = 2x + 2;$                            | <b>4.21</b> | $\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + 11}} + \sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha + 11}} = 4;$ |
| <b>4.4</b>  | $\sqrt{a + 3} = a + 1;$                               | <b>4.22</b> | $k + \frac{10}{\sqrt{k^2 + 4}} = \sqrt{k^2 + 4};$                              |
| <b>4.5</b>  | $\sqrt{3u + 10} - u = 2;$                             | <b>4.23</b> | $\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{c - 2}} = 2;$   |
| <b>4.6</b>  | $5 + \sqrt{p^2 - 5} = p;$                             | <b>4.24</b> | $\sqrt{y + \sqrt{2y - 1}} + \sqrt{y - \sqrt{2y - 1}} = 2;$                     |
| <b>4.7</b>  | $v - \sqrt{v^2 - 12} = 2;$                            | <b>4.25</b> | $\sqrt{\sqrt{3c - 2} + \sqrt{c + 2}} = \sqrt[4]{8c};$                          |
| <b>4.8</b>  | $q + \sqrt{31 + q - q^2} = 5;$                        | <b>4.26</b> | $\sqrt{\frac{b + 10}{b - 6}} + \sqrt{\frac{b - 6}{b + 10}} = \frac{34}{15};$   |
| <b>4.9</b>  | $3 = \sqrt{2k^2 - k + 4} + 2k;$                       | <b>4.27</b> | $\sqrt{5x^2 - 6x + 8} + \sqrt{5x^2 - 6x - 7} = 1;$                             |
| <b>4.10</b> | $\frac{\sqrt{\alpha^2 - 9}}{\sqrt{\alpha + 3}} = 10;$ | <b>4.28</b> | $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{u}}} = 2^{\frac{1}{120}};$                         |
| <b>4.11</b> | $\sqrt{80} + \sqrt{20} = \sqrt{w - 1};$               | <b>4.29</b> | $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a - 3}} = \sqrt[24]{2};$                                    |
| <b>4.12</b> | $\sqrt{b + 6} + \sqrt{b} = 6;$                        | <b>4.30</b> | $\sqrt{\frac{p^2 - 144}{p - 5}} + \sqrt{5 + p} = \frac{17}{\sqrt{p - 5}}.$     |
| <b>4.13</b> | $\sqrt{10 - m} + \sqrt{m - 8} = 2;$                   |             |  |
| <b>4.14</b> | $\sqrt{\alpha - 4} + \sqrt{\alpha + 4} = 4;$          |             |  |
| <b>4.15</b> | $\sqrt{10 + 3g} = 1 - \sqrt{g + 11};$                 |             |  |
| <b>4.16</b> | $\sqrt{n + 3} + \sqrt{3n - 2} = 7;$                   |             |  |

4.17  $2(\sqrt{r-2}-\sqrt{2})=\sqrt{2r+4}$  ;

4.18  $\sqrt{z+\sqrt{11z+4}}=4$  ;

4.31 Vypočtěte:  $\alpha = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots}}}}}$  .

4.32 Vypočtěte:  $\lambda = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots}}}}}$  .

4.33 Vypočtěte:  $\sigma = \sqrt{30 - \sqrt{30 - \sqrt{30 - \sqrt{30 - \sqrt{30 - \dots}}}}}$  .

4.34 Vypočtěte:  $\rho = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\dots}}}}}$  .

### 5. Kvadratické nerovnice

Řešte v množině reálných čísel:

5.1  $3x^2 - 75 < 0$  ;

5.2  $v^2 - 12v > 0$  ;

5.3  $x^2 + 3x - 40 \geq 0$  ;

5.4  $-2u^2 - 7u - 5 > 0$  ;

5.5  $-k^2 + 3k - 7 > 0$  ;

5.6  $2n^2 + 12n + 18 \leq 0$  ;

5.7  $3\sigma^2 - 24\sigma + 48 > 0$  ;

5.8  $2q(q-2) - 5 < q - 4(q+1)$  ;

5.9  $\beta - \frac{\beta(\beta+1)}{4} \geq 1 - \frac{2\beta-1}{2}$  ;

5.10  $\frac{3(1-k)}{k} - 1 \leq 2+k$  ;

5.11  $\frac{2+a}{2-a} < a - \frac{2(1-a)}{a-2}$  .

5.12 V množině reálných čísel řešte soustavu nerovnic  $1 - \frac{t(1-2t)}{3} < t - \frac{t-4}{4}$  a

$$\frac{2(2-t^2)}{5} \geq 2t - t \cdot \frac{t-3}{10}.$$

5.13 Řešte v množině reálných čísel:  $\frac{3(1-m)}{4} < \frac{m^2-1}{2} \leq 3 - \frac{m-5}{2}$  .

5.14 Určete definiční obor funkce  $h: y = \sqrt{x^2 - 3x - 10}$  .

5.15 Určete definiční obor funkce  $f: y = \sqrt{5x^2 + 60x + 160}$  .

5.16 Určete definiční obor funkce  $j: y = \sqrt{\frac{5}{2x^2 - 14x + 20}}$  .

5.17 Určete definiční obor funkce  $r: y = \sqrt{\frac{11}{21 - 4x - x^2}}$  .

5.18 Určete definiční obor funkce  $u: y = \sqrt{\frac{-3}{4x^2 - 24x - 64}} + \sqrt{48 - 10x - 2x^2}$  .

5.19 Určete definiční obor funkce  $k: y = \frac{2}{\sqrt{x(x-13)}} - \sqrt{-x(x-15)-14}$  .

5.20 Určete definiční obor funkce  $p: y = \sqrt{\frac{7x^2 - 28}{3x^2 + 33x - 180}}$  .

5.21 Pro jaká reálná  $x$  nabývá funkce  $k: y = x^2 + 5x$  funkčních hodnot z intervalu  $\langle -6; 6 \rangle$ ?

## 6. Kvadratické nerovnice s absolutní hodnotou

V množině reálných čísel řešte nerovnice:

6.1  $x|x-4| \geq x+2$ ;

6.2  $a|a+4| \geq a+4$ ;

6.3  $u|u+1|-u|3-u| < 4-2u$ .

## 7. Kvadratické rovnice s parametrem

7.1 Řešte v množině reálných čísel rovnici  $x^2 + 6x + p = 0$  s reálným parametrem  $p$ .

7.2 Řešte v množině reálných čísel rovnici  $(m^2 - 1)x^2 + 2mx + 1 = 0$  s reálným parametrem  $m$ . Pro jaké hodnoty parametru  $m$  jsou oba kořeny a) kladné, b) menší než 5?

7.3 Řešte v množině reálných čísel rovnici  $c^2(x^2 + 2x + 1) + 1 = 0$  s reálným parametrem  $c$ .

7.4 Řešte v množině reálných čísel rovnici  $a \cdot (x^2 + 2x + 1) = x \cdot (4 - 5x)$  s reálným parametrem  $a$ .

7.5 Řešte v množině reálných čísel rovnici  $u \cdot x \cdot (x - 4u) + 4u = u \cdot (2 \cdot u \cdot x + 3)$  s reálným parametrem  $u$ . Pro kterou hodnotu parametru je řešením dané rovnice a) číslo -2, b) číslo 3?

7.6 Řešte v množině reálných čísel kvadratickou rovnici  $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x}$  s reálnými parametry  $a$  a  $b$ .

## 8. Kvadratické rovnice s absolutní hodnotou

V množině reálných čísel řešte rovnice:

8.1  $|y^2 + 3y - 2| = 2$ ;

8.8  $5|b| - 10 = (b+2)(b-2)$ ;

8.2  $|\alpha^2 + 4| = 3$ ;

8.9  $2 - |z^2 - 5z - 6| - z = 1 - 2z$ ;

8.3  $|u^2 - 4| = 1$ ;

8.10  $|x| - |2x^2 + 8x - 24| + 4 = x$ ;

8.4  $x \cdot |x+1| - 2x = 5 - x$ ;

8.11  $\frac{a \cdot |a+1|}{4} - \frac{|a^2 - 2a|}{2} = 3(a-1)$ ;

8.5  $q \cdot (|q-1| + |q+2|) + 1 = q - 2$ ;

8.12  $\frac{|x-1|}{x} + 4 = |x+2| - \frac{1}{x}$ ;

8.6  $|v^2 + 5v| - 2v \cdot (v-3) = -2$ ;

8.13  $|b \cdot |b+1| + 2 + b| = 5$ .

## 9. Soustavy rovnic, z nichž alespoň jedna je kvadratická

9.1 V množině  $\mathbb{Z}^2$  řešte soustavu rovnic  $x^2 + 3y^2 = 13$  a  $y - x = 1$ .

9.2 V množině  $\mathbb{R}^2$  řešte soustavu rovnic  $2u^2 + 3u + v^2 + 4v = 19$  a  $v + 2u - 5 = 0$ .

9.3 V množině  $\mathbb{N}^2$  řešte soustavu rovnic  $2(p+1)^2 + (q-2)^2 - 48 = 0$  a  $p+q-1=0$ .

9.4 V množině  $\mathbb{R}^2$  řešte soustavu rovnic  $2r^2 - 3s^2 = 5$  a  $r^2 + s^2 = 5$ .

9.5 V množině  $\mathbb{R}^2$  řešte soustavu rovnic  $5\alpha^2 + 2\beta^2 = 47$  a  $2\alpha^2 - 5\beta^2 = 13$ .

9.6 V množině  $\mathbb{R}^2$  řešte soustavu rovnic  $p^2 + q^2 + 2p - 4q = 13$  a  $p^2 + q^2 - p + 2q = 1$ .

- 9.7 V množině  $\mathbb{R}^2$  řešte soustavu rovnic  $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 4\beta = 3$  a  $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta = 1$ .
- 9.8 V množině  $\mathbb{R}^2$  řešte soustavu rovnic  $r^2 - s^2 + 4r = 3$  a  $r^2 - s^2 + 2s = 1$ .
- 9.9 V množině  $\mathbb{R}^2$  řešte soustavu rovnic  $4a^2 + b^2 + 4a - 4b = 9$  a  $a^2 + 4b^2 + a - 16b = 6$ .
- 9.10 V množině  $\mathbb{R}^2$  řešte soustavu rovnic  $3(m-1)^2 - 2(n+2)^2 = 19$  a  $2m^2 - 5m + (n+2)^2 = 16$ .
- 9.11 V množině  $\mathbb{R}^2$  řešte soustavu rovnic  $x \cdot y = 6$  a  $3x - 4y + 6 = 0$ .
- 9.12 V množině  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  řešte soustavu rovnic  $a \cdot b = -5$  a  $3a - b = 8$ .
- 9.13 V množině  $\mathbb{R}^2$  řešte soustavu rovnic  $k \cdot l = -6$  a  $2k^2 - l^2 + 1 = 0$ .
- 9.14 V množině  $\mathbb{R}^2$  řešte soustavu rovnic  $s \cdot t = 2$  a  $s^2 + 2t^2 - 9 = 0$ .
- 9.15 V množině  $\mathbb{Z}^3$  řešte soustavu rovnic  $(x+y) \cdot (x+y+z) = 66$ ,  $(y+z) \cdot (x+y+z) = 99$  a  $(x+z) \cdot (x+y+z) = 77$ .
- 9.16 V množině  $\mathbb{Z}^3$  řešte soustavu rovnic  $a+b+c = 2196$ ,  $\sqrt[3]{a+b+c} = 2076$ ,  $a + \sqrt[3]{b+c} = 1860$  a  $a+b + \sqrt[3]{c} = 480$ .

## 10. Slovní úlohy

- 10.1 Součet druhých mocnin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel je 841. Určete tato čísla.
- 10.2 Součin čitatele a jmenovatele neznámého zlomku je 180. Zlomek v základním tvaru je roven  $\frac{4}{5}$ . O jaký zlomek se jedná?
- 10.3 Zvětšením strany čtverce se obsah čtverce zvětšil o 21 %. O kolik procent své původní délky se zvětšila strana čtverce?
- 10.4 V pravoúhlém trojúhelníku TBC je součet délek jeho stran roven 36 cm a součet obsahů čtverců nad jeho stranami je roven  $450 \text{ cm}^2$ . Určete délky stran trojúhelníka TBC.
- 10.5 Pravoúhlý trojúhelník PES má přeponu délky 13 cm. Zvětšíme-li délky jeho obou odvěsen o 3 cm, zvětší se délka přepony o 4 cm. Určete délky stran trojúhelníka PES.
- 10.6 Součet délek tří stran v pravoúhlém trojúhelníku je roven 56 j. Součet druhých mocnin délek stran téhož trojúhelníka je roven  $1250 \text{ j}^2$ . Určete obsah tohoto trojúhelníka.
- 10.7 Obdélníková zahrádka má jednu stranu o čtyři metry delší než druhou. Pěšina, která vede přes zahrádku úhlopříčně, měří 20 m. Jaké jsou rozměry zahrádky?
- 10.8 Tětiva kružnice je od jejího středu vzdálená 4 cm. Tato tětiva je přitom o 1 cm delší, než je poloměr uvažované kružnice. Jaký je poloměr kružnice?
- 10.9 V rovnoramenném trojúhelníku HIV je délka ramene rovna 17 cm a součet délky základny a k ní příslušné výšky je 31 cm. Určete délku základny trojúhelníka HIV.
- 10.10 Aritmetický průměr dvou čísel, jejichž součet je 58, je o 9 větší než geometrický průměr stejných čísel. Určete tato čísla.
- 10.11 Přímka  $q$  v rovině prochází body  $K = [2; \alpha]$ ,  $O = [\alpha; 32]$  a  $S = [0; 0]$ . Určete hodnotu reálného parametru  $\alpha$ .
- 10.12 Určete rozměry papíru ve tvaru obdélníka, jehož obsah je  $1 \text{ m}^2$  a jehož rozměry jsou v poměru  $1:\sqrt{2}$ . Jedná se o papír formátu A0, který tvoří základ používané řady.
- 10.13 Voda v řece proudí vůči břehu rychlostí o  $7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  menší, než je velikost rychlosti pohybu člunu v klidné vodě. Pohybuje-li se člun v této řece kolmo k jejím břehům, je velikost jeho rychlosti vůči břehům o  $1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  větší než velikost jeho rychlosti v klidné vodě. Jak velkou rychlostí se pohybuje člun v klidné vodě? Jak velkou rychlostí se proudí řeka vůči břehům?
- 10.14 K železničnímu přejezdu, na němž uvázl osobní automobil, se blíží stálou rychlostí o



velikosti  $54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  nákladní vlak. Strojvedoucí si osobního automobilu všimne  $s$  metrů před přejezdem. Okamžitě začne brzdit se zrychlením o velikosti  $-0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Zjistěte, zda nastane srážka a jak velkou rychlostí vlak narazí do automobilu, je-li: a)  $s = 250 \text{ m}$ ; b)  $s = 225 \text{ m}$ ; c)  $s = 216 \text{ m}$ .

Pro nákladní vlak sestrojte graf závislosti uražené dráhy na čase a graf závislosti velikosti okamžité rychlosti na čase od začátku brždění. Reakční dobu strojvedoucího považujte za nulovou.

**10.15** Na nádvoří starého hradu je studna. Zvědavý turista nakukuje do studny a přemýšlí, jak hluboko je hladina vody. Vezme kamínek a připraví stopky na mobilním telefonu. Kamínek pustí do studny a zvuk dopadu kamínku do vody uslyší za 4 sekundy po vypuštění kamínku. Jak dlouho padal kamínek do vody? Jak hluboko od ústí studny je v ní voda?

Pohyb kamínku považujte za volný pád s tíhovým zrychlením o velikosti  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  a velikost rychlosti zvuku ve vzduchu hradní studny je  $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**10.16** Jak daleko od středu Země se nachází na spojnici Země a Měsíce tzv. Lagrangeův bod? Lagrangeův bod je takový bod, v němž je gravitační intenzita složeného gravitačního pole dvou uvažovaných těles nulová.

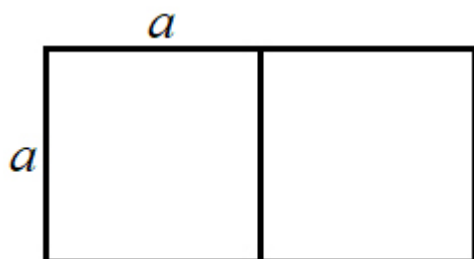
Řešte za zjednodušených podmínek: hmotnost Země je 81krát vyšší než hmotnost Měsíce, vzdálenost středů obou těles je rovna šedesáti poloměrům Země.

**10.17** Dvě kuličky zanedbatelných rozměrů jsou nabitý náboji  $3 \mu\text{C}$  a  $12 \mu\text{C}$  a jsou umístěny ve vzájemné vzdálenosti  $15 \text{ cm}$  od sebe. Jak daleko od kuličky s menším nábojem je nutné umístit třetí kuličku zanedbatelného rozměru nabitou nábojem  $Q$  tak, aby výsledná elektrostatická síla působící na třetí kuličku byla nulová?

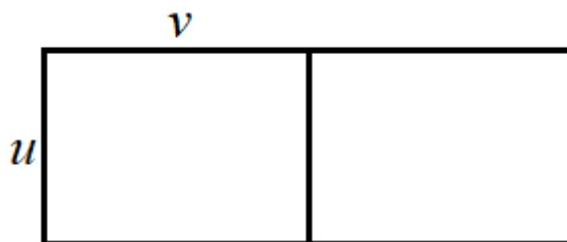
**10.18** Dva sériově spojené rezistory mají výsledný odpor  $1000 \Omega$ . Spojíme-li tytéž rezistory paralelně, je výsledný odpor  $240 \Omega$ . Určete odpory obou spojovaných rezistorů.

**10.19** Dva sériově spojené rezistory mají výsledný odpor  $2R$ . Spojíme-li tytéž rezistory paralelně, je výsledný odpor roven  $\frac{R}{2}$ . Určete odpory obou spojovaných rezistorů v závislosti na odporu  $R$ .

**10.20** Farmář ohradil pletivem na svém pozemku část ve tvaru obdélníka s délkou jedné strany  $a = 120 \text{ m}$ , který rozdělil na dva čtverce (viz obr. 1). Bylo by možné pletivem o stejné délce ohradit obdélník rozdělený na dva obdélníky tak, aby tento nový obdélník měl větší plochu (viz obr. 2)? Pokud ano, určete rozměry tohoto nového obdélníka. O kolik bude mít větší obsah než původní obdélník?



obr. 1



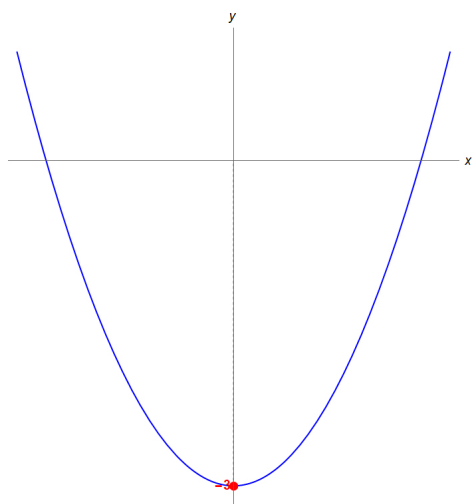
obr. 2

**10.21** V hotelu *Krásná vyhlídka* je celkem 500 dvouúžkových pokojů, které jsou průměrně obsazeny ze 60 %. Cena za jeden pokoj na noc je 2100,- Kč. Nový ředitel na základě statistik zjistil, že za každých 100,- Kč, o které navýší cenu ubytování, klesne průměrně obsazenost hotelu o 50 pokojů. A opačně: každých 100,- Kč, o které sníží cenu ubytování, zvýší obsazenost hotelu o 50 pokojů. Denní náklady na údržbu pokoje (úklid, energie, ...) činí 100,- Kč. Při jaké ceně za ubytování za noc dosáhne majitel hotelu maximálního zisku? Při jaké ceně za ubytování by byl hotel plně obsazen?

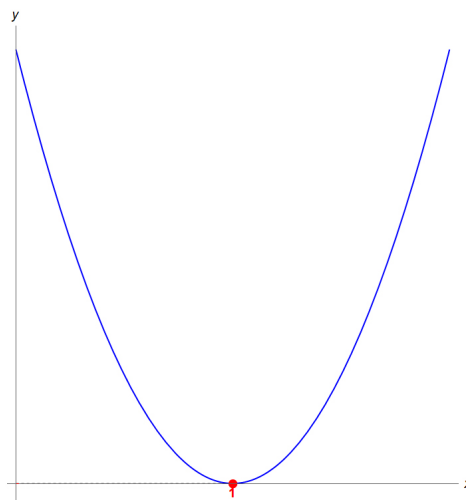
## Řešení

### 1. Kvadratické funkce

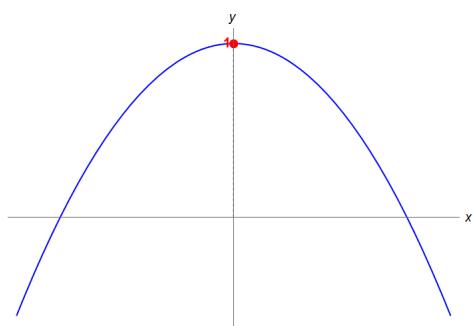
- 1.1  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = \langle -3; \infty \rangle$ , viz obr. 3;
- 1.2  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = \langle 0; \infty \rangle$ , viz obr. 4;
- 1.3  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = (-\infty; 1]$ , viz obr. 5;
- 1.4  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = (-\infty; -2]$ , viz obr. 6;
- 1.5  $f: y = \alpha \cdot x^2 + 3; \alpha \in \mathbb{R}^+$ ;
- 1.6  $g: y = \alpha \cdot (x+2)^2 + 5; \alpha \in \mathbb{R}^-$ ;
- 1.7  $h: y = 2 \cdot (x-3)^2 - 1$ ;
- 1.8  $j: y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2$ ;
- 1.9  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = \langle 1; \infty \rangle$ , viz obr. 7;
- 1.10  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = \left\langle -\frac{1}{2}; \infty \right\rangle$ , viz obr. 8;
- 1.11  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = (-\infty; 2]$ , viz obr. 9;
- 1.12  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = \left\langle -\infty; -\frac{3}{2} \right\rangle$ , viz obr. 10;
- 1.13  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = \langle 0; \infty \rangle$ , viz obr. 11;
- 1.14  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = \langle 0; \infty \rangle$ , viz obr. 12;
- 1.15  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = (-\infty; 0]$ , viz obr. 13;
- 1.16  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = \langle 2; \infty \rangle$ , viz obr. 14;
- 1.17  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = \langle -4; \infty \rangle$ , viz obr. 15;
- 1.18  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = \langle -2; \infty \rangle$ , viz obr. 16;
- 1.19  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = (-\infty; 2]$ , viz obr. 17;
- 1.20  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = \langle -2; \infty \rangle$ , viz obr. 18;
- 1.21  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = \langle 0; \infty \rangle$ , viz obr. 19;
- 1.22  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = \langle 0; \infty \rangle$ , viz obr. 20;
- 1.23  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = \langle 0; \infty \rangle$ , viz obr. 21;
- 1.24  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = \mathbb{R}$ , viz obr. 22;
- 1.25  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = \langle 0; \infty \rangle$ , viz obr. 23.



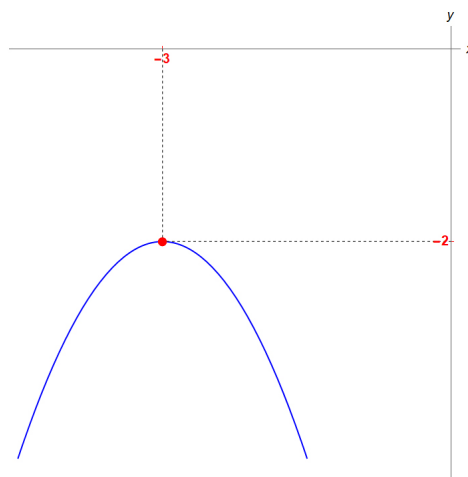
obr. 3



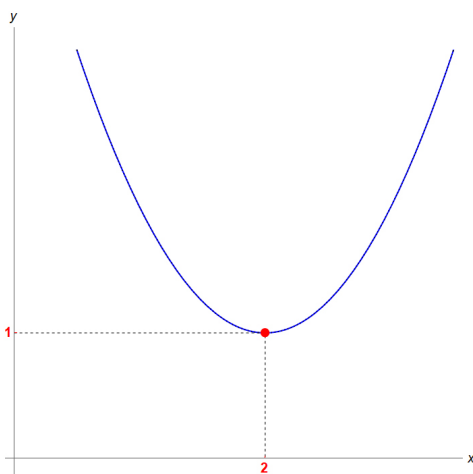
obr. 4



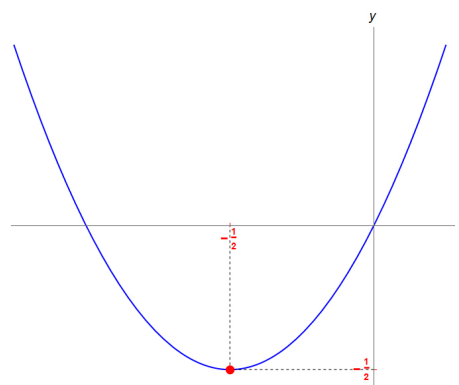
obr. 5



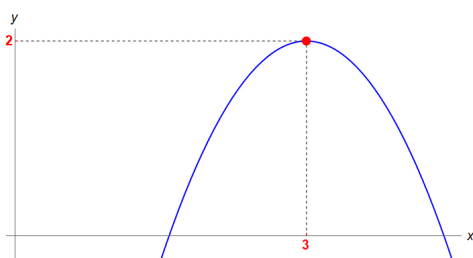
obr. 6



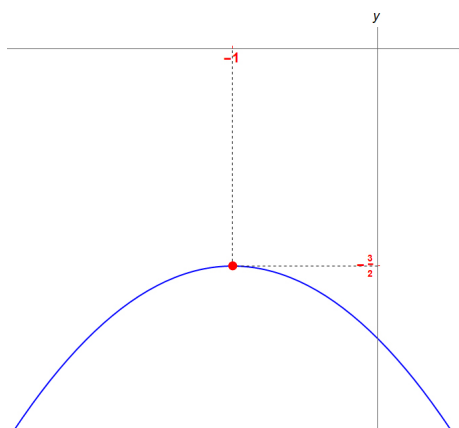
obr. 7



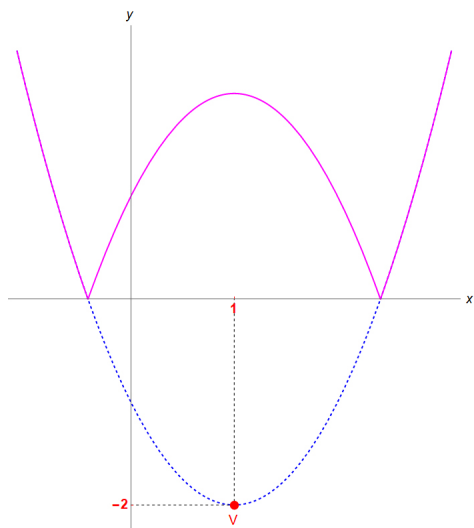
obr. 8



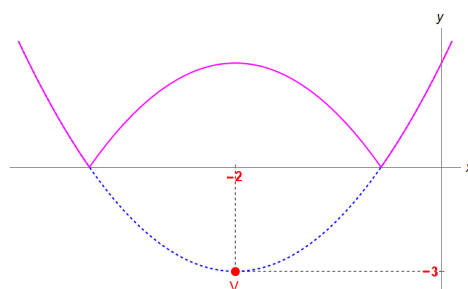
obr. 9



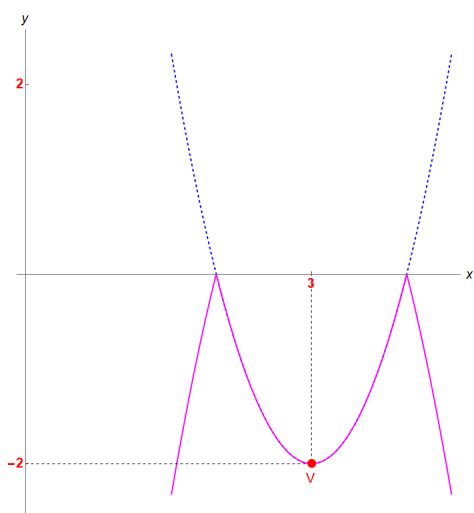
obr. 10



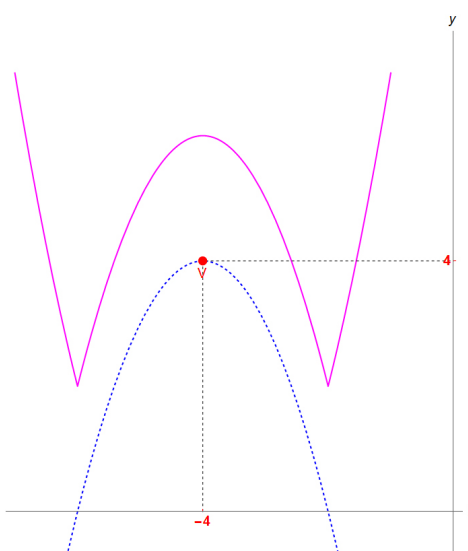
obr. 11



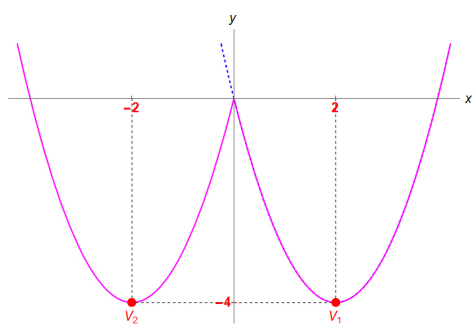
obr. 12



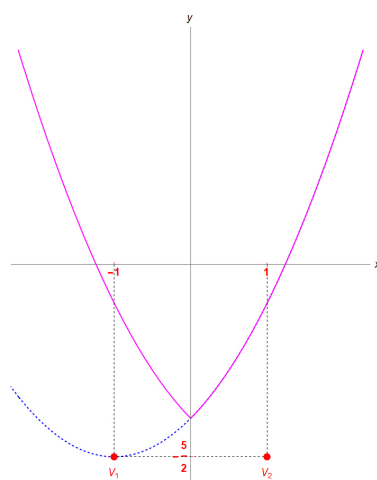
obr. 13



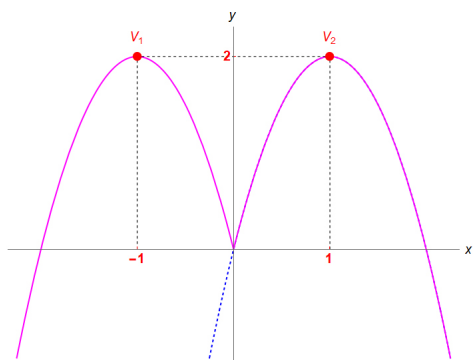
obr. 14



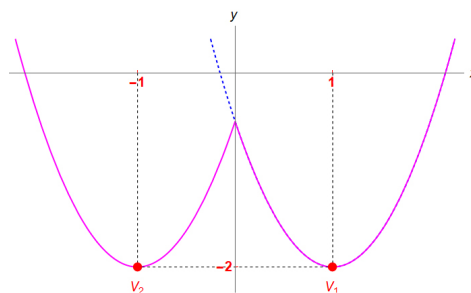
obr. 15



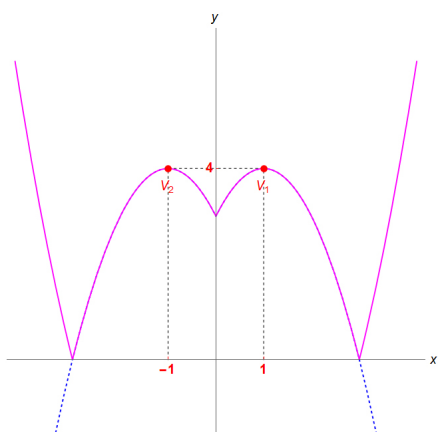
obr. 16



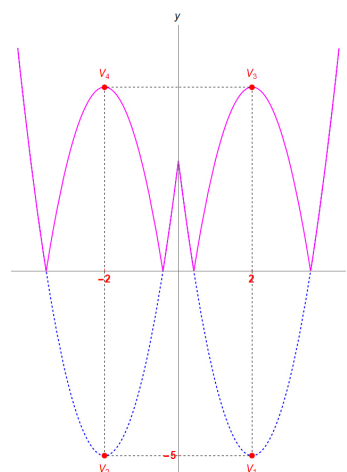
obr. 17



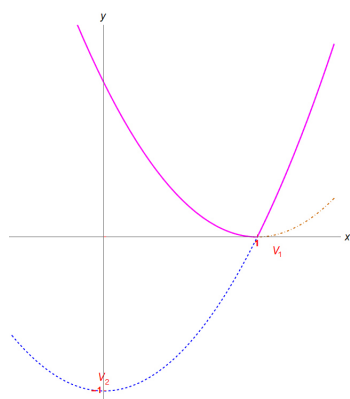
obr. 18



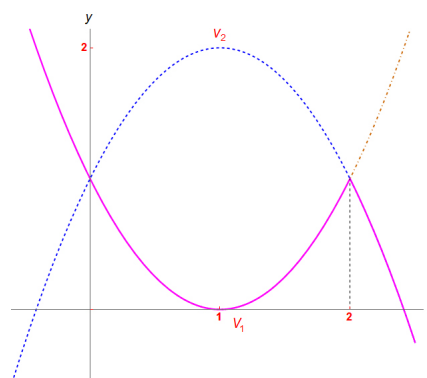
obr. 19



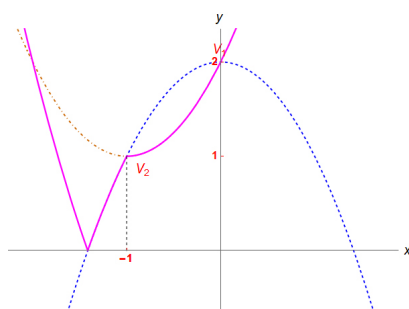
obr. 20



obr. 21



obr. 22



obr. 23

**2. Kvadratické rovnice**

2.1  $P = \{-2; 2\};$

2.2  $P = \{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\};$

2.3  $P = \left\{0; \frac{1}{3}\right\};$

2.4  $P = \{-3; 2\};$

2.5  $P = \left\{-2; -\frac{3}{2}\right\};$

2.6  $P = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\};$

2.7  $P = \left\{-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right\};$

2.8  $P = \left\{-\frac{3}{8}; \frac{1}{3}\right\};$

2.9  $P = \left\{-\frac{3}{5}; -\frac{2}{7}\right\};$

2.10  $P = \emptyset;$

2.11  $P = \left\{-\frac{2}{5}; 0\right\};$

2.12  $P = \{2\};$

2.13  $P = \left\{-\frac{\sqrt{10}}{5}; \frac{\sqrt{10}}{5}\right\};$

2.14  $P = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\};$

2.15  $P = \left\{-\frac{1}{3}; 2\right\};$

2.16  $P = \left\{\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}\right\};$

2.17  $P = \{-1; 5\};$

2.18  $P = \left\{-1; 0; \frac{2}{3}\right\};$

2.19  $P = \left\{-\frac{4}{5}; 1\right\};$

2.20  $P = \{2 \pm \sqrt{5}\};$

2.21  $P = \left\{-\frac{2}{3}; 1\right\};$

2.22  $P = \left\{-\frac{5}{3}; 2\right\};$

2.23  $P = \left\{-\frac{1}{5}; 2\right\};$

2.24  $P = \{-4; -2; 2; 4\};$

2.25  $P = \{-2; 2\};$

2.26  $P = \{-2; 2\};$

2.27  $P = \{0; 1\};$

2.28  $P = \left\{\frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}; \frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}\right\};$

2.29  $P = \{\pm\sqrt{2}\};$

2.30  $P = \{\pm 1\};$

2.31  $P = \left\{\pm 1; \frac{1}{2}\right\};$

2.32  $P = \left\{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\};$

2.33  $P = \{-1; 1; 3\};$

2.34  $P = \{\pm\sqrt{2}\};$

2.35  $P = \left\{\frac{1}{2}\right\};$

2.36  $P = \{-3; -2; 1; 2\};$

2.37  $P = \{-5; 10\};$

2.38  $P = \{-9; -8\};$

2.39  $P = \{-8; 7\};$

2.40  $P = \{1; 3\};$

2.41  $P = \{-2; 8\};$

2.42  $P = \{-8; 5\};$

2.43  $P = \{-4; -2\};$

2.44  $P = \{4; 12\};$

2.45  $k = 3;$

2.46  $m = 5;$

2.47  $n = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

### 3. Vztahy mezi kořeny kvadratické rovnice

- |     |   |      |   |
|-----|---|------|---|
| 3.1 | $x^2 - 12x + 20 = 0;$   | 3.8  | $a \cdot (x^2 + 28x - 176) = 0; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$  |
| 3.2 | $x^2 - 5x + 6 = 0;$   | 3.9  | $a \cdot (16x^2 - 20x + 5) = 0; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$  |
| 3.3 | $c = 7;$  | 3.10 | $a \cdot (5x^2 - x - 3) = 0; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$     |
| 3.4 | $b_1 = -32; b_2 = 32;$  | 3.11 | $a \cdot (5x^2 - 11x + 4) = 0; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$   |
| 3.5 | $a \cdot (x^2 - 2x - 63) = 0; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$    | 3.12 | $a \cdot (25x^2 - 76x + 16) = 0; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$ |
| 3.6 | $a \cdot (2x^2 + 44x + 225) = 0; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$ |      |   |
| 3.7 | $a \cdot (3x^2 - 20x + 31) = 0; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$  |      |   |

### 4. Iracionální rovnice

- |      |                                      |      |  |
|------|--------------------------------------|------|--|
| 4.1  | $P = \{10\};$                        | 4.18 | $P = \{7\};$                             |
| 4.2  | $P = \{7\};$                         | 4.19 | $P = \{1\};$                             |
| 4.3  | $P = \left\{ \frac{1}{3} \right\};$  | 4.20 | $P = \{0\};$                             |
| 4.4  | $P = \{1\};$                         | 4.21 | $P = \{5\};$                             |
| 4.5  | $P = \{2\};$                         | 4.22 | $P = \left\{ \pm \frac{3}{2} \right\};$  |
| 4.6  | $P = \emptyset;$                     | 4.23 | $P = \{10\};$                            |
| 4.7  | $P = \{4\};$                         | 4.24 | $P = \left\{ \frac{3}{2} \right\};$      |
| 4.8  | $P = \left\{ -\frac{1}{2} \right\};$ | 4.25 | $P = \{2\};$                             |
| 4.9  | $P = \left\{ \frac{1}{2} \right\};$  | 4.26 | $P = \{-19; 15\};$                       |
| 4.10 | $P = \{103\};$                       | 4.27 | $P = \left\{ -\frac{14}{5}; 4 \right\};$ |
| 4.11 | $P = \{181\};$                       | 4.28 | $P = \{\sqrt{2}\};$                      |
| 4.12 | $P = \left\{ \frac{25}{4} \right\};$ | 4.29 | $P = \{3 + \sqrt{2}\};$                  |
| 4.13 | $P = \{9\};$                         | 4.30 | $P = \{13\};$                            |
| 4.14 | $P = \{5\};$                         | 4.31 | $\alpha = 4;$                            |
| 4.15 | $P = \emptyset;$                     | 4.32 | $\lambda = 5;$                           |
| 4.16 | $P = \{6\};$                         | 4.33 | $\sigma = 5;$                            |
| 4.17 | $P = \{34\};$                        | 4.34 | $\sqrt[3]{12}.$                          |

### 5. Kvadratické nerovnice

- |     |                                       |      |                                      |
|-----|---------------------------------------|------|--------------------------------------|
| 5.1 | $P = (-5; 5);$                        | 5.12 | $P = \left( 0; \frac{1}{3} \right);$ |
| 5.2 | $P = (-\infty; 0) \cup (12; \infty);$ |      |                                      |

- 5.3  $P = (-\infty; -8) \cup \langle 5; \infty \rangle$ ;
- 5.4  $P = \left(-\frac{5}{2}; -1\right)$ ;
- 5.5  $P = \emptyset$ ;
- 5.6  $P = \{-3\}$ ;
- 5.7  $P = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ ;
- 5.8  $P = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ ;
- 5.9  $P = \langle 1; 6 \rangle$ ;
- 5.10  $P = \langle -3 - 2\sqrt{3}; 0 \rangle \cup \langle -3 + 2\sqrt{3}; \infty \rangle$ ;
- 5.11  $P = (-1; 0) \cup (2; \infty)$ ;
- 5.13  $P = \left\langle -4; -\frac{5}{2} \right\rangle \cup (1; 3)$ ;
- 5.14  $D = \mathbb{R} \setminus (-2; 5)$ ;
- 5.15  $D = \mathbb{R} \setminus (-8; -4)$ ;
- 5.16  $D = \mathbb{R} \setminus \langle 2; 5 \rangle$ ;
- 5.17  $D = (-7; 3)$ ;
- 5.18  $D = (-2; 3)$ ;
- 5.19  $D = (13; 14)$
- 5.20  $D = (-\infty; -15) \cup \langle -2; 2 \rangle \cup (4; \infty)$ ;
- 5.21  $x \in (-6; -3) \cup \langle -2; 1 \rangle$ .

## 6. Kvadratické nerovnice s absolutní hodnotou

- 6.1  $P = \langle 1; 2 \rangle \cup \left\langle \frac{5 + \sqrt{33}}{2}; \infty \right\rangle$ ;
- 6.2  $P = \{-4\} \cup \langle 1; \infty \rangle$ ;
- 6.3  $P = (-2; \sqrt{2})$ .

## 7. Kvadratické rovnice s parametrem

V této kapitole jsou uvedeny pouze výsledky bez uvedení podmínek, za kterých platí. Součástí úplné diskuse řešení jsou ale výsledky pro různé hodnoty zadaného parametru.

- 7.1  $P = \{-3 \pm \sqrt{9 - p}\}$ ;
- 7.2  $P = \left\{ \frac{1}{\pm 1 - m} \right\}$ ;  $m \in (-\infty; -1)$ ;  $m \in \left(-\infty; -\frac{6}{5}\right) \cup \left(-1; \frac{4}{5}\right) \cup (1; \infty)$ ;
- 7.3  $P = \emptyset$ ;
- 7.4  $P = \left\{ \frac{2 - a \pm \sqrt{4 - 9a}}{a + 5} \right\}$ ;
- 7.5  $P = \{3u \pm \sqrt{9u^2 - 1}\}$ ;  $-\frac{5}{12}; \frac{5}{9}$ ;
- 7.6  $P = \{\pm \sqrt{-ab}\}$ .

## 8. Kvadratické rovnice s absolutní hodnotou

- 8.1  $P = \{-4; -3; 0; 1\}$ ;
- 8.2  $P = \emptyset$ ;
- 8.3  $P = \{\pm \sqrt{5}; \pm \sqrt{3}\}$ ;
- 8.4  $P = \{\sqrt{5}\}$ ;
- 8.7  $P = \{-\sqrt{7}; -1; 1; \sqrt{7}\}$ ;
- 8.8  $P = \{-3; -2; 2; 3\}$ ;
- 8.9  $P = \{-1; 5; 7\}$ ;
- 8.10  $P = \{-7; -5; -2 + 3\sqrt{2}; -2 + \sqrt{14}\}$ ;



$$8.5 \quad P = \left\{ -\frac{3}{2} \right\};$$

$$8.6 \quad P = \left\{ -\frac{2}{3}; \frac{11 + \sqrt{129}}{2} \right\};$$

$$8.11 \quad P = \{-4; 1\};$$

$$8.12 \quad P = \left\{ -\frac{5 + \sqrt{17}}{2}; -1; 3 \right\};$$

$$8.13 \quad P = \{-\sqrt{7}; 1\}.$$

### **9. Soustavy rovnic, z nichž alespoň jedna je kvadratická**

$$9.1 \quad P = \{[1; 2]\};$$

$$9.2 \quad P = \left\{ [2; 1]; \left[ \frac{13}{6}; \frac{2}{3} \right] \right\};$$

$$9.3 \quad P = \emptyset;$$

$$9.4 \quad P = \{[-2; -1]; [-2; 1]; [2; -1]; [2; 1]\};$$

$$9.5 \quad P = \{[-3; -1]; [-3; 1]; [3; -1]; [3; 1]\};$$

$$9.6 \quad P = \left\{ \left[ \frac{2}{5}; \frac{11}{5} \right]; [2; -1] \right\};$$

$$9.7 \quad P = \left\{ \left[ \frac{7}{5}; -\frac{4}{5} \right]; [-1; 0] \right\};$$

$$9.8 \quad P = \left\{ \left[ \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right]; [2; 3] \right\};$$

$$9.9 \quad P = \{[-2; 2 \pm \sqrt{5}]; [1; 2 \pm \sqrt{5}]\};$$

$$9.10 \quad P = \left\{ [4; -4]; [4; 0]; \left[ -\frac{12}{7}; \frac{-14 - 2\sqrt{19}}{7} \right]; \left[ -\frac{12}{7}; \frac{-14 + 2\sqrt{19}}{7} \right] \right\};$$

$$9.11 \quad P = \left\{ \left[ -4; -\frac{3}{2} \right]; [2; 3] \right\};$$

$$9.12 \quad P = \{[-5; 1]\};$$

$$9.13 \quad P = \{[-2; 3]; [2; -3]\};$$

$$9.14 \quad P = \left\{ [-1; -2]; [1; 2]; \left[ -2\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]; \left[ 2\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \right\};$$

$$9.15 \quad P = \{[-2; -4; -5]; [2; 4; 5]\};$$

$$9.16 \quad P = \{[125; 343; 1728]\}.$$

### **10. Slovní úlohy**

$$10.1 \quad 20; 21;$$

$$10.2 \quad \frac{12}{15};$$

$$10.3 \quad 10\%;$$

$$10.4 \quad 9 \text{ cm}, 12 \text{ cm}, 15 \text{ cm};$$

- 10.5** 5 cm, 12 cm, 13 cm;  
**10.6**  $84 \text{ j}^2$ ;  
**10.7** 12 m; 16 m;  
**10.8** 5 cm;  
**10.9** 16 cm;  
**10.10** 8; 50;  
**10.11**  $\alpha = 8$ ;  
**10.12** 841 mm, 1189 mm;  
**10.13**  $12 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ;  $5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ;  
**10.14** a) vlak k automobilu nedojede; b) vlak dojde k automobilu a zastaví těsně u něj; c) vlak narazí do automobilu rychlostí o velikosti  $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  
**10.15** 3,8 s; 72 m;  
**10.16** 54 poloměrů Země;  
**10.17** 5 cm;  
**10.18**  $400 \Omega$ ;  $600 \Omega$ ;  
**10.19** R; R;  
**10.20** velký obdélník: 140 m; 210 m;  $600 \text{ m}^2$ ;  
**10.21** 1400 Kč; 1700 Kč.