

Kvadratické rovnice a nerovnice**1. Kvadratické rovnice**

Řešte v množině reálných čísel:

1.1 $x^2 + 1 = 5;$

V: $P = \{-2; 2\}$

1.2 $2x^2 - 5 = 7;$

V: $P = \{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$

1.3 $2y - 3y^2 = y;$

V: $P = \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$

1.4 $5(1 - 2z^2) - 5 = 4z;$

V: $P = \left\{-\frac{2}{5}; 0\right\}$

1.5 $2a^2 + 4a(2 - a) = 8;$

V: $P = \{2\}$

1.6 $5b(1 - 2b) - 5b = -4;$

V: $P = \left\{-\frac{\sqrt{10}}{5}; \frac{\sqrt{10}}{5}\right\}$

1.7 $2c^2 - 2c(1 - c) - 3 = 2c;$

V: $P = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$

1.8 $1 + d^2 - 2(1 - d^2) - 3d = 2d + 1;$

V: $P = \left\{-\frac{1}{3}; 2\right\}$

1.9 $1 - 2(f^2 - 1) - 3f = 2 - f(2 - f);$

V: $P = \left\{\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}\right\}$

1.10 $3g - g(2g^2 - 1) = 2g - g^2(2 - g) + 3g^2;$

V: $P = \left\{-1; 0; \frac{2}{3}\right\}$

1.11 $\frac{y+2}{y} - \frac{y-1}{2} = 2y+1;$

V: $P = \left\{-\frac{4}{5}; 1\right\}$

$$1.12 \quad 1 - \frac{2p+1}{1-p} = 2p - \frac{3p+2}{p-1};$$

$$V: P = \{2 \pm \sqrt{5}\}$$

$$1.13 \quad \frac{2-3q}{q-2} - 2\frac{q-1}{q+2} = 1;$$

$$V: P = \left\{-\frac{2}{3}; 1\right\}$$

$$1.14 \quad \frac{3-2r}{r-3} - \frac{r-1}{3+r} = \frac{4}{9-r^2};$$

$$V: P = \left\{-\frac{5}{3}; 2\right\}$$

$$1.15 \quad \frac{3-u}{u^2-u} = \frac{u+1}{u-u^3} - \frac{2-4u}{u^2+u};$$

$$V: P = \left\{-\frac{1}{5}; 2\right\}$$

$$1.16 \quad x^4 - 20x^2 + 64 = 0;$$

$$V: P = \{-4; -2; 2; 4\}$$

$$1.17 \quad 4n^2 \cdot (n^2 + 3) = 4 \cdot (12 - n^2) + n^2 \cdot (3n^2 + 8).$$

$$V: P = \{-2; 2\}$$

$$1.18 \quad \text{V množině reálných čísel řešte rozkladem rovnici } z^2 - 5z - 50 = 0.$$

$$V: P = \{-5; 10\}$$

$$1.19 \quad \text{V množině reálných čísel řešte rozkladem rovnici } k^2 + 17z + 72 = 0.$$

$$V: P = \{-9; -8\}$$

$$1.20 \quad \text{V množině reálných čísel řešte rozkladem rovnici } m^2 + m - 56 = 0.$$

$$V: P = \{-8; 7\}$$

$$1.21 \quad \text{V množině reálných čísel řešte rozkladem rovnici } n^2 - 4z + 3 = 0.$$

$$V: P = \{1; 3\}$$

$$1.22 \quad \text{V množině reálných čísel řešte rozkladem rovnici } 2s^2 - 12s - 32 = 0.$$

$$V: P = \{-2; 8\}$$

$$1.23 \quad \text{V množině reálných čísel řešte rozkladem rovnici } -3v^2 - 9v + 120 = 0.$$

$$V: P = \{-8; 5\}$$

$$1.24 \quad \text{V množině reálných čísel řešte rozkladem rovnici } 0,5n^2 + 3n + 4 = 0.$$

$$V: P = \{-4; -2\}$$

$$1.25 \quad \text{V množině reálných čísel řešte rozkladem rovnici } \frac{z^2}{16} - z + 3 = 0.$$

$$V: P = \{4; 12\}$$

2. Vztahy mezi kořeny kvadratické rovnice

2.1 Napište kvadratickou rovnici, jejíž absolutní člen je 20 a jedním z kořenů je číslo 2.

$$V: x^2 - 12x + 20 = 0$$

2.2 Napište kvadratickou rovnici, jejíž lineární člen je -5 a jedním z kořenů je číslo 3.

$$V: x^2 - 5x + 6 = 0$$

2.3 V kvadratické rovnici $9x^2 - 24x + c = 0$ určete absolutní člen c tak, aby se kořeny této rovnice lišily o dva.

$$V: c = 7$$

2.4 V kvadratické rovnici $4x^2 + b \cdot x + 63 = 0$ určete koeficient lineárního členu b tak, aby se kořeny této rovnice lišily o jedna.

$$V: b_1 = -32; b_2 = 32$$

2.5 Napište kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla -9 a 7.

$$V: a \cdot (x^2 - 2x - 63) = 0; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2.6 Napište kvadratickou rovnici, která má kořeny o deset menší, než jsou kořeny kvadratické rovnice $2u^2 + 4u - 15 = 0$, aniž tuto rovnici řešíte.

$$V: a \cdot (2x^2 + 44x + 225) = 0; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2.7 Napište kvadratickou rovnici, která má kořeny o dva větší, než jsou kořeny kvadratické rovnice $3v^2 - 8v + 3 = 0$, aniž tuto rovnici řešíte.

$$V: a \cdot (3x^2 - 20x + 31) = 0; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2.8 Napište kvadratickou rovnici, která má kořeny čtyřikrát větší, než jsou kořeny kvadratické rovnice $-k^2 - 7k + 11 = 0$, aniž tuto rovnici řešíte.

$$V: a \cdot (x^2 + 28x - 176) = 0; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2.9 Napište kvadratickou rovnici, která má kořeny poloviční ve srovnání s kořeny kvadratické rovnice $4n^2 - 10n + 5 = 0$, aniž tuto rovnici řešíte.

$$V: a \cdot (16x^2 - 20x + 5) = 0; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2.10 Napište kvadratickou rovnici, která má kořeny opačné ve srovnání s kořeny kvadratické rovnice $5p^2 + p - 3 = 0$, aniž tuto rovnici řešíte.

$$V: a \cdot (5x^2 - x - 3) = 0; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2.11 Napište kvadratickou rovnici, která má za kořeny čísla převrácená ke kořenům kvadratické rovnice $4q^2 - 11q + 5 = 0$, aniž tuto rovnici řešíte.

$$V: a \cdot (5x^2 - 11x + 4) = 0; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2.12 Napište kvadratickou rovnici, která má za kořeny čísla rovná druhé mocnině kořenů kvadratické rovnice $5z^2 + 6z - 4 = 0$, aniž tuto rovnici řešíte.

$$V: a \cdot (25x^2 - 76x + 16) = 0; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

3. Iracionální rovnice

Řešte v množině reálných čísel:

3.1 $\sqrt{x^2 + 7} = 2x + 2;$

$$V: P = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

- 3.2 $\sqrt{a+3} = a+1;$ V: $P = \{1\}$
- 3.3 $\sqrt{3u+10} - u = 2;$ V: $P = \{2\}$
- 3.4 $5 + \sqrt{p^2 - 5} = p;$ V: $P = \emptyset$
- 3.5 $v - \sqrt{v^2 - 12} = 2;$ V: $P = \{4\}$
- 3.6 $q + \sqrt{31 + q - q^2} = 5;$ V: $P = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
- 3.7 $3 = \sqrt{2k^2 - k + 4} + 2k;$ V: $P = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
- 3.8 $\sqrt{10-m} + \sqrt{m-8} = 2;$ V: $P = \{9\}$
- 3.9 $\sqrt{10+3g} = 1 - \sqrt{g+11};$ V: $P = \emptyset$
- 3.10 $\sqrt{n+3} + \sqrt{3n-2} = 7;$ V: $P = \{6\}$
- 3.11 $2(\sqrt{r-2} - \sqrt{2}) = \sqrt{2r+4};$ V: $P = \{34\}$
- 3.12 $\sqrt{z + \sqrt{11z+4}} = 4;$ V: $P = \{7\}$
- 3.13 $\sqrt{s+3} - 4\sqrt{1-s} = 1 + \sqrt{s};$ V: $P = \{1\}$
- 3.14 $t + \sqrt{1+t\sqrt{t+\frac{7}{4}}} = 1;$ V: $P = \{0\}$
- 3.15 $\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{c-2}} = 2;$ V: $P = \{10\}$
- 3.16 $\sqrt{\sqrt{3c-2} + \sqrt{c+2}} = \sqrt[4]{8c}.$ V: $P = \{2\}$

4. Kvadratické nerovnice

Řešte v množině reálných čísel:

4.1 $3x^2 - 75 < 0$;
 V: $P = (-5; 5)$

4.2 $v^2 - 12v > 0$;
 V: $P = (-\infty; 0) \cup (12; \infty)$

4.3 $x^2 + 3x - 40 \geq 0$;
 V: $P = (-\infty; -8) \cup (5; \infty)$

4.4 $-2u^2 - 7u - 5 > 0$;
 V: $P = \left(-\frac{5}{2}; -1\right)$

4.5 $2q(q-2) - 5 < q - 4(q+1)$;
 V: $P = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$

4.6 $\beta - \frac{\beta(\beta+1)}{4} \geq 1 - \frac{2\beta-1}{2}$;
 V: $P = (1; 6)$

4.7 $\frac{3(1-k)}{k} - 1 \leq 2+k$;
 V: $P = \left(-3 - 2\sqrt{3}; 0\right) \cup \left(-3 + 2\sqrt{3}; \infty\right)$

4.8 $\frac{2+a}{2-a} < a - \frac{2(1-a)}{a-2}$.
 V: $P = (-1; 0) \cup (2; \infty)$

4.9 V množině reálných čísel řešte soustavu rovnic $1 - \frac{t(1-2x)}{3} < t - \frac{t-4}{4}$ a
 $\frac{2(2-t^2)}{5} \geq 2t - t \cdot \frac{t-3}{10}$.
 V: $P = \left(0; \frac{1}{3}\right)$

4.10 Řešte v množině reálných čísel: $\frac{3(1-m)}{4} < \frac{m^2-1}{2} \leq 3 - \frac{m-5}{2}$.
 V: $P = \left(-4; -\frac{5}{2}\right) \cup (1; 3)$

4.11 Určete definiční obor funkce $f: y = \sqrt{5x^2 + 60x + 160}$.
 V: $D = \mathbb{R} \setminus (-8; -4)$

4.12 Určete definiční obor funkce $j: y = \sqrt{\frac{5}{2x^2 - 14x + 20}}$.
 V: $D = \mathbb{R} \setminus (2; 5)$

4.13 Určete definiční obor funkce $u: y = \sqrt{\frac{-3}{4x^2 - 24x - 64}} + \sqrt{48 - 10x - 2x^2}$.
 V: $D = (-2; 3)$

4.14 Určete definiční obor funkce $p: y = \sqrt{\frac{7x^2 - 28}{3x^2 + 33x - 180}}$.

$$V: D = (-\infty; -15) \cup \langle -2; 2 \rangle \cup (4; \infty)$$

4.15 Pro jaká reálná x nabývá funkce $k: y = x^2 + 5x$ funkčních hodnot z intervalu $\langle -6; 6 \rangle$?

$$V: x \in (-6; -3) \cup \langle -2; 1 \rangle$$

5. Kvadratické rovnice s parametrem

V této kapitole jsou uvedeny pouze výsledky bez uvedení podmínek, za kterých platí. Součástí úplné diskuse řešení jsou ale výsledky pro různé hodnoty zadaného parametru.

5.1 Řešte v množině reálných čísel rovnici $x^2 + 6x + p = 0$ s reálným parametrem p .

$$V: P = \{-3 \pm \sqrt{9 - p}\}$$

5.2 Řešte v množině reálných čísel rovnici $(m^2 - 1)x^2 + 2mx + 1 = 0$ s reálným parametrem m . Pro jaké hodnoty parametru m jsou oba kořeny a) kladné, b) menší než 5?

$$V: P = \left\{ \frac{1}{\pm 1 - m} \right\}; m \in (-\infty; -1); m \in \left(-\infty; -\frac{6}{5} \right) \cup \left(-1; \frac{4}{5} \right) \cup (1; \infty)$$

5.3 Řešte v množině reálných čísel rovnici $c^2(x^2 + 2x + 1) + 1 = 0$ s reálným parametrem c .

$$V: P = \emptyset$$

5.4 Řešte v množině reálných čísel rovnici $a \cdot (x^2 + 2x + 1) = x \cdot (4 - 5x)$ s reálným parametrem a .

$$V: P = \left\{ \frac{2 - a \pm \sqrt{4 - 9a}}{a + 5} \right\}$$

5.5 Řešte v množině reálných čísel rovnici $u \cdot x \cdot (x - 4u) + 4u = u \cdot (2 \cdot u \cdot x + 3)$ s reálným parametrem u . Pro kterou hodnotu parametru je řešením dané rovnice a) číslo -2, b) číslo 3?

$$V: P = \{3u \pm \sqrt{9u^2 - 1}\}; -\frac{5}{12}; \frac{5}{9}$$

6. Kvadratické rovnice s absolutní hodnotou

V množině reálných čísel řešte rovnice:

6.1 $x \cdot |x + 1| - 2x = 5 - x$;

$$V: P = \{\sqrt{5}\}$$

6.2 $q \cdot (|q - 1| + |q + 2|) + 1 = q - 2$;

$$V: P = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

6.3 $|v^2 + 5v| - 2v \cdot (v - 3) = -2$;

$$V: P = \left\{ -\frac{2}{3}; \frac{11 + \sqrt{129}}{2} \right\}$$

6.4 $m - |2m^2 - 8| + 5 = m - 1$;

$$V: P = \{-\sqrt{7}; -1; 1; \sqrt{7}\}$$

6.5 $2 - |z^2 - 5z - 6| - z = 1 - 2z;$

V: $P = \{-1; 5; 7\}$

6.6 $|x| - |2x^2 + 8x - 24| + 4 = x;$

V: $P = \{-7; -5; -2 + 3\sqrt{2}; -2 + \sqrt{14}\}$

6.7 $\frac{a \cdot |a+1|}{4} - \frac{|a^2 - 2a|}{2} = 3(a-1);$

V: $P = \{-4; 1\}$

6.8 $\frac{|x-1|}{x} + 4 = |x+2| - \frac{1}{x};$

V: $P = \left\{ -\frac{5 + \sqrt{17}}{2}; -1; 3 \right\}$

6.9 $|b \cdot |b+1| + 2 + b| = 5.$

V: $P = \{-\sqrt{7}; 1\}$

7. Soustavy rovnic, z nichž alespoň jedna je kvadratická

7.1 V množině \mathbb{Z}^2 řešte soustavu rovnic $x^2 + 3y^2 = 13$ a $y - x = 1.$

V: $P = \{[1; 2]\}$

7.2 V množině \mathbb{R}^2 řešte soustavu rovnic $2u^2 + 3u + v^2 + 4v = 19$ a $v + 2u - 5 = 0.$

V: $P = \left\{ [2; 1]; \left[\frac{13}{6}; \frac{2}{3} \right] \right\}$

7.3 V množině \mathbb{N}^2 řešte soustavu rovnic $2(p+1)^2 + (q-2)^2 - 48 = 0$ a $p+q-1=0.$

V: $P = \emptyset$

7.4 V množině \mathbb{R}^2 řešte soustavu rovnic $2r^2 - 3s^2 = 5$ a $r^2 + s^2 = 5.$

V: $P = \{[-2; -1]; [-2; 1]; [2; -1]; [2; 1]\}$

7.5 V množině \mathbb{R}^2 řešte soustavu rovnic $5\alpha^2 + 2\beta^2 = 47$ a $2\alpha^2 - 5\beta^2 = 13.$

V: $P = \{[-3; -1]; [-3; 1]; [3; -1]; [3; 1]\}$

7.6 V množině \mathbb{R}^2 řešte soustavu rovnic $3(m-1)^2 - 2(n+2)^2 = 19$ a $2m^2 - 5m + (n+2)^2 = 16.$

V: $P = \left\{ [4; -4]; [4; 0]; \left[-\frac{12}{7}; \frac{-14 - 2\sqrt{19}}{7} \right]; \left[-\frac{12}{7}; \frac{-14 + 2\sqrt{19}}{7} \right] \right\}$

7.7 V množině \mathbb{R}^2 řešte soustavu rovnic $x \cdot y = 6$ a $3x - 4y + 6 = 0.$

V: $P = \left\{ \left[-4; -\frac{3}{2} \right]; [2; 3] \right\}$

7.8 V množině $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ řešte soustavu rovnic $a \cdot b = -5$ a $3a - b = 8.$

V: $P = \{[-5; 1]\}$

7.9 V množině \mathbb{R}^2 řešte soustavu rovnic $k \cdot l = -6$ a $2k^2 - l^2 + 1 = 0.$

V: $P = \{[-2; 3]; [2; -3]\}$

7.10 V množině \mathbb{R}^2 řešte soustavu rovnic $s \cdot t = 2$ a $s^2 + 2t^2 - 9 = 0$.

$$V: P = \left\{ [-1; -2]; [1; 2]; \left[-2\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]; \left[2\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \right\}$$

8. Slovní úlohy

8.1 Součet druhých mocnin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel je 841. Určete tato čísla.

V: 20; 21

8.2 Součin čitatele a jmenovatele neznámého zlomku je 180. Zlomek v základním tvaru je roven $\frac{4}{5}$. O jaký zlomek se jedná?

V: $\frac{12}{15}$

8.3 Zvětšením strany čtverce se obsah čtverce zvětšil o 21 %. O kolik procent své původní délky se zvětšila strana čtverce?

V: 10 %

8.4 V pravoúhlém trojúhelníku TBC je součet délek jeho stran roven 36 cm a součet obsahů čtverců nad jeho stranami je roven 450 cm^2 . Určete délky stran trojúhelníka TBC.

V: 9 cm, 12 cm, 15 cm

8.5 Pravoúhlý trojúhelník PES má přeponu délky 13 cm. Zvětšíme-li délky jeho obou odvěsen o 3 cm, zvětší se délka přepony o 4 cm. Určete délky stran trojúhelníka PES.

V: 5 cm, 12 cm, 13 cm

8.6 Obdélníková zahrádka má jednu stranu o čtyři metry delší než druhou. Pěšina, která vede přes zahrádku úhlopříčně, měří 20 m. Jaké jsou rozměry zahrádky?

V: 12 m; 16 m

8.7 Tětiva kružnice je od jejího středu vzdálená 4 cm. Tato tětiva je přitom o 1 cm delší, než je poloměr uvažované kružnice. Jaký je poloměr kružnice?

V: 5 cm

8.8 V rovnoramenném trojúhelníku HIV je délka ramene rovna 17 cm a součet délky základny a k ní příslušné výšky je 31 cm. Určete délku základny trojúhelníka HIV.

V: 16 cm

8.9 Aritmetický průměr dvou čísel, jejichž součet je 58, je o 9 větší než geometrický průměr stejných čísel. Určete tato čísla.

V: 8; 50

8.10 Voda v řece proudí vůči břehu rychlostí o $7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ menší, než je velikost rychlosti pohybu člunu v klidné vodě. Pohybuje-li se člun v této řece kolmo k jejím břehům, je velikost jeho rychlosti vůči břehům o $1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ větší, než velikost jeho rychlosti v klidné vodě. Jak velkou rychlostí se pohybuje člun v klidné vodě? Jak velkou rychlostí se proudí řeka vůči břehům?

V: $12 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$; $5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

8.11 K železničnímu přejezdu, na němž uvázl osobní automobil, se blíží stálou rychlostí o velikosti $54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ nákladní vlak. Strojvedoucí si osobního automobilu všimne s metrů před přejezdem. Okamžitě začne brzdit se zrychlením o velikosti $-0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Zjistěte, zda nastane srážka a jak velkou rychlostí vlak narazí do automobilu, je-li: a) $s = 250 \text{ m}$; b) $s = 225 \text{ m}$; c) $s = 216 \text{ m}$.

Pro nákladní vlak sestrojte graf závislosti uražené dráhy na čase a graf závislosti velikosti okamžité rychlosti na čase od začátku brždění. Reakční dobu strojvedoucího považujte za nulovou.

V: a) vlak k automobilu nedojede; b) vlak dojde k automobilu a zastaví těsně u něj; c) vlak narazí do automobilu rychlostí o velikosti $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

8.12 Na nádvoří starého hradu je studna. Zvědavý turista nakukuje do studny a přemýšlí, jak hluboko je hladina vody. Vezme kamínek a připraví stopky na mobilním telefonu. Kamínek pustí do studny a zvuk dopadu kamínku do vody uslyší za 4 sekundy po vypuštění kamínku. Jak dlouho padal kamínek do vody? Jak hluboko od ústí studny je v ní voda?

Pohyb kamínku považujte za volný pád s tíhovým zrychlením o velikosti $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a velikost rychlosti zvuku ve vzduchu hradní studny je $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

V: 3,8 s; 72 m

8.13 Jak daleko od středu Země se nachází na spojnici Země a Měsíce tzv. Lagrangeův bod? Lagrangeův bod je takový bod, v němž je gravitační intenzita složeného gravitačního pole dvou uvažovaných těles nulová.

Řešte za zjednodušených podmínek: hmotnost Země je 81krát vyšší než hmotnost Měsíce, vzdálenost středů obou těles je rovna šedesáti poloměrům Země.

V: 54 poloměrů Země

8.14 Dvě kuličky zanedbatelných rozměrů jsou nabitý náboji $3 \mu\text{C}$ a $12 \mu\text{C}$ a jsou umístěny ve vzájemné vzdálenosti 15 cm od sebe. Jak daleko od kuličky s menším nábojem je nutné umístit třetí kuličku zanedbatelného rozměru nabitou nábojem Q tak, aby výsledná elektrostatická síla působící na třetí kuličku byla nulová?

V: 5 cm

8.15 Dva sériově spojené rezistory mají výsledný odpor 1000Ω . Spojíme-li tytéž rezistory paralelně, je výsledný odpor 240Ω . Určete odpory obou spojovaných rezistorů.

V: 400Ω ; 600Ω

8.16 Dva sériově spojené rezistory mají výsledný odpor $2R$. Spojíme-li tytéž rezistory paralelně, je výsledný odpor roven $\frac{R}{2}$. Určete odpory obou spojovaných rezistorů v závislosti na odporu R .

V: R ; R