PANSKÁ

Střední průmyslová škola sdělovací techniky
Panská 3
Praha 1

Sbírka úloh z matematiky

Sbírka úloh z matematiky

určená studentům 4. ročníku jako příprava k maturitní zkoušce z matematiky a k přijímacím zkouškám na vysoké školy technického směru

Jaroslav Reichl

Obsah

1. Čísla a operace s čísly

1.1 Vypočtěte $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$.

1.2 Vypočtěte $\frac{4}{9}-\frac{5}{3}\cdot\frac{12}{20}$.

1.3 Vypočtěte $-\frac{4}{9}+\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{16}+\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{2}{4}\right)$.

1.4 Vypočtěte $\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{3}{5}-\frac{3}{4}$.

1.5 Vypočtěte $\frac{5}{3}-\frac{6}{7}\left(\frac{3}{8}-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{12}$.

1.6 Vypočtěte $\frac{4}{3}-\frac{5}{6}:\frac{20}{9}-\frac{1}{8}$.

1.7 Vypočtěte $\left(\frac{3}{8}+3\frac{3}{4}\right):\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{4}\right)-\frac{2}{3}\cdot 0,6$.

1.8 Vypočtěte $2,4+0,6\cdot 0,5:0,25$.

1.9 Vypočtěte $1,2:0,4+0,2$.

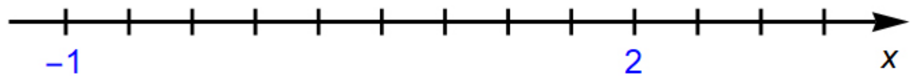
1.10 Vypočtěte $(0,7-0,3):2+1,8:(0,5+0,1)$.

1.11 Číslo 240 zvětšete o jeho $\frac{2}{3}$. Jaké číslo získáte?

1.12 Jakou část čísla 240 musíme přidat, abychom získali číslo 280?

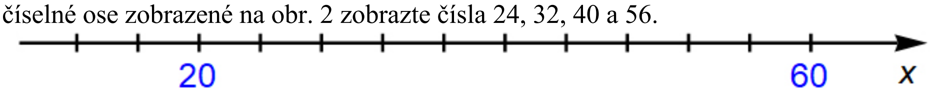
1.13 K neznámému čísla jsme přidali jeho $\frac{5}{6}$ a získali jsme číslo 550. Jaké je neznámé číslo?

1.14 Na číselné ose zobrazené na obr. 1 zobrazte čísla $-\frac{2}{3}$, 0, $\frac{4}{3}$ a $2\frac{2}{3}$.



obr. 1

1.15 Na číselné ose zobrazené na obr. 2 zobrazte čísla 24, 32, 40 a 56.



obr. 2

1.16 Na mapě v měřítku 1:50000 je vzdálenost dvou zajímavých míst rovna 5 cm. Jak jsou tato místa od sebe daleko ve skutečnosti?

1.17 Turista šel stálou rychlostí $4\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ po dobu 3 hodiny. Jakou délka má jeho trasa na mapě v měřítku 1:75000?

1.18 Na obr. 3 je zobrazen grafický převod vzdáleností na mapě a ve skutečnosti. Určete měřítko použité mapy.

obr. 3

1.19 Na obr. 4 je zobrazen grafický převod vzdáleností na mapě a ve skutečnosti. Určete měřítko použité mapy.

obr. 4

1.20 Zaokrouhlete číslo 1256,4961 a) na tisíce, b) na stovky, c) na desítky, d) na jednotky, e) na desetiny, f) na setiny, g) na tisíciny.

2. Procenta

2.1 Kolik procent činí 250,- Kč ze 2000,- Kč?

2.2 Babička jela 3. 9. 2018 vlakem na návštěvu za svými vnuky. Na nádraží u pokladny zjistila, že oproti dřívějšímu plnému jízdní ušetřila 120 korun. Kolik stálo plné jízdné před 75% slevou, která vešla 1. 9. 2018 v platnost?

2.3 Ve třídě je 30 žáků. Třetina žáků chodí na elektrotechnický kroužek a 20 % žáků třídy do šachového kroužku. Kolik žáků chodí do každého z kroužků?

2.4 Jistá politická strana měla na konci roku 2018 podporu 24 % občanů. Od konce roku 2017 preference strany vzrostly o dvojnásobek původní hodnoty. Kolik procent občanů by stranu volilo na konci roku 2017?

2.5 Na obr. 5 je zobrazen obal z koření. Jakou hmotnost mělo koření v původním balíčku (před přidáním)? Jakou hmotnost má koření po přidání koření navíc?

2.6 Na obr. 6 je zobrazena reklama na bazény. Je tvrzení na billboardu naspané pravdivé? Zdůvodněte.

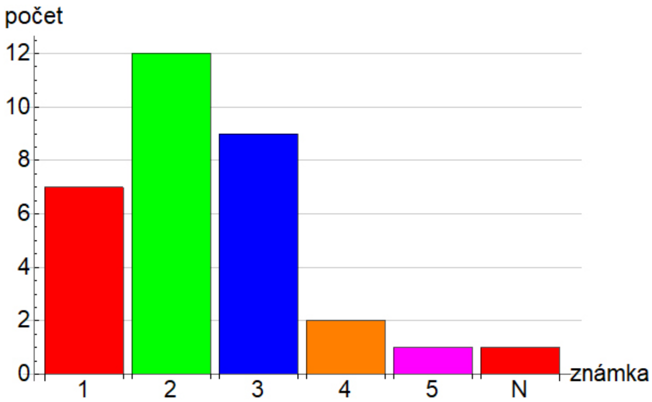
obr. 5

obr. 6

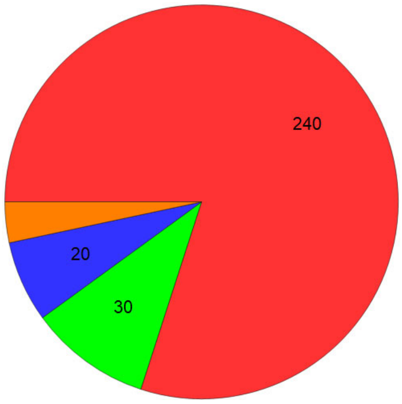
2.7 Mobilní telefon byl zlevněn o 5 % původní ceny. Jaká byla původní cena telefonu, jestliže jej Jarda koupil za 19950,- Kč?

2.8 Powerbanka byla v e-shopu zlevněna o 200,- Kč. Poštovné a dopravné, které Jarda při objednání zaplatil navíc k ceně powerbanky činilo 15 % původní ceny. Kolik Jarda zaplatil, jestliže původní cena powerbanky byla 900,- Kč?

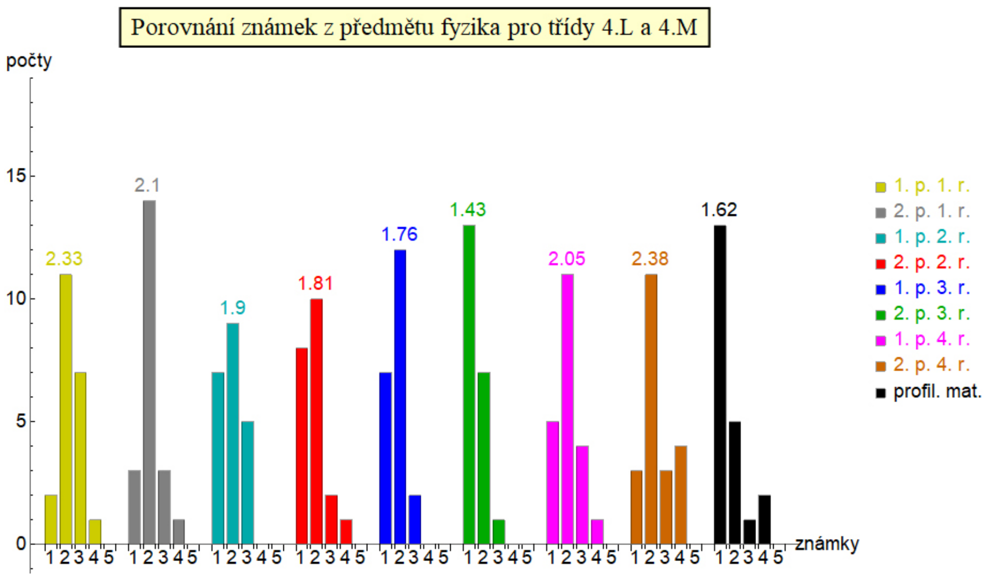
2.9 Deset procent žáků, kteří navštěvují kroužek elektrotechniky, se rozhodlo, že si postaví vlastní nabíječku na telefon. 30 % žáků bude stavět blikající osvětlení, čtvrtina žáků chce stavět zkoušečku, pětina žáků si chce sestavit vysílačku a šest žáků staví zesilovač k elektrické kytaře. Kolik žáků chodí do kroužku?



obr. 7



obr. 8



obr. 9

2.10 Kolik korun tvoří čtyři setiny procenta z deseti miliard korun?

2.11 Kolik korun tvoří pět desetin promile z patnácti milionů korun?

2.12 V grafu zobrazeném na obr. 7 jsou zobrazeny počty žáků jedné třídy, kteří dostali jednotlivé známky (včetně neklasifikace) z matematiky na pololetním vysvědčení. Určete počet žáků této třídy. O kolik procent více žáků má dvojku ve srovnání s počtem žáků, kteří mají trojku? Kolik procent z celkového počtu žáků ve třídě má čtyřku?

2.13 Na obr. 9 jsou zobrazeny výsledky z fyziky těch žáků technického lycea, kteří v roce 2018 maturovali z fyziky. Kolik procent žáků dostalo u maturity jedničku? Kolik procent žáků mělo na konci třetího ročníku trojku?

2.14 V grafu zobrazeném na obr. 8 je zobrazeno rozložení počtu 300 cestujících vlaku City Elephant v PID podle toho, jaký používali doklad. 240 cestujících používalo předplacenou kartu, 30 cestujících zakoupilo lístek na nádraží před odjezdem vlaku, 20 cestujících požádalo průvodčího o vydání dokladu ve vlaku a zbytek cestujících odmítl za jízdu zaplatit. Kolik cestujících za lístek neplatilo? Kolik procent cestujících zakoupilo lístek na nádraží ve srovnání s těmi, kteří používají předplacenou kartu? Kolik procent cestujících zaplatilo lístek u průvodčího vlaku?

3. Mocniny a odmocniny

3.1 Vyjádřete pomocí jedné mocniny a udejte podmínky platnosti: $a^3 \cdot a^4 \cdot \left(a^2\right)^5$.

3.2 Vyjádřete pomocí jedné mocniny a udejte podmínky platnosti: $v^2 \cdot \frac{v^5}{v^3} \cdot \left(v^3\right)^2$.

3.3 Vyjádřete pomocí jedné mocniny a udejte podmínky platnosti: $\frac{x \cdot x^2}{x^6} \cdot \left(\frac{x^3}{x^2}\right)^3$.

3.4 Vyjádřete pomocí jedné mocniny a udejte podmínky platnosti: $\frac{u^2 \cdot u^3}{u^4} \cdot \frac{u^2}{u^5}$.

3.5 Vypočtěte a udejte podmínky platnosti: $\frac{mn^2 \cdot nm^3}{nm} : \frac{m^2}{n^3}$.

3.6 Vypočtěte a udejte podmínky platnosti: $\left(\frac{a^2 b}{b^3}\right)^{-1} : \left(\frac{a^3}{ab^2}\right)^{-2}$.

3.7 Zjednodušte a vyjádřete pomocí zlomku, v jehož jmenovateli nebude žádná proměnná: $\left(\frac{c^3 d}{d^2}\right)^3 : \left(\frac{d^2}{c^{-2} d^{-1}}\right)^{-1} : \left(\frac{d^3}{c}\right)^2$. Udejte podmínky platnosti.

3.8 Vyjádřete pomocí mocnin a udejte podmínky platnosti: a) $\sqrt{x}$, b) $\sqrt[4]{d^2}$, c) $\sqrt[7]{a^2 b^3}$, d) $\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$.

3.9 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: $\frac{\alpha^3 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2}}{\sqrt[6]{\alpha^5}} \cdot \sqrt{\alpha}$.

3.10 Částečně odmocněte a napište podmínky platnosti: a) $\sqrt{50x^3}$, b) $\sqrt[3]{250b^4c^3}$, c) $\sqrt[4]{32u^6v^3}$, d) $\sqrt[10]{4096y^{20}}$.

3.11 Kolikrát je větší číslo $2 \cdot 10^5$ větší, než číslo $40 \cdot 10^3$?

3.12 Kolikrát je menší součin čísel $4 \cdot 10^2$ a 4,5 než číslo $1{,}8 \cdot 10^6$?

3.13 Kolikrát je větší číslo $\sqrt{50}$ než podíl čísel $\sqrt{72}$ a 12?

4. Výroková logika

Napište výroky, které odpovídají následujícím výrokovým formulím:

4.1 $\left(A \wedge B\right) \Rightarrow C$;

4.2 $A' \vee \left(B \wedge C'\right)$;

4.3 $A' \wedge (B' \Rightarrow C)$.

4.4 Napište negace následujících výroků:
a) Hlavní město České republiky je Praha.
b) Pavel a Petr šli včera večer do kina.
c) Jarda pojede na dovolenou do Krkonoš nebo do Polabí.
d) Jestliže maminka zjistí Jardovu známku z matematiky, nebude šťastná.
e) Jarda odjede na stáž do USA pouze v případě, že našetří peníze na letenku.
f) Nebude-li pršet a nebude-li tropické vedro, pojedeme na výlet.
g) Napadne-li dostatečné množství sněhu, pojedou děti ze školky na hory nebo si budou stavět sněhuláka v Praze.

4.5 Negujte následující výroky:
a) Ve třídě je právě 32 žáků.
b) Alespoň 4 žáci nejsou připraveni na test z matematiky.
c) Zednické práce budou trvat nejvýše pět dní.
d) Každý učitel musí být spravedlivý.

4.6 Zjistěte, zda je výroková formule $(A \wedge B') \Rightarrow (B \vee A)$ tautologií.

4.7 Z trestného činu, který se stal na náměstí, byli podezřelí pánové Adamčik, Bublava a Cypřiš. Vyšetřovatel od prvního svědka trestného činu zjistil, že na místě byl Adamčik nebo Bublava. Druhý svědek tvrdil, že na místě činu byl Adamčik, ale nebyl tam Bublava. Třetí svědek prohlásil: „Jestliže byl na místě činu Cypřiš, nebyl tam Bublava.“ Může vyšetřovatel jednoznačně říci, kdo byl pachatelem, jestliže se poté dozvěděl, že na místě činu byl právě jeden člověk? Pokud pachatele lze určit, určete ho.

5. Množiny a intervaly

Zobrazte danou množinu na číselné ose a zapište pomocí intervalu:

5.1 $A = \{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x < 6\}$;

5.2 $B = \{x \in \mathbb{R}; |x+1| < 5\}$;

5.3 $C = \{x \in \mathbb{R}^+; |x-2| > 4\}$;

5.4 $D = \{x \in \mathbb{R}; |2x+4| \leq 6\}$;

5.5 $E = \{x \in \mathbb{R}^-; |3-6x| \geq 4\}$;

5.6 $F = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x+4| \leq 2\}$.

5.7 Jsou dány množiny $U = \{x \in \mathbb{R}; |x-3| < 5\}$ a $V = \{x \in \mathbb{R}; |x+1| \geq 2\}$. Zapište tyto množiny pomocí intervalů. Dále pomocí intervalů zapište množiny: $U \cup V$, $U \cap V$, $U'_{\mathbb{R}}$ a $V'_{\mathbb{R}}$.

5.8 Jsou dány množiny $K = \{x \in \mathbb{R}; |x-2| > 6\}$, $L = \{x \in \mathbb{R}; |x-1| \leq 2\}$ a $M = \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 4\}$. Zapište tyto množiny pomocí intervalů. Dále pomocí intervalů zapište množiny: $K \cup M$, $K \cap M$, $K \cap L \cap M$, $(K \cap L)'_{\mathbb{R}}$ a $M \setminus L$.

6. Algebraické výrazy

Zapište pomocí součinu, ve kterém jsou oba činitelé různé od jedné:

6.1 $x^2 + 6x + 9$;

6.2 $m^2 - 10m + 25$;

6.3 $u^3 - 1$;

6.4 $v^3 - 6v^2 + 12v - 8$;

6.5 $16 - y^4$;

6.6 $36s^2 - 4t^2 + 12t - 9$;

6.7 $a^3 - a^2 + 2a - 2$;

6.8 $m^2 - m - n + mn$.

Zjednodušte výrazy a udejte podmínky, za kterých mají smysl:

6.9 $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} - 2$;

6.10 $\left(\frac{a^2}{b} + b - 2a\right)\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right)$;

6.11 $\left(\frac{n-m}{m+n} - \frac{m+n}{m-n}\right) : \left(\frac{n^4 - m^4}{m^3 + m^2 n - mn^2 - n^3}\right)$;

6.12 $\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x}\right) : \left(\frac{1}{y}\left(1 + \frac{y}{x}\right)\right)$.

Vyjádřete danou neznámou ze zadaného fyzikálního vztahu:

6.13 $F = m \cdot g \cdot \sin\alpha + f \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$; m;

6.14 $F_g = \kappa \dfrac{m_1 \cdot m_2}{(R+h)^2}$; h;

6.15 $R = R_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T)$; ΔT;

6.16 $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \dfrac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$; R.

7. Lineární funkce

Zakreslete grafy zadaných funkcí a určete definiční obor a obor hodnot:

7.1 $f: y = 2x - 1$;

7.2 $g: y = 0{,}5|x| - 2$;

7.3 $h: y = -|2x + 4|$;

7.4 $j: y = ||1{,}5x - 3| - 1|$.

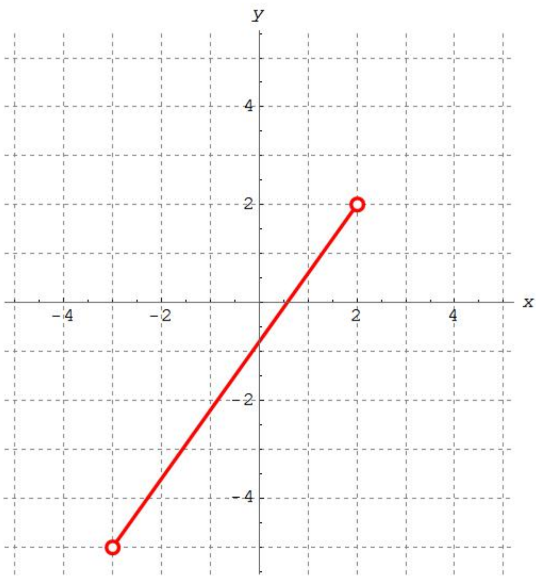
7.5 Nakreslete graf funkce $k: y = |x-2| + 2|x+1| - x - 5$ a určete její definiční obor a obor hodnot.

7.6 Nakreslete graf funkce $l: y = |x+1| - |2-x| - x$ a určete její definiční obor a obor hodnot.

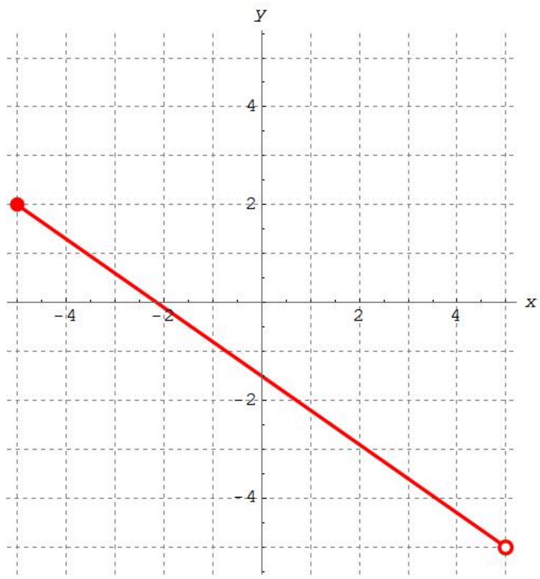
7.7 Napište předpis lineární funkce, která prochází body $A = [-1; 2]$ a $B = [2; 8]$.

7.8 Napište předpis lineární funkce, která prochází body $P = [-2; 6]$ a $Q = [4; -3]$.

7.9 Napište předpis funkcí, které jsou zobrazeny na obr. 10 a obr. 11. Napište jejich definiční obor a obor hodnot.



obr. 10



obr. 11

7.10 Napište předpis lineární funkce, jejíž graf je rovnoběžný s grafem funkce $g: y = -4x + 5$ a která prochází bodem $W = [1; -1]$.

7.11 Napište předpis lineární funkce, jejímž definičním oborem je množina $\langle -5; 3 \rangle$ a jejímž oborem hodnot je množina $\langle -4; 2 \rangle$.

7.12 Rohlík v supermarketu stojí 2.- Kč. Najděte závislost popisující částku zaplacenou na pokladně na počtu rohlíků, jestliže a) nakupujeme maximálně 10 rohlíků; b) nakupujeme maximálně 20 rohlíků a koupíme navíc igelitovou tašku za 5,- Kč.

7.13 Najděte závislost popisující délku strany čtverce na délce obvodu daného čtverce.

8. Lineární rovnice

Řešte v množině reálných čísel rovnici s danou neznámou:

8.1 $3(x-5) = 2x + 1$;

8.2 $\dfrac{u}{2} + \dfrac{u}{3} + 0{,}1u + 5 = u$;

8.4 $m + m(m-5) = (m+1)^2 + 2$

8.5 $\dfrac{k-1}{k+1} - \dfrac{1-2k}{k-1} = 3$;

8.3 $2+\frac{3}{a}=\frac{1}{2a}$;

8.6 $2-\frac{3-p}{p-4}-\frac{1+2p^2}{p^2-16}=\frac{6-p}{4-p}$.

8.7 Řešte rovnici $q(3x+2)-x(2q+1)=2$ s reálnou neznámou x a s reálným parametrem q.

8.8 Řešte rovnici $q(3x+2)-x(2q+1)=2$ s reálnou neznámou q a s reálným parametrem x.

8.9 Řešte rovnici $2x(a^2+1)+3=a(ax+1)+11x$ s reálnou neznámou x a s reálným parametrem a.

8.10 V množině $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic $2u+3v=2$ a $u-2v=5$.

8.11 V množině $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic $\frac{1-2m}{3}+\frac{n-3}{4}=m-n$ a $\frac{3n}{2}-\frac{2m-1}{3}=1$.

8.12 V množině $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic $\frac{p}{3}-\frac{1-q}{2}=1+p$ a $\frac{3}{4}+\frac{p}{3}=\frac{q}{4}$.

8.13 V množině $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic $\frac{r}{5}+\frac{s-1}{2}=\frac{r+s}{4}$ a $\frac{s}{2}-\frac{r}{10}=2$.

8.14 Láhev s 500 ml 100% pomerančové šťávy stojí 15 Kč. Láhev s jedním litrem 60% pomerančové šťávy stojí 22 Kč. Kolik korun bude stát litr 70% pomerančové šťávy, kterou vytvoříme smícháním dvou uvedených typů šťáv?

8.15 Čtvrtina celkového počtu dětí na letním táboře se koupe v bazénu, osmina dětí řeší logické hádanky v jídelně, šestina dětí myje po obědě nádobí, třetina dětí se šla s vedoucím projít do lesa a šest dětí připravuje materiál na odpolední hru. Kolik dětí je celkem na letním táboře?

8.16 Majitel restaurace si objednal v pivovaru 80 hl piva. Pivovar dodal pivo ve třicetilitrových a padesátilitrových sudech, protože padesátilitrové sudy výrobce nedodal v požadovaném počtu. Majitel restaurace při přejímání zboží zjistil, že padesátilitrových sudů bylo o 50 více, než třicetilitrových sudů. Současně zjistil, že bonus, který majitel pivovaru přislíbil, činil 1 hl piva. Kolik kterých sudů majitel restaurace od pivovaru převzal?

8.17 Střední škola zorganizovala pro tři třídy čtvrtých ročníků volitelné přednášky zástupců dvou technických vysokých škol. Na první přednášku přišlo 26 žáků, na druhou přišlo 62 žáků. Žáků, kteří přišli pouze na druhou přednášku, bylo čtyřikrát více než těch, kteří přišli jen na první přednášku. Žádné přednášky se nezúčastnilo o polovinu více žáků, než bylo těch, kteří se zúčastnili obou přednášek současně. Kolik žáků se nezúčastnilo žádné přednášky? Kolik žáků se zúčastnilo obou přednášek současně? Kolik žáků se zúčastnilo pouze druhé přednášky? Kolik žáků se mohlo zúčastnit obou přednášek?

9. __Lineární nerovnice__

Řešte v množině reálných čísel dané nerovnice:

9.1 $3(x+2)>1-2(x-1)$;

9.2 $1-\frac{f-2}{3}\le f+\frac{3-4f}{5}$;

9.3 $w-w(w+3)<1-(w-4)^2$;

9.4 $\frac{5}{q}+2\le 1-\frac{3}{q}$

9.5 $\frac{1-t}{2t+3}-5\ge 2$;

9.6 $1-\frac{2j-5}{j-4}-\frac{3j+2}{4-j}>0$;

9.7 $\frac{2}{3}\le 2-\frac{k+1}{k+3}$.

9.8 V množině reálných čísel řešte nerovnici $\frac{l+3}{l}+1\le 3<4-\frac{2-l}{l-1}$.

9.9 Pro která reálná x pro funkci $f: y=-5+\frac{3}{6-2x}$ platí, že $f(x)\in\langle -4;1)$?

9.10 Pro která reálná x leží funkční hodnoty funkce $g: y=2-\frac{x-3}{x+1}$ v intervalu $(-2;5\rangle$?

9.11 Mobilní operátor nabízí pro studenty dva typy měsíčních tarifů pro posílání SMS. U prvního tarifu se platí paušální částka 220,- Kč a jedna odeslaná SMS je za 1,80 Kč. U druhého tarifu se platí paušální částka 480,- Kč a jedna odeslaná SMS je za 0,70 Kč. Napište funkce popisující závislost ceny za daný tarif na počtu odeslaných SMS. Který tarif je výhodnější (tj. pro studenta levnější)?

10. Kvadratická funkce

Určete souřadnice vrcholu grafu zadaných funkcí, nakreslete pěkně jejich graf a určete definiční obor a obor hodnot:

10.1 $f: y = x^2 - 2x + 3$;

10.2 $g: y = -x^2 + 4x$;

10.3 $h: y = \left|-x^2 - 2x + 3\right|$;

10.4 $j: y = x^2 - 4|x| + 1$;

10.5 $k: y = -0{,}5x^2 - |x| + 3$

10.6 $l: y = \left|x^2 - 6|x| + 5\right|$;

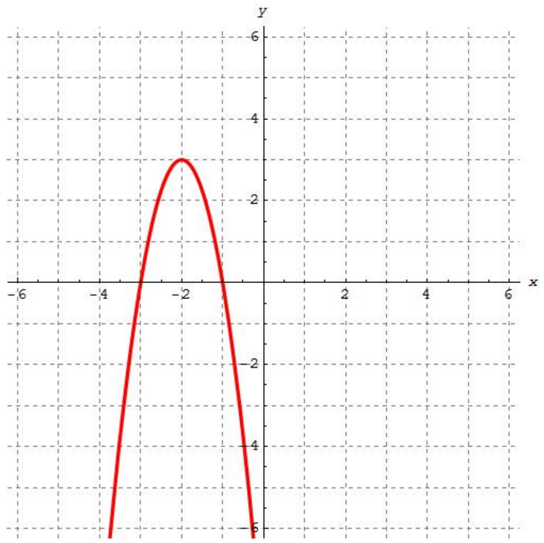
10.7 $m: y = -2\left|x^2 - 2|x| - 1\right|$;

10.8 $n: y = x^2 - 3|x+1| + 1$.

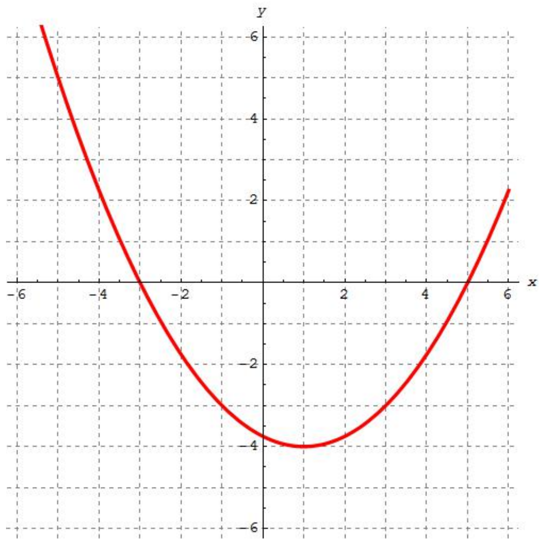
10.9 Napište předpis kvadratické funkce, jejíž graf má vrchol v bodě $\mathrm{V} = [-2; -5]$ a který prochází bodem $\mathrm{U} = [2; 7]$.

10.10 Napište předpis kvadratické funkce, která prochází body $\mathrm{K} = [-1; 0]$ a $\mathrm{L} = [3; 0]$ a jejíž obor hodnot je množina $(-\infty; 8\rangle$.

10.11 Napište předpis funkcí, které jsou zobrazeny na obr. 12 a obr. 13. Napište jejich definiční obor a obor hodnot.



obr. 12



obr. 13

10.12 Najděte závislost popisující obsah čtverce na délce jeho strany.

10.13 Napište časovou závislost popisující dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu. Počáteční rychlost tělesa měla velikost $5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a velikost zrychlení je $0{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

10.14 Napište závislost kinetické energie tělesa o hmotnosti 3 kg na velikosti rychlosti, kterou se toto těleso pohybuje.

11. Kvadratické rovnice

Řešte v množině reálných čísel rovnice:

11.1 $x^2 - 10x + 21 = 0$;

11.2 $n^2 + 10n - 24 = 0$;

11.3 $0{,}25u^2 + 2u + 3 = 0$;

11.4 $k^2 - 8k + 20 = 0$;

11.5 $\dfrac{y+3}{y-4} - \dfrac{2y}{y+3} = -7$;

11.6 $\dfrac{d-1}{d+3} - \dfrac{2-d}{d-3} = 1 - \dfrac{2}{9-d^2}$.

11.7 V množině reálných čísel řešte kvadratickou rovnici $\dfrac{\alpha}{9-z^2} - \dfrac{2-z}{z-3} = 1 - \dfrac{z-1}{z+3}$ s neznámou z v závislosti na reálném parametru α. Pro které hodnoty α má rovnice jeden kořen roven pěti?

11.8 V množině reálných čísel řešte kvadratickou rovnici $\dfrac{\beta m + 1}{m+4} - \dfrac{3-m}{m-2} = 1$ s neznámou m a reálným parametrem β. Pro které hodnoty β má rovnice jeden kořen roven třem?

Řešte v množině reálných čísel rovnice:

11.9 $\sqrt{w+6} = w-6$;

11.10 $1+\sqrt{q-5} = \sqrt{q+7}-1$;

11.11 $2+\dfrac{\sqrt{11-c}}{3} = \sqrt{c+2}+1$;

11.12 $\dfrac{10}{\sqrt{f-3}} = \sqrt{f-3}+3$;

11.13 $\dfrac{18}{\sqrt{10-b}}+9 = \sqrt{250-25b}$.

11.14 V množině $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic $x^2-10x+5y=20$ a $x^2+5y=10$.

11.15 V množině $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic $u^2+3u-2v=10$ a $u^2-2u-v=5$.

11.16 V množině $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic $k^2+l^2-4k-2l=4$ a $k^2+l^2-2k-l=6$.

11.17 V množině $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic $r^2+s^2-r-2s=-1$ a $2r-s=1$.

11.18 V oboře žije stádo jelenů. Jedno slunné odpoledne leželi jeleni v počtu rovném druhé mocnině ze dvanáctiny celkového počtu u jezírka, třetina z celkového počtu jelenů ležela pod přístřeškem, čtvrtina celkového počtu jelenů se pásla pod mladými břízkami a šest jelenů ze stáda zvědavě okukovalo návštěvníky za ohradou obory. Kolik jelenů leželo pod přístřeškem?

12. Kvadratické nerovnice

V množině reálných čísel řešte nerovnice:

12.1 $x^2+2x-15>0$;

12.2 $-u^2+6u-8\ge 0$;

12.3 $m^2-6m+9\le 0$;

12.4 $t^2-5t+30<0$;

12.5 $\dfrac{a+1}{a-1}+\dfrac{a-1}{a+1}>0$;

12.6 $\dfrac{g+1}{g-1}\le\dfrac{g-1}{g+1}$.

12.7 V množině reálných řešte nerovnice $-4<\dfrac{h^2+2h-35}{h^2-1}\le 0$.

12.8 V množině reálných řešte nerovnice $\dfrac{v^2-3v-40}{v^2+5}\ge 0>\dfrac{5v^2+1}{12-3v^2}$.

12.9 Určete definiční obor funkce $f: y=\sqrt{3x^2-30x+72}$.

12.10 Určete definiční obor funkce $g: y=\sqrt{\dfrac{1}{4x^2+48x-112}}$.

12.11 Určete definiční obor funkce $h: y=\sqrt{\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-25}}$.

12.12 Pro která reálná x nabývá funkce $j: y=\dfrac{x^3+x^2-16x-16}{x^2+6x+9}$ záporných hodnot?

13. Goniometrické funkce – výpočty hodnot

Bez použití kalkulačky vypočtěte:

13.1 $\sin\dfrac{\pi}{3}$;

13.2 $\cos\dfrac{3\pi}{4}$;

13.3 $\mathrm{tg}\dfrac{5\pi}{6}$;

13.4 $\mathrm{cotg}\dfrac{2\pi}{3}$;

13.5 $\sin\dfrac{17\pi}{6}$;

13.6 $\cos\dfrac{11\pi}{3}$;

13.7 $\mathrm{tg}\dfrac{11\pi}{4}$;

13.8 $\mathrm{cotg}\dfrac{17\pi}{6}$;

13.9 $\sin\left(-\dfrac{21\pi}{4}\right)$;

13.10 $\cos\left(-\dfrac{16\pi}{3}\right)$;

13.11 $\mathrm{tg}\left(-\dfrac{14\pi}{3}\right)$;

13.12 $\mathrm{cotg}\left(-\dfrac{11\pi}{4}\right)$.

S použitím kalkulačky vypočtěte:

13.13 $\sin 5$;

13.14 $\cos 7{,}8$;

13.15 $\mathrm{tg}\, 2{,}5$;

13.16 $\cot 1{,}25$;

13.17 $\sin 18{,}5°$;

13.18 $\cos 198°$;

13.19 $\mathrm{tg}\, 57°$;

13.20 $\cot 115{,}8°$.

14. Goniometrické funkce – grafy

Nakreslete pěkně grafy následujících funkcí, vyznačte důležité body, určete definiční obor a obor hodnot:

14.1 $f: y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; **14.2** $g: y = \cos(2x - \pi)$; **14.3** $h: y = \left|2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|$;

14.4 $j: y = \cos\left(|x| - \frac{\pi}{2}\right)$; **14.5** $k: y = -2\sin\left(\frac{|x|}{2}\right) + 1$; **14.6** $l: y = \left|-2\sin|x| + 1\right|$;

14.7 $m: y = \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **14.8** $n: y = \mathrm{cotg}|x|$; **14.9** $p: y = |\mathrm{tg}\, x| + 1$.

15. Goniometrické funkce – vztahy mezi funkcemi

15.1 Pro úhel $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ je $\sin x = -0{,}8$. Bez určování hodnoty úhlu určete $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{cotg}\, x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\mathrm{tg}\, 2x$, $\mathrm{cotg}\, 2x$, $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ a $\mathrm{cotg}\frac{x}{2}$.

15.2 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: $\cos x \cdot (1 - \cos x) - \sin^2 x$.

15.3 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: $1 - \cos 2x - \sin^2 x$.

15.4 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: $(\mathrm{tg}\, x + \mathrm{cotg}\, x) \cdot \sin 2x$.

15.5 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: $\frac{\mathrm{tg}\, x - \mathrm{cotg}\, x}{\cos 2x}$.

15.6 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: $\frac{\sin 2x}{\mathrm{tg}\, x + \mathrm{cotg}\, x}$.

15.7 Dokažte platnost vztahu a udejte podmínky platnosti: $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos 2x} = \frac{1}{2}$.

15.8 Dokažte platnost vztahu a udejte podmínky platnosti: $\frac{1 - \cos 2x}{\cos^2 x} = 2\,\mathrm{tg}^2 x$.

15.9 Dokažte platnost vztahu a udejte podmínky platnosti: $\frac{4\sin^2 x - \sin^2 2x}{\sin^2 x} = 4\sin^2 x$.

15.10 Dokažte platnost vztahu a udejte podmínky platnosti: $\frac{\mathrm{cotg}\, x - \mathrm{tg}\, x}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 x - \cos 2x} = 4\,\mathrm{cotg}\, x$.

16. Goniometrické funkce – rovnice a nerovnice

Řešte v množině reálných čísel rovnice:

16.1 $\sin x = \frac{1}{2}$; **16.2** $\cos 2u = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; **16.3** $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{m}{4} = -3$; **16.4** $3\,\mathrm{cotg}\, p = \sqrt{3}$.

Na intervalu $\langle 0; 2\pi)$ řešte rovnice:

16.5 $2\sin\left(2d + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$; **16.6** $2\cos\left(\frac{r}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = -1$; **16.7** $3\,\mathrm{tg}\left(2v + \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.

16.8 Najděte největší kořen rovnice $2\cos 4q = \sqrt{3}$ na intervalu $\langle 0; 2\pi)$.

16.9 Najděte nejmenší kořen rovnice $2\sin(5s + 10°) = -1$.

16.10 S kalkulačkou vyřešte v množině reálných čísel rovnici $\sin b = -0{,}7$.

16.11 S kalkulačkou vyřešte v množině reálných čísel rovnici $\cos c = -0{,}25$ a výsledek udejte ve stupních.

16.12 Okamžitá výchylka y harmonického oscilátoru v závislosti na čase t je popsána rovnicí $y = y_\mathrm{m} \sin(2\pi f t + \varphi_0)$, kde y_m je amplituda harmonického kmitání, f je frekvence kmitání a φ_0 je počáteční fáze kmitání. Uvažujme kmitání o frekvenci 10 Hz a počáteční fázi $\frac{\pi}{3}$. Kdy poprvé od začátku kmitání dosáhne oscilátor výchylky rovné polovině amplitudy?

16.13 V množině reálných čísel řešte rovnici $\sin 2u + \cos u = 0$.

16.14 V množině reálných čísel řešte rovnici $\sin a + \cos^2 a = 1$.

16.15 V množině reálných čísel řešte rovnici $1 - \cos b = 2\sin^2 b$.

16.16 V množině reálných čísel řešte rovnici $2\sin 2z + 2\sqrt{3}\cos z - 2\sin z = \sqrt{3}$.

16.17 V množině reálných čísel řešte nerovnici $\sin o > 0{,}5$.

16.18 V množině reálných čísel řešte nerovnici $\cos\left(p + \frac{\pi}{3}\right) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

17. Goniometrické funkce – trigonometrie

17.1 V trojúhelníku NOC je dáno: $n = 5\text{ cm}$, $o = 7\text{ cm}$ a $p = 10\text{ cm}$. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka.

17.2 V trojúhelníku ABC je dáno: $a = 15\text{ cm}$, $b = 10\text{ cm}$ a $\beta = 40°$. Určete délku zbývající strany a velikosti zbývajících vnitřních úhlů.

17.3 V trojúhelníku KLM je dáno: $k = 25\text{ mm}$, $\beta = 35°$ a $\gamma = 105°$. Určete délky zbývajících stran a velikost posledního úhlu.

17.4 Určete odchylku úhlopříček v obdélníku se stranami 10 cm a 8 cm.

17.5 Letadlo letí ve stálé výšce 2500 m nad zemí směrem k pozorovatelně, která se nachází na zemi. V okamžiku prvního měření bylo letadlo z pozorovatelny vidět pod výškovým úhlem $27°$ a v okamžiku druhého měření bylo letadlo vidět pod výškovým úhlem $55°$. Jakou dráhu letadlo urazilo mezi oběma měřeními?

17.6 Jak dlouhý stín vrhá na vodorovnou betonovou zem svislý stožár délky 4,5 m, je-li Slunce $25°$ nad obzorem?

17.7 Na svahu, který svírá s vodorovnou rovinou úhel $15°$, stojí stožár výšky 5,5 m. Jak dlouhý stín stožár vrhá na svah ve směru nejrychlejšího klesání, jestliže je Slunce $38°$ nad obzorem?

17.8 Na svahu, který svírá s vodorovnou rovinou úhel $7°$, stojí stožár výšky 6 m. Jak dlouhý stín stožár vrhá na svah ve směru nejvyššího stoupání, jestliže je Slunce $26°$ nad obzorem?

17.9 Reportér televizní stanice je vzdálen od přímé silnice, na níž stojí kolona aut, 8 m. Reportér vidí kolonu pod zorným úhlem $130°$ a od prvního auta kolony je vzdálen 50 m. Jak dlouhá je kolona?

17.10 Z rozhledny vysoké 120 m je vidět patu osamoceného stromu v hloubkovém úhlu $28°$ a jeho vrchol v hloubkovém úhlu $23°$. Jak vysoký je tento strom?

18. Komplexní čísla – operace

Jsou dána komplexní čísla $a = -2 + 3\mathrm{i}$, $b = 1 - 2\mathrm{i}$, $c = 3 - \mathrm{i}$ a $d = -1 - 4\mathrm{i}$. Vypočtěte:

18.1 $a + b$; **18.2** $b - c$; **18.3** $d \cdot c$; **18.4** $\frac{d}{b}$; **18.5** $a + b \cdot d$.

18.6 Vypočtěte $\left|\frac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right|$.

18.7 Určete imaginární část komplexního čísla $p = 0{,}6 + b \cdot \mathrm{i}$ tak, aby číslo p bylo komplexní jednotkou.

18.8 Vyjádřete komplexní číslo $q = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$ v goniometrickém a exponenciálním tvaru.

18.9 Vyjádřete komplexní číslo $r = 3\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i} \cdot \sin\frac{7\pi}{6}\right)$ v algebraickém a exponenciálním tvaru.

18.10 Vyjádřete komplexní číslo $s = 5\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$ v algebraickém a goniometrickém tvaru.

18.11 Vyjádřete komplexní číslo $t=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}-\mathrm{i}\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ v algebraickém, goniometrickém a exponenciálním tvaru.

18.12 Umocněte: a) $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^{10}$, b) $\left(-3-3\mathrm{i}\right)^{12}$.

19. Komplexní čísla – rovnice

19.1 Řešte v množině komplexních čísel rovnici $2+3x\mathrm{i}-\mathrm{i}=4-3x$.

19.2 Řešte v množině komplexních čísel rovnici $z-3\overline{z}=2+\mathrm{i}$.

19.3 Řešte v množině komplexních čísel rovnici $2+3w'+2\overline{w}=4+w-6\mathrm{i}$.

19.4 Řešte v množině komplexních čísel rovnici $h^2-10h+29=0$.

19.5 Řešte v množině komplexních čísel rovnici $\frac{u^2-10}{u^2-1}-\frac{4-3u}{1-u}=\frac{2u+3}{u+1}$.

19.6 Řešte v množině komplexních čísel rovnici $\frac{2v^2}{4-v^2}-\frac{2v+1}{v+2}=\frac{3-2v}{v-2}$.

19.7 Řešte v množině komplexních čísel rovnici $m\left(m-4\right)+2\left(7\mathrm{i}-4\right)=7\mathrm{i}\,m$.

19.8 Řešte v množině komplexních čísel rovnici $5-n\left(n-\mathrm{i}\right)=5\left(2-\mathrm{i}\right)$.

19.9 Řešte v množině komplexních čísel rovnici $c^3+2=2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

19.10 Určete souřadnice vrcholů pravidelného pětiúhelníku, který je v Gaussově rovině vepsán do kružnice s poloměrem 1 j. Jeden z jeho vrcholů přitom leží na kladné části imaginární osy.

20. Vlastnosti funkcí

Dokažte, zda jsou následující funkce sudé, liché nebo ani sudé a ani liché:

20.1 $f: y=2\sin x-3x$;

20.2 $g: y=\frac{x^2}{2x+1}$;

20.3 $h: y=5x^4-2\cos x+3$;

20.4 $j: y=3\sin 2x-2\cos 5x+|x|$.

20.5 Na základě obr. 14 určete a zdůvodněte paritu funkcí *m* a *n*.

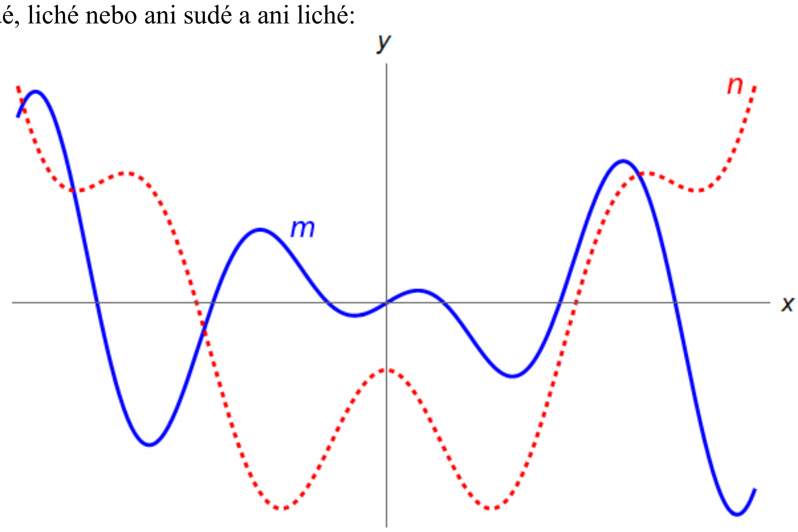
Rozhodněte a dokažte (podle definice) monotonii funkcí:

20.6 $p: y=2x+5$;

20.7 $q: y=-\sqrt{x+1}$;

20.8 $r: y=0{,}5^{x-3}+1$;

20.9 $s: y=\ln x-3$.



obr. 14

20.10 Určete definiční obor, obor hodnot a intervaly monotonie funkce $t: y=x^2-6x+10$. Na kterém největším intervalu lze k dané funkci sestrojit funkci inverzní? Najděte předpis této funkce.

21. Mocninná funkce

Nakreslete pěkné grafy těchto funkcí, vyznačte důležité body a určete jejich definiční obor a obor hodnot:

21.1 $f: y=x^3+1$;

21.2 $g: y=\left(x+1\right)^4-2$;

21.3 $h: y=\left(|x|+2\right)^{-2}-1$;

21.4 $j: y=\left|\left(x-2\right)^{-3}-3\right|$;

21.5 $k: y=-\sqrt{|x-1|}+2$;

21.6 $l: y=\sqrt{3-|x|}+1$.

21.7 V množině reálných čísel řešte nerovnici $\left(x-2\right)^{-2}<\left(x+1\right)^3-2$.

22. Lineárně lomená funkce

Nakreslete pěkně grafy těchto funkcí, vyznačte důležité body a určete jejich definiční obor a obor hodnot:

22.1 $f: y = \dfrac{x+1}{x+2}$; **22.3** $h: y = \left|\dfrac{x+1}{1-x}\right|$; **22.5** $k: y = \dfrac{|x|-2}{|x|+4}$;

22.2 $g: y = \dfrac{3-2x}{x-1}$; **22.4** $j: y = \dfrac{|x|+2}{|x|-2}$; **22.6** $l: y = \dfrac{|x|-2}{x+3}$.

22.7 Napište předpis inverzní funkce k funkci $m: y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. Obě funkce zakreslete do téhož grafu a určete jejich definiční obor a obor hodnot.

22.8 V množině reálných čísel řešte nerovnici $\left|\sqrt{2-x}-1\right| \geq \dfrac{-x}{x+1}$.

22.9 Plot kolem pozemku budovy Městského úřadu natírá stále stejná skupina pracovníků, a proto vědí, že když bude pracovat všech šest členů týmu, natřou plot za 4 dny. Napište předpis funkce, která udává počet dnů potřebných na natření plotu v závislosti na počtu pracovníků.

22.10 Sedlák ví, že spolu se svými dvěma syny, sousedem a jeho synem poseče své louky za 7 dní. Napište předpis funkce, která udává počet dnů nutných k posečení louky v závislosti na počtu sekáčů. Jak dlouho celkem budou louky sečeny, jestliže po prvním dni sečení museli soused se svým synem odjet?

23. Exponenciální funkce

Nakreslete pěkně grafy těchto funkcí, vyznačte důležité body a určete jejich definiční obor a obor hodnot:

23.1 $f: y = 2^{x+3}$; **23.3** $h: y = e^{|x|+1} - 1$; **23.5** $k: y = 2^{-|x-2|} - 1$;

23.2 $g: y = 0{,}25^{x-1} + 2$; **23.4** $j: y = e^{2-|x|} + 1$; **23.6** $l: y = \left|2^{x+3} - 4\right|$.

23.7 V množině reálných čísel řešte nerovnici $5 - 5e^{-x} > (x-3)^{-1} - 2$.

24. Exponenciální rovnice a nerovnice

V množině reálných čísel řešte rovnice:

24.1 $\left(\dfrac{25}{16}\right)^{2x}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{x+3} = \left(\dfrac{125}{64}\right)^{2x+2}$; **24.2** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2a-1}\left(\dfrac{9}{4}\right)^{1-a} = \dfrac{27}{8}\left(\dfrac{16}{81}\right)^{2-a}$; **24.3** $\sqrt[u]{3^6}\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{u}{3}} = \sqrt[u]{4^3}$.

24.4 V množině reálných čísel řešte rovnici $3^{b+1} + 3^{b+2} = 108$.

24.5 V množině reálných čísel řešte rovnici $5^{q+2} + 5^{q} = 131 - 0{,}2^{1-q}$.

24.6 V množině reálných čísel řešte rovnici $2 - 3\cdot 2^{w-1} = 4^{w} + 2^{w+1}$.

24.7 V množině reálných čísel řešte rovnici $9^{1+z} + 3^{z+1} - 3^{z} = 87$.

24.8 V množině reálných čísel řešte nerovnici $2^{m}\cdot 4^{m+1} \leq 8^{1-2m}\cdot 4^{m}$.

24.9 V množině nekladných reálných čísel řešte nerovnici $0{,}3^{k}\cdot 0{,}09^{1-k}\cdot 0{,}3^{2k} > 0{,}027^{k+1}$.

25. Logaritmická funkce a logaritmy

Nakreslete pěkně grafy těchto funkcí, vyznačte důležité body a určete jejich definiční obor a obor hodnot:

25.1 $f: y = \ln(x+1)$; **25.3** $h: y = \log_2(3-x) + 2$; **25.5** $k: y = \log_{0,1}(|x|-2) - 3$;

25.2 $g: y = \log_{0,5} x - 1$; **25.4** $j: y = \log|x-2| + 1$; **25.6** $l: y = \left|\log_5(1-|x|) - 2\right|$.

Vypočítejte neznámou proměnnou:

25.7 $\log 0{,}1 = a$; **25.8** $\log_b 81 = 4$; **25.9** $\log_{0,5} c = -5$; **25.10** $\log_d 4 = 0{,}25$.

25.11 Zlogaritmujte výraz: $k = a^2 + ab - 4b^3$.

25.12 Popište princip násobení a dělení čísel pomocí logaritmů.

25.13 Počet částic radioaktivního vzorku, který původně obsahoval N_0 částic, lze psát ve tvaru $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{t}{T}}$, kde T je poločas rozpadu. Vyjádřete z uvedeného vztahu čas t.

26. Logaritmické rovnice a nerovnice

26.1 V množině reálných čísel řešte rovnici $4 \cdot 3^y \cdot 16 = 3 \cdot 4^{y+1}$. Výsledek vyjádřete pomocí dekadického i přirozeného logaritmu.

26.2 V množině reálných čísel řešte rovnici $\log_2(x+2) = 6$.

26.3 V množině reálných čísel řešte rovnici $\log_5(10-u) = \log_5(2u-5)$.

26.4 V množině reálných čísel řešte rovnici $\log_4(22-k) = 2\log_4(k-2)$.

26.5 V množině celých čísel řešte rovnici $\log(3j+4) + \log(12-j) = 2$.

26.6 V množině reálných čísel řešte rovnici $\log_{0,5}(11-q) = \log_{0,5}(2q-4) - 2$.

26.7 V množině reálných čísel řešte rovnici $\log_2 w \cdot (\log_2 w - 6) = 2\log_2 w - 12$.

26.8 V množině reálných čísel řešte rovnici $\frac{2}{\log_{\frac{1}{4}}(7m+2)} - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(7m+2)^2$.

26.9 V množině reálných čísel řešte rovnici $v^{\log_2 v+1} = 16v$.

26.10 Vyjádřete číslo $n = \log_4(10 \cdot e^2)$ a) pomocí dekadického, b) přirozeného, c) binárního logaritmu.

26.11 V množině reálných čísel řešte nerovnici $\ln(3p-7) \geq \ln(5-2p)$.

26.12 V množině reálných čísel řešte nerovnici $2\log_{0,25}(w+1) < \log_{0,25}(22-2w)$.

27. Planimetrie – Pythagorova věta a Euklidovy věty

27.1 Zahrada má tvar obdélníku o rozměrech 30 m a 40 m. Jak dlouhá je úzká pěšina, kterou si zahradník vyšlapal po úhlopříčce zahrady?

27.2 Park ve tvaru čtverce měl Jarda obejít po dvou jeho stranách celkem pěti sty kroky. Jarda ale šel přes park po úhlopříčce. Kolik kroků tímto riskantním porušením předpisů ušetřil?

27.3 Úhlopříčka televizní obrazovky s poměrem délek stran 16:9 má délku 102 cm. Určete rozměry obrazovky.

27.4 V kružnici o poloměru 10 cm jsou sestrojeny dvě navzájem rovnoběžné tětivy o délkách 12 cm a 16 cm. Určete vzájemnou vzdálenost obou tětiv. Má-li úloha více řešení, uvažujte všechna.

27.5 V pravoúhlém trojúhelníku DEN s pravým úhlem při vrcholu N je výška na stranu *n* rovna 3 cm. Délka strany *e* je 5 cm. Určete délky stran *n* a *d* daného trojúhelníka.

27.6 V obdélníku ZIMA s rozměry 5 cm a 10 cm je vedena kolmice z bodu Z k úhlopříčce IA a protíná jí v bodě W. Určete poměr délek úseček AW a WI.

27.7 Do kosočtverce se stranou délky 30 cm je vepsána kružnice. Tato kružnice se dotýká strany kosočtverce ve vzdálenosti 10 cm od jeho vrcholu. Vypočítejte poloměr vepsané kružnice a délky úhlopříček.

27.8 Ke kružnici s poloměrem 10 cm jsou vedeny z bodu Q tečny. Vzájemná vzdálenost obou dotykových bodů tečen s kružnicí je 12 cm. Jak daleko je bod Q od středu kružnice?

27.9 V pravoúhlém trojúhelníku PUK s pravým úhlem při vrcholu K je dána délka odvěsny *u* 12 cm a délka úseku přepony trojúhelníka přilehlá k odvěsně *p*; tento úsek měří 7 cm. Určete délky zbývajících stran trojúhelníka a výšku na přeponu *k*.

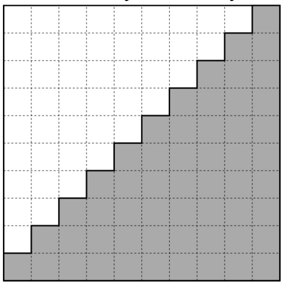
27.10 Kolem Země s poloměrem 6378 km obíhá ve výšce 600 km nad povrchem družice. Jaká je výška kulové úseče Země, kterou lze z družice pozorovat?

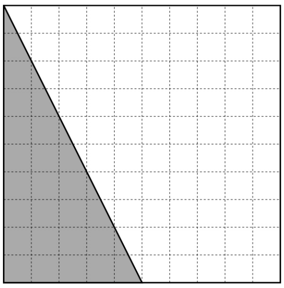
27.11 S využitím Pythagorovy věty a obou Euklidových vět zkonstruujte úsečku délky a) $\sqrt{5}$ j, b) $\sqrt{21}$ j, c) $\sqrt{27}$ j.

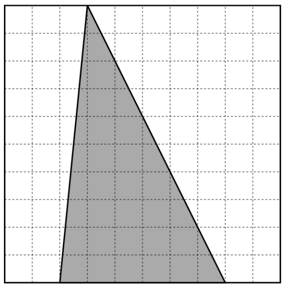
27.12 Trojúhelník KOS má délky stran 15 cm, 9 cm a 16 cm. Trojúhelník DUB, který je podobný s trojúhelníkem KOS, má obvod o 10 cm kratší. Jaká je délka nejkratší strany trojúhelníka DUB?

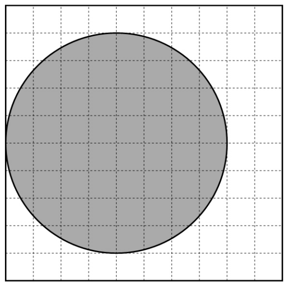
28. Obvody a obsahy rovinných útvarů

28.1 Určete, jakou část plochy čtverce tvoří vyšrafovaný útvar (viz obr. 15 až obr. 18). Jaký je obvod každého z vyšrafovaných útvarů?


obr. 15


obr. 16


obr. 17


obr. 18

28.2 V pravoúhlém trojúhelníku LUK mají kolmé průměty odvěsen na přeponu délky 16 cm a 4 cm. Určete obvod a obsah tohoto trojúhelníka.

28.3 Vypočtěte obvod a obsah pravidelného šestiúhelníku vepsaného do kružnice o poloměru r.

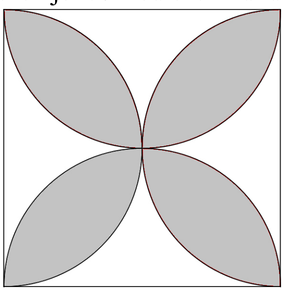
28.4 Vypočtěte obvod a obsah pravidelného šestiúhelníku opsaného kružnici o poloměru r.

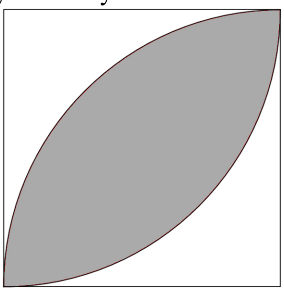
28.5 Určete obvod a obsah vyšrafovaného útvaru zobrazeného na obr. 19. Délka strany čtverce je a. Jakou část čtverce vyšrafovaný útvar tvoří?

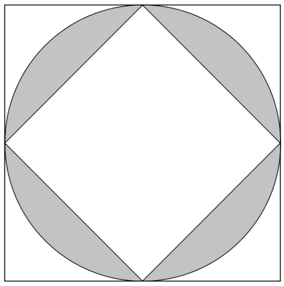
28.6 Určete obvod a obsah vyšrafovaného útvaru zobrazeného na obr. 20. Délka strany čtverce je a. Jakou část čtverce vyšrafovaný útvar tvoří?

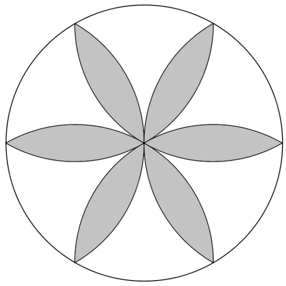
28.7 Určete obvod a obsah vyšrafovaného útvaru zobrazeného na obr. 21. Délka strany většího čtverce je a. Jakou část většího čtverce vyšrafovaný útvar tvoří?

28.8 Určete obvod a obsah vyšrafovaného útvaru zobrazeného na obr. 22. Poloměr všech kružnic a jejich částí je r. Jakou část kruhu vyšrafovaný útvar tvoří?


obr. 19

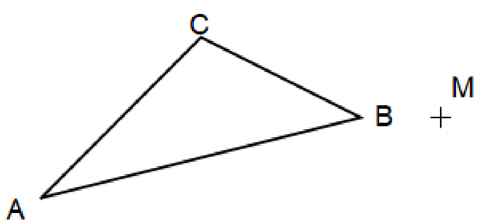

obr. 20


obr. 21

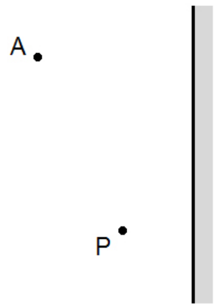

obr. 22

29. Shodná a podobná zobrazení

29.1 Na obr. 23 je zobrazen trojúhelník ABC a bod M. Sestrojte obraz tohoto trojúhelníka a) v osové souměrnosti s osou tvořenou přímkou AB, b) ve středové souměrnosti se středem v bodě C, c) ve stejnolehlosti se středem M a koeficientem 0,5, d) ve stejnolehlosti se středem M a koeficientem -2, e) v otočení se středem v bodě M a úhlem $\frac{\pi}{3}$. f) v posunutí daném vektorem $\overrightarrow{BM}$.



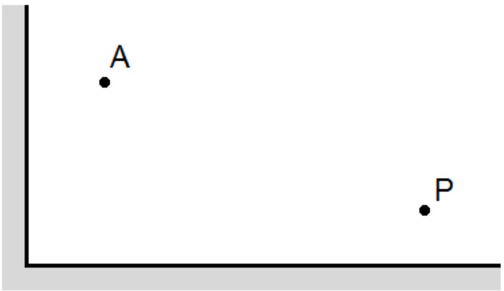
obr. 23



obr. 24

29.2 Na obr. 24 představuje bod A předmět zobrazovaný rovinným zrcadlem a bod P oko pozorovatele. Sestrojte (a konstrukci zdůvodněte) paprsek vycházející z bodu A, který po odrazu od rovinného zrcadla dopadne do bodu P.

29.3 Na obr. 25 představuje bod A předmět zobrazovaný dvěma navzájem kolmými rovinnými zrcadly a bod P oko pozorovatele. Sestrojte paprsek vycházející z bodu A, který po odrazu od obou rovinných zrcadel dopadne do bodu P. Provedenou konstrukci zdůvodněte.



obr. 25

obr. 26

29.4 Na obr. 26 představuje bod B předmět zobrazovaný dvěma rovinnými zrcadly a bod P oko pozorovatele. Sestrojte paprsek vycházející z bodu B, který po odrazu od obou rovinných zrcadel dopadne do bodu P. Provedenou konstrukci zdůvodněte.

29.5 Na obdélníkovém kulečníkovém stole STUL o rozměrech $|ST| = 1{,}5\ \mathrm{m}$ a $|TU| = 2\ \mathrm{m}$ leží dvě koule *X* a *Y*. Koule *X* je vzdálena 30 cm od strany ST a 50 cm od strany SL stolu. Koule *Y* je vzdálena 60 cm od strany UL a 20 cm od strany TU stolu. Určete graficky i výpočtem pod jakým úhlem je třeba vystřelit kouli *X*, aby se po odrazech od strany ST a TU trefila do koule *Y*. Jak dlouhou dráhu koule *X* do nárazu do koule *Y* urazí?

29.6 Jsou dány rovnoběžné přímky *a*, *b* a bod M. Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek *a*, *b* a prochází bodem M.

29.7 Určete velikost úhlu otočení, který svírá hodinová a minutová ručička a) v 5 hodin, b) ve 3:15, c) v 7:45.

29.8 Do daného ostroúhlého trojúhelníku ABC vepište čtverec KLMN tak, aby $\mathrm{KL} \subset \mathrm{AB}$, $\mathrm{M} \in \mathrm{BC}$ a $\mathrm{N} \in \mathrm{AC}$.

30. Stereometrie – polohové a metrické úlohy

30.1 Vypočtěte délku stěnové a tělesové úhlopříčky krychle, která má hranu délky *a*.

30.2 Vypočtěte délky stěnových úhlopříček a délku tělesové úhlopříčky kvádru s rozměry 10 cm, 15 cm a 20 cm.

30.3 Určete úhel, který v krychli o hraně délky *a* vzájemně svírají stěnová a tělesová úhlopříčka.

30.4 Jaká je vzdálenost bodu K od přímky MR v krychli KLMNOPQR s hranou délky *b*?

30.5 Jaký úhel svírá spojnice vrcholu podstavy s vrcholem pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavou jehlanu s délkou podstavné hrany *a* a výškou *v*?

30.6 Hrany pravidelného čtyřstěnu mají délku *a*. Vypočtěte výšku tohoto čtyřstěnu. Jaká je odchylka roviny podstavy čtyřstěnu a boční stěny čtyřstěnu? Jaká je odchylka boční hrany čtyřstěnu od roviny podstavy čtyřstěnu?

30.7 Všechny hrany pravidelného čtyřbokého jehlanu mají délku *b*. Vypočtěte výšku tohoto jehlanu. Jaká je odchylka roviny podstavy jehlanu a boční stěny jehlanu? Jaká je odchylka boční hrany jehlanu od roviny podstavy jehlanu?

30.8 Pravidelný šestiboký hranol má délku podstavné hrany 6 cm a výšku 16 cm. Vypočítejte maximální vzdálenost dvou vrcholů tohoto hranolu.

31. Obsahy a objemy těles

31.1 Určete objem a povrch tzv. Eulerovy cihly, což je kvádr o rozměrech 240 j, 117 j a 44 j. Určete délky stěnových úhlopříček tohoto tělesa.

31.2 V uzavřené skleněné nádobě tvaru kvádru s rozměry 20 cm, 40 cm a 60 cm je nalita voda. Je-li nádoba postavena na stěnu s rozměry 20 cm a 60 cm, dosahuje kapalina do výšky 12 cm. Jak vysoko bude hladina, jestliže postavíme nádobu na stěnu s rozměry 40 cm a 60 cm? Jak vysoko bude hladina vody, postavíme-li nádobu na poslední stěnu?

31.3 Do válcové nádoby, kterou našel Jarda v kuchyni, nalil šest čtvrtlitrových hrnků plných vody. Voda v nádobě vystoupila do výšky 20 cm. Jaký je poloměr nádoby? Udejte s přesností na desetiny centimetru.

31.4 Vypočtěte průměr skleněné nádoby ve tvaru koule, která má objem 2 litry. Výsledek zaokrouhlete na desetiny centimetru.

31.5 Po rovině se valí váleček výšky 4 cm. Po dvou otočeních urazí dráhu 10 cm. Určete objem a povrch válečku.

31.6 Trampský stan má tvar pravidelného trojbokého hranolu. Stan je dlouhý 2 m a jeho výška je 1,6 m. Vypočítejte objem vzduchu v litrech v prázdném stanu a kolik látky je potřeba k vyrobení jednoho stanu bez podlážky.

31.7 Do papírového kužele s výškou 20 cm se vejdou 3 litry jemného písku. Jarda, jehož hlavu lze považovat za kouli s maximálním obvodem 94 cm, si tento kužel nasadí svisle na hlavu. Do jaké výšky bude hlava kuželem zakrytá? Udejte s přesností na celé milimetry.

31.8 Je dán pravoúhlý trojúhelník NOC s pravým úhlem při vrcholu C. Délka strany *n* jsou 4 cm, délka strany *o* jsou 3 cm. Určete povrch a objem tělesa, které vznikne při otáčení trojúhelníka kolem strany *c*.

31.9 Z rotačního dřevěného válce se vyrábí figurka pro dětskou hru. Spodní polovina válce zůstává, horní polovina válce se sbrousí do tvaru rotačního kužele. Jakou část objemu původního válce tvoří figurka? Jaký je povrch vytvořené figurky? Figurka je stejně vysoká jako původní válec.

31.10 Do koule o poloměru *r* je vepsána krychle maximálního objemu. Určete poměr objemů krychle a koule.

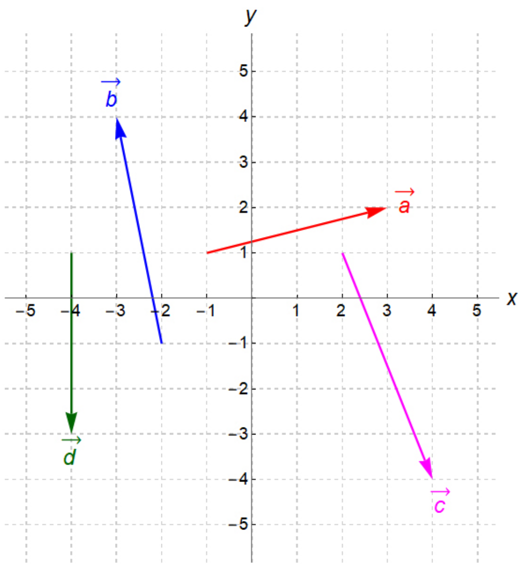
32. Analytická geometrie v rovině – vektory

32.1 Určete souřadnice bodu W, který dělí úsečku danou body $\mathrm{U}=[2;1]$ a $\mathrm{V}=[4;-3]$ v poměru: a) $\frac{|\mathrm{UW}|}{|\mathrm{VW}|}=1$, b) $\frac{|\mathrm{UW}|}{|\mathrm{VW}|}=2$, c) $\frac{|\mathrm{UW}|}{|\mathrm{VW}|}=4$.

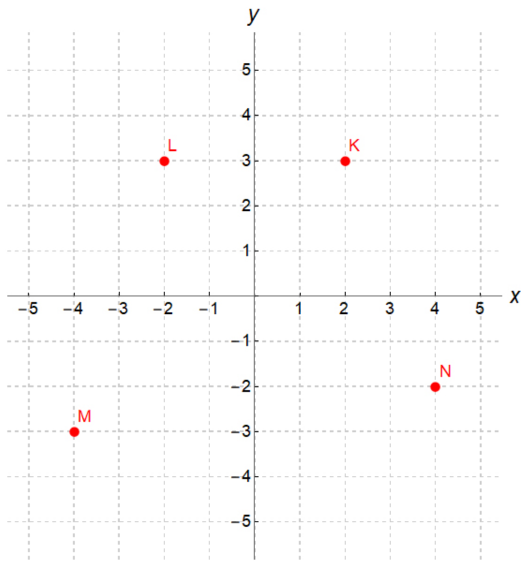
32.2 Určete souřadnice vektorů zobrazených na obr. 27.

32.3 Určete souřadnice vektorů $\overrightarrow{\mathrm{MK}}$, $\overrightarrow{\mathrm{NM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{KL}}$ a $\overrightarrow{\mathrm{KN}}$ daných body zobrazenými na obr. 28.

32.4 Umístěte vektor $\vec{u}=(2;-1)$ do bodu $\mathrm{Q}=[4;3]$.



obr. 27



obr. 28

32.5 Určete velikost vektorů zobrazených na obr. 27.

32.6 Body $\mathrm{K}=[-2;1]$ a $\mathrm{O}=[1;-3]$ tvoří dva vrcholy čtverce KOSA. Určete obvod a obsah tohoto čtverce.

32.7 Určete zbývající souřadnici daného vektoru tak, aby daný vektor byl jednotkovým vektorem: a) $\vec{u}=(-0{,}6;u_y)$, b) $\vec{v}=(v_x;0{,}4)$, c) $\vec{z}=(0;z_y)$, d) $\vec{m}=(-0{,}1;0{,}5;m_z)$, e) $\vec{n}=(-1;n_y;1)$.

32.8 Napište souřadnice jednotkového vektoru, který je rovnoběžný s vektorem a) $\vec{a}=(3;-4)$, b) $\vec{n}=(0;7)$, c) $\vec{c}=(3;6;-2)$.

32.9 Jsou dány vektory $\vec{k}=(4;-3)$, $\vec{l}=(-2;-1)$ a $\vec{m}=(1;-2)$. Určete souřadnice vektoru: a) $\vec{u}=\vec{k}+\vec{l}-\vec{m}$, b) $\vec{b}=2\vec{l}-3\vec{k}+5\vec{m}$.

32.10 Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé či nezávislé: a) $\vec{v_1} = (-2; 3)$, $\vec{v_2} = (4; 5)$; b) $\vec{v_1} = (-1; 2; 3)$, $\vec{v_2} = (0; 2; 5)$, $\vec{v_3} = (-2; 6; 11)$. Pokud jsou lineárně závislé, napište jeden z nich jako lineární kombinaci ostatních.

32.11 Pro které reálné číslo λ jsou vektory $\vec{u} = (2; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; -2; 0)$ a $\vec{w} = (-4; \lambda; 6)$ lineárně závislé? A pro která reálná čísla λ jsou zadané vektory lineárně nezávislé?

32.12 Vypočítejte skalární součin vektorů a) $\vec{u} = (3; 1)$ a $\vec{v} = (-1; 7)$, b) $\vec{m} = (-4; 1; -1)$ a $\vec{n} = (2; -1; 3)$.

32.13 Vypočtěte odchylku vektorů a) $\vec{k} = (1; \sqrt{3})$ a $\vec{l} = (-2\sqrt{3}; -2)$, b) $\vec{v} = (2; 1; 1)$ a $\vec{w} = (-1; 1; -1)$.

32.14 Vypočítejte vektorový součin vektorů a) $\vec{p} = (1; -3; 2)$ a $\vec{q} = (2; 1; -4)$, b) $\vec{u} = (3; -1; -1)$ a $\vec{w} = (6; -2; -2)$.

33. Analytická geometrie v rovině – přímka

33.1 Napište parametrické vyjádření a obecnou rovnici přímky, která prochází body $P = [2; 1]$ a $Q = [-3; 2]$.

33.2 Napište parametrické vyjádření i obecnou rovnici přímky *q*, která prochází bodem $A = [-1; 2]$ a která je rovnoběžná s přímkou *p* danou parametricky: $x = 2 - t;\ y = 3t;\ t \in \mathbb{R}$.

33.3 Napište parametrické vyjádření i obecnou rovnici přímky *k*, která prochází bodem $B = [3; 1]$ a která je kolmá na přímku *l* danou parametricky: $x = -1 + t;\ y = 2 - 2t;\ t \in \mathbb{R}$.

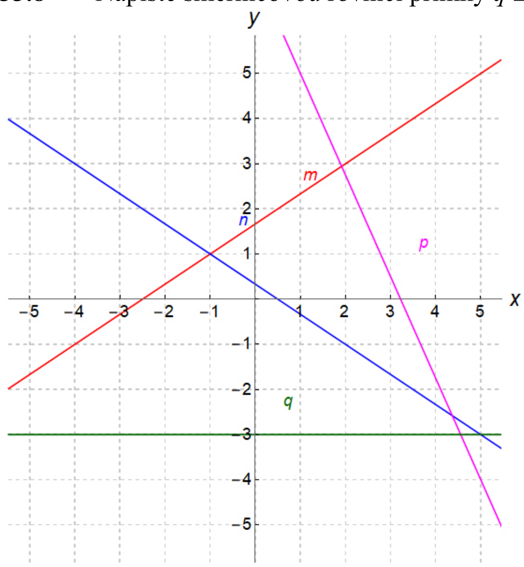
33.4 Napište parametrické vyjádření i obecnou rovnici přímky *m*, která prochází bodem $C = [2; 3]$ a která je rovnoběžná s přímkou *n* danou obecnou rovnicí $x - 2y + 4 = 0$.

33.5 Napište parametrické vyjádření i obecnou rovnici přímky *c*, která prochází bodem $D = [-3; 1]$ a která je kolmá na přímku *d* danou obecnou rovnicí $2x + 3y - 1 = 0$.

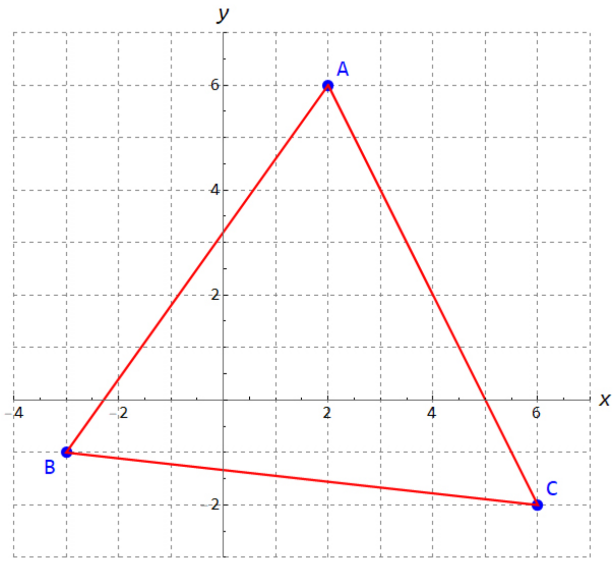
33.6 Napište parametrické vyjádření přímky *n* zobrazené na obr. 29.

33.7 Napište obecnou rovnici přímky *m* zobrazené na obr. 29.

33.8 Napište směrnicovou rovnici přímky *q* zobrazené na obr. 29.



obr. 29



obr. 30

33.9 Napište parametrické vyjádření úseček tvořících strany trojúhelníka ABC zobrazeného na obr. 30.

33.10 Napište obecné rovnice přímek, na kterých leží výšky v trojúhelníku ABC zobrazeného na obr. 30.

33.11 Napište směrnicové rovnice přímek, na kterých leží těžnice trojúhelníka ABC zobrazeného na obr. 30.

33.12 Vypočítejte souřadnice průsečíku přímek *p* a *q*, které jsou zobrazeny na obr. 29.

33.13 Určete vzájemnou polohu přímek *k* a *l* v závislosti na reálném parametru α. Přímky jsou dány takto: $k: x = 2 - t;\ y = 3 + 2t;\ t \in \mathbb{R}$ a $l: x = 2 + 3s;\ y = 1 - \alpha \cdot s;\ s \in \mathbb{R}$.

33.14 Dokažte, že přímky *r*: $3x-4y+2=0$ a $s: x=1+4t;\ y=-2+3t;\ t\in\mathbb{R}$ jsou rovnoběžné a určete jejich vzájemnou vzdálenost.

33.15 Najděte osově souměrný bod s bodem $\mathrm{F}=[2;-1]$ podle přímky $q: x-y+1=0$.

33.16 Vypočtěte úhel zadaných přímek: a) $a: x\sqrt{3}+y+2=0$ a $b: 3x+3y\sqrt{3}-4=0$, b) $c: x+2y-3=0$ a $d: x=1+3t;\ y=2+t;\ t\in\mathbb{R}$.

34. Analytická geometrie v prostoru – přímka

34.1 Napište parametrické vyjádření přímky *k*, která prochází body $\mathrm{C}=[1;-1;-1]$ a $\mathrm{D}=[2;1;-3]$. Určete zbývající souřadnice bodu $\mathrm{F}=[0;\ y_{\mathrm{F}};\ z_{\mathrm{F}}]$ tak, aby bod F ležel na přímce *k*.

34.2 Napište parametrické vyjádření přímky *l*, která prochází bodem $\mathrm{R}=[2;-3;1]$ a která je rovnoběžná s osou *x* kartézského systému souřadnic.

34.3 Napište parametrické vyjádření přímky *t*, která prochází bodem $\mathrm{A}=[1;-4;3]$ a která je kolmá k rovině *xy* kartézského systému souřadnic.

34.4 Napište parametrické vyjádření přímky *h*, která prochází průsečíkem přímek $m: x=2-t;\ y=1+t;\ z=-1+2t;\ t\in\mathbb{R}$ a $n: x=5-2s;\ y=s;\ z=-3+2s;\ s\in\mathbb{R}$ a která je rovnoběžná s přímkou $p: x=1-3\alpha;\ y=3+\alpha;\ z=2+4\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R}$.

34.5 Přímka *i* je dána body $\mathrm{K}=[-3;1;-1]$ a $\mathrm{L}=[1;2;-2]$, přímka *j* je dána body $\mathrm{M}=[3;-1;1]$ a $\mathrm{N}=[2;\alpha;3]$. V závislosti na reálném parametru α určete vzájemnou polohu přímek *i* a *j*.

35. Analytická geometrie v prostoru – rovina

35.1 Napište parametrické vyjádření přímky *p*, která je kolmá na rovinu $\rho: x+3y-1=0$ a která prochází bodem $\mathrm{Z}=[-3;1;-4]$.

35.2 Napište parametrické vyjádření roviny, která je dána body $\mathrm{K}=[-1;2;3]$, $\mathrm{R}=[1;-2;1]$ a $\mathrm{B}=[1;3;0]$.

35.3 Napište obecnou rovnici roviny, která je dána body $\mathrm{P}=[1;-1;1]$, $\mathrm{A}=[2;1;-1]$ a $\mathrm{S}=[-1;0;2]$.

35.4 Dokažte, že vektory $\vec{u}=(1;-1;-2)$ a $\vec{v}=(3;1;-1)$ jsou lineárně nezávislé. Pak napište obecnou rovnici roviny, která prochází bodem $\mathrm{W}=[0;1;2]$ a v níž leží vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

35.5 Napište parametrické vyjádření roviny τ, která je rovnoběžná s rovinou $\omega: x+y-z+1=0$ a která prochází bodem $\mathrm{Q}=[1;-2;4]$.

35.6 Napište obecnou rovnici roviny β, která je kolmá k rovině $\alpha: x-2y+z+2=0$ a která prochází body $\mathrm{E}=[2;-3;1]$ a $\mathrm{F}=[3;4;-2]$.

35.7 Napište parametrické vyjádření roviny, která je dána dvěma přímkami $p: x=1+t;\ y=-2-t;\ z=-1-2t;\ t\in\mathbb{R}$ a $q: x=2-s;\ y=1+2s;\ z=3s;\ s\in\mathbb{R}$.

35.8 Napište obecnou rovnici roviny, která je dána dvěma přímkami $m: x=2-t;\ y=1+2t;\ z=3+t;\ t\in\mathbb{R}$ a $n: x=3+2s;\ y=2-4s;\ z=1-2s;\ s\in\mathbb{R}$.

35.9 Napište obecnou rovnici roviny δ, která je kolmá na roviny $\omega: x+3y-2z-4=0$ a $\sigma: 2x-y+z+2=0$ a která prochází bodem $\mathrm{H}=[1;0;5]$.

35.10 Přímka *q* je dána body $\mathrm{P}=[-3;1;1]$ a $\mathrm{Q}=[1;2;-2]$, rovina η je dána body $\mathrm{E}=[3;-1;0]$, $\mathrm{F}=[2;-3;\beta]$ a $\mathrm{G}=[0;-1;3]$. V závislosti na reálném parametru β určete vzájemnou polohu přímky *q* a roviny η.

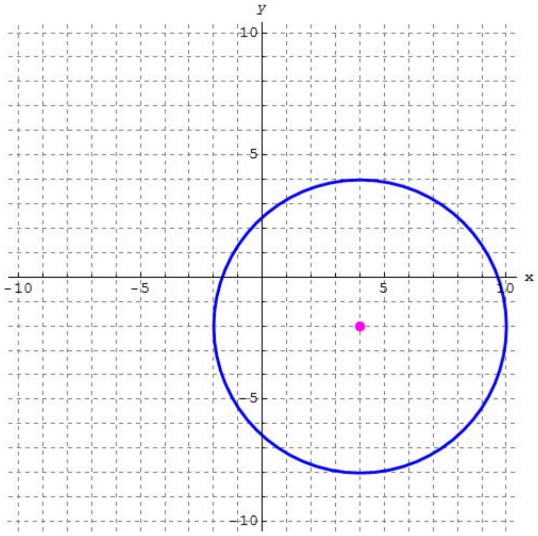
36. Analytická geometrie kvadratických útvarů – kružnice

36.1 Napište středový tvar rovnice kružnice, která je zobrazená na obr. 31.

36.2 Napište obecnou rovnici kružnice, která má střed v bodě $\mathrm{S}=[-2;3]$ a prochází bodem $\mathrm{Q}=[-4;-1]$.

36.3 Napište obecnou rovnici kružnice, jejíž průměr tvoří úsečka KL daná body $K = [-3; -2]$ a $L = [-1; 4]$.

36.4 Napište rovnici kružnice, která se dotýká obou os kartézského systému souřadnic a prochází bodem $W = [-2; -1]$.



obr. 31

36.5 Zjistěte, zda zadaná rovnice popisuje kružnici; pokud ano, určete střed a poloměr této kružnice: a) $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$, b) $x^2 + y^2 - 6y - 21 = 0$, c) $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 26 = 0$.

36.6 Napište rovnici tečny kružnice $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 66 = 0$ v jejím bodě $T = [-5; y_0 > 0]$.

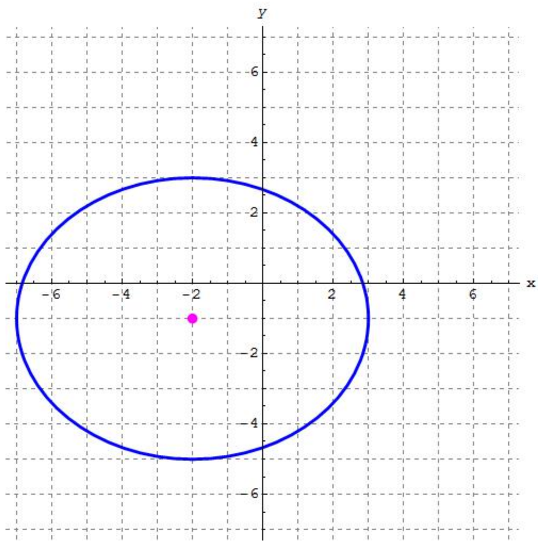
36.7 Napište rovnice tečen kružnice $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ vedených z bodu $Q = [5; 2]$.

36.8 Určete vzájemnou polohu kružnice $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ a přímky $x - y + 2 = 0$. Pokud existují společné body, určete jejich souřadnice.

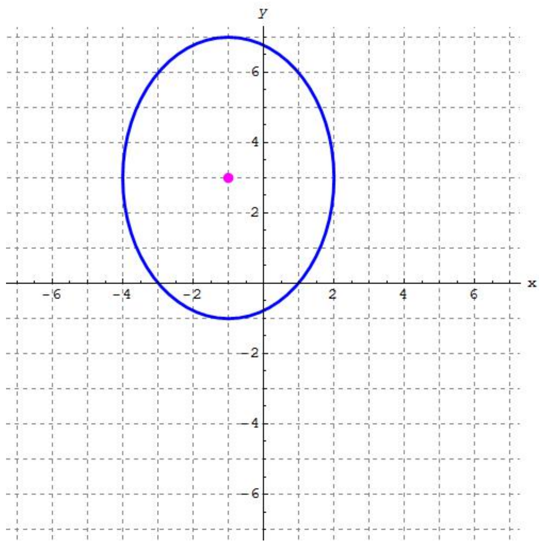
37. Analytická geometrie kvadratických útvarů – elipsa

37.1 Napište středovou rovnici elipsy, která je zobrazena na obr. 32. Určete souřadnice jejích ohnisek.

37.2 Napište středovou rovnici elipsy, která je zobrazena na obr. 33. Určete souřadnice jejích hlavních vrcholů a excentricitu.



obr. 32



obr. 33

37.3 Napište obecnou rovnici elipsy, která má ohniska $F_1 = [1; 3]$ a $F_2 = [5; 3]$ a délka hlavní poloosy je 5 j.

37.4 Napište obecnou rovnici elipsy, která má hlavní vrchol $K = [-1; 4]$ a vedlejší vrchol $L = [1; 1]$.

37.5 Zjistěte, zda daná rovnice popisuje elipsu; pokud ano, určete souřadnice jejího středu a délky obou poloos: a) $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$, b) $4x^2 + 25y^2 + 24x - 100y + 120 = 0$.

37.6 Napište obecnou rovnici elipsy, která má hlavní vrcholy v průsečících kružnic $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ a $x^2 + y^2 - 14x - 4y + 28 = 0$ a vedlejší vrcholy ve středech těchto kružnic.

37.7 Napište rovnici tečny vedené k elipse dané rovnicí $3x^2 + 6y^2 + 12x - 36y + 48 = 0$ jejím bodem $T = [x_0 < 0; 2]$.

37.8 Určete délku tětivy, kterou na elipse dané rovnicí $4x^2 + y^2 - 8x + 6y + 5 = 0$ vytíná přímka daná rovnicí $2x - y - 5 = 0$.

37.9 V závislosti na reálném parametru β určete vzájemnou polohu elipsy dané rovnicí $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$ a přímky dané rovnicí $x - 2y + \beta = 0$.

38. Analytická geometrie kvadratických útvarů – hyperbola

38.1 Napište středovou rovnici hyperboly, která je zobrazena na obr. 34. Určete souřadnice jejích ohnisek.

38.2 Napište středovou rovnici hyperboly, která je zobrazena na obr. 35. Určete délku její vedlejší poloosy.

38.3 Napište obecnou rovnici hyperboly, která má ohniska $F_1 = [-2; 4]$ a $F_2 = [4; 4]$ a délku vedlejší poloosy 2 j.

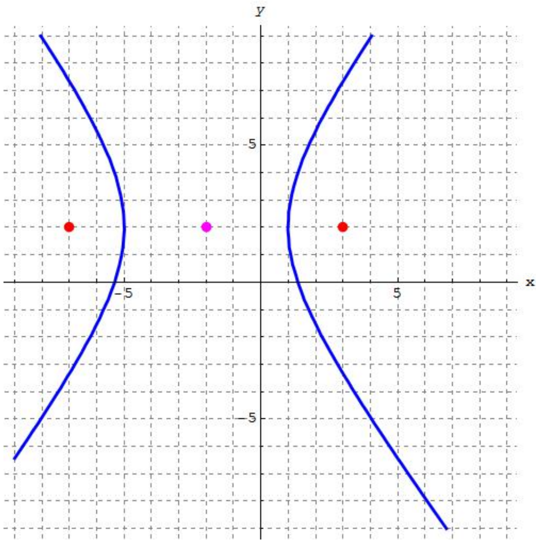
38.4 Napište obecnou rovnici hyperboly, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou *y*, hlavní vrchol má souřadnice $P = [1; -4]$, délka hlavní poloosy je 3 j a excentricita je 5 j.

38.5 Zjistěte, zda daná rovnice popisuje hyperbolu; pokud ano, určete souřadnice jejího středu a délky obou poloos: a) $25x^2 - 9y^2 - 50x + 54y - 281 = 0$, b) $-4x^2 + 16y^2 + 8x - 96y + 156 = 0$.

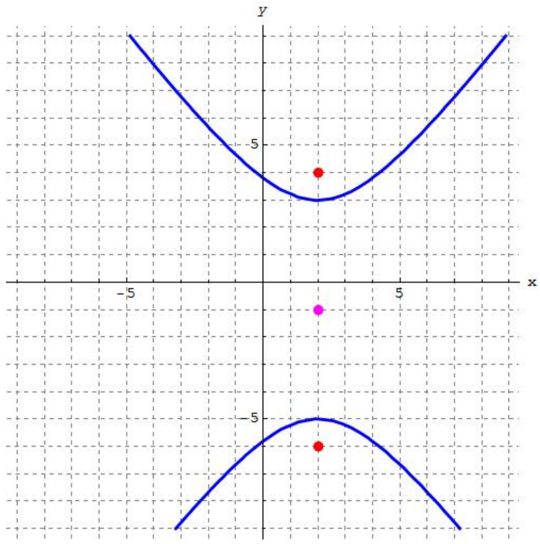
38.6 Je dána elipsa obecnou rovnicí $9x^2 + 25y^2 + 18x - 100y - 116 = 0$. Napište obecnou rovnici hyperboly, která má ohniska v hlavních vrcholech elipsy a vrcholy v ohniskách elipsy.

38.7 Napište rovnici tečny vedené k hyperbole popsané rovnicí $-4x^2 + y^2 - 8x - 8y - 24 = 0$ v jejím bodě $T = [3; y_0 < 0]$.

38.8 Určete vzájemnou polohu hyperboly popsané rovnicí $x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ a přímky popsané rovnicí $x - 3y + 2 = 0$.



obr. 34



obr. 35

38.9 Napište rovnice asymptot hyperboly dané rovnicí $4x^2 - 8x - 9y^2 - 36y - 68 = 0$.

38.10 Asymptoty hyperboly mají rovnice $2x - y + 5 = 0$ a $2x + y + 3 = 0$ a jedno z jejích ohnisek je $F = [-2; 6]$. Napište obecnou rovnici uvažované hyperboly.

38.11 Napište rovnici rovnoosé hyperboly, která má střed $S = [-2; 3]$ a jedno z jejích ohnisek je $F = [0; 5]$.

38.12 Napište rovnici rovnoosé hyperboly, jejíž hlavní osa leží na přímce $x + y + 3 = 0$, jedna asymptota je přímka $x + 4 = 0$ a hyperbola prochází bodem $\mathrm{W} = [-3; -1]$.

39. Analytická geometrie kvadratických útvarů – parabola

39.1 Napište vrcholovou rovnici paraboly, která je zobrazena na obr. 36.

39.2 Napište vrcholovou rovnici paraboly, která je zobrazena na obr. 37.

39.3 Napište obecnou rovnici paraboly, která má řídící přímku $d: y = -5$ a ohnisko $\mathrm{F} = [-1; 3]$.

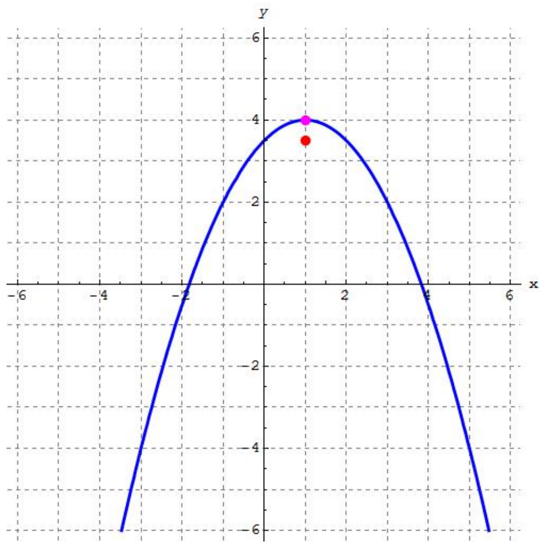
39.4 Napište obecnou rovnici paraboly, která má vrchol v bodě $\mathrm{V} = [2; 4]$ a která prochází bodem $\mathrm{Q} = [4; 0]$.

39.5 Zjistěte, zda daná rovnice popisuje parabolu; pokud ano, určete souřadnice jejího vrcholu, souřadnice ohniska a napište rovnici její řídící přímky: a) $x^2 + 4x - 4y + 8 = 0$, b) $y^2 + x - 8y + 16 = 0$.

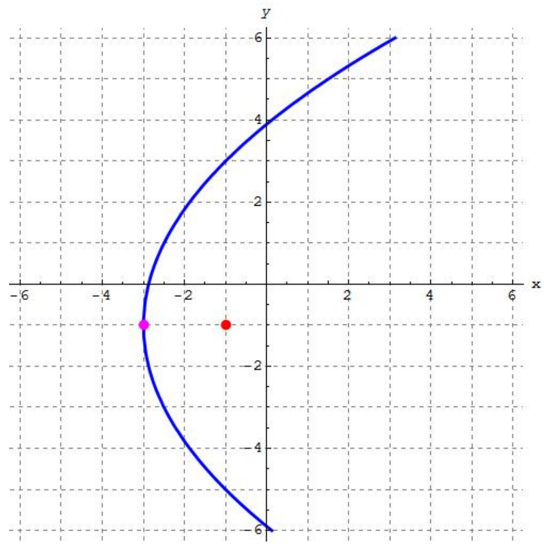
39.6 Je dána hyperbola popsaná obecnou rovnicí $9x^2 - 16y^2 - 54x - 32y - 79 = 0$. Napište obecnou rovnici paraboly, která má vrchol v ohnisku hyperboly a ohnisko v hlavním vrcholu hyperboly.

39.7 Napište rovnici tečny vedené k parabole popsané rovnicí $x^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ v jejím bodě $\mathrm{T} = [4; y_0]$.

39.8 Určete vzájemnou polohu paraboly popsané rovnicí $y^2 + 4x + 6y + 5 = 0$ a přímky popsané rovnicí $x + 2y + 1 = 0$.



obr. 36



obr. 37

40. Diferenciální počet – elementární funkce

40.1 Zjistěte, zda se dané funkce rovnají na určité podmnožině reálných čísel; tuto podmnožinu nalezněte: a) $f: y = 1$, $g: y = \dfrac{|x|}{x}$, b) $h: y = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$, $j: y = x + 5$, c) $k: y = \dfrac{x \sin x - x + \sin x - 1}{x + 1}$, $l: y = 1 - \sin x$.

40.2 Jsou dány funkce: $p: y = |x|$, $q: y = -x + 2$, $r: y = \sin x$ a $s: y = \mathrm{e}^x$. Napište předpis složené funkce a nakreslete pěkně její graf: a) $f: y = p \circ q$, b) $g: y = s \circ p$, c) $h: y = r \circ p$, d) $j: y = q \circ s$.

41. Diferenciální počet – limity

41.1 Načrtněte pěkně graf funkce, která: a) je spojitá v bodě x = -2; b) není definovaná v bodě x = 1; c) není spojitá v bodě x = 2, ale lze ji v tomto bodě dodefinovat tak, aby spojitá byla; d) není spojitá v bodě x = -1, ale nelze ji dodefinovat tak, aby spojitá byla.

Vypočtěte:

41.2 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + 1}{x - 3}$;

41.12 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2}{1 - \cos x}$;

41.3 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$;

41.4 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+4}{12-3x^2}$;

41.5 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4-4x^3}{2x^2+10x-12}$;

41.6 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{4x^2-20x-56}$;

41.7 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^3-15x^2+x-5}{4x-20}$;

41.8 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^3+21x^2-12x-84}{-4x^2-4x+8}$;

41.9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$;

41.10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 2x}$;

41.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 4x}$;

41.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-1}{5x^2}$;

41.14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg} 3x}$;

41.15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$;

41.16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{\operatorname{tg}^2 5x}$;

41.17 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$;

41.18 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+3x-4}{1-\sqrt{x+5}}$;

41.19 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2+5}$;

41.20 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^2+x-3}{5x-1}$;

41.21 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-2x^2+5x-1}{3x^3+x^2+4}$.

42. Diferenciální počet – derivace

Vypočtěte první derivaci funkce a určete její definiční obor:

42.1 $f: y = 2x^3 - \sin x + 15$;

42.2 $g: y = \ln x - \mathrm{e}^x + \cos x - 1$;

42.3 $h: y = \dfrac{5x^2\sqrt{x} - 4x^5 + 3}{x^2}$;

42.4 $j: y = 4\sin 5x - \ln(2x-1)$;

42.5 $k: y = 2\cos^3(4-3x) - \mathrm{e}^{3\sin(x^2-5)-1}$;

42.6 $l: y = 5x^4\cos 2x$;

42.7 $m: y = -(2x^3+x)\mathrm{e}^{-4x}$;

42.8 $n: y = 4x^2\ln 2x^3$;

42.9 $o: y = \dfrac{\sin 3x}{x^2}$;

42.10 $p: y = \dfrac{\ln 3x}{x}$;

42.11 $q: y = \log\left(\dfrac{1-2x}{1+2x}\right)$;

42.12 $r: y = \ln\sqrt{\dfrac{2+\sin x}{2-\sin x}}$.

42.13 Vypočtěte druhou derivaci funkce $f: y = \dfrac{1}{4}x^2 - 2\cos 3x$ a určete její definiční obor.

42.14 Vypočtěte třetí derivaci funkce $g: y = t\cdot \mathrm{e}^{-2t} + \ln(2t)$ a určete její definiční obor.

42.15 Napište předpis tečny a normály ke grafu funkce $h: y = x^3 + x^2 - 4$ v jejím bodě $\mathrm{T} = [1; y_0]$.

42.16 Napište předpis tečny ke grafu funkce $j: y = x\ln x$ v jejím bodě $\mathrm{T} = [\mathrm{e}; y_0]$.

43. Diferenciální počet – průběh funkce

43.1 K funkcím zobrazeným na obr. 38 a obr. 39 nakreslete průběh jejich první derivace, tj. závislost přírůstku funkce na x-ové souřadnici.

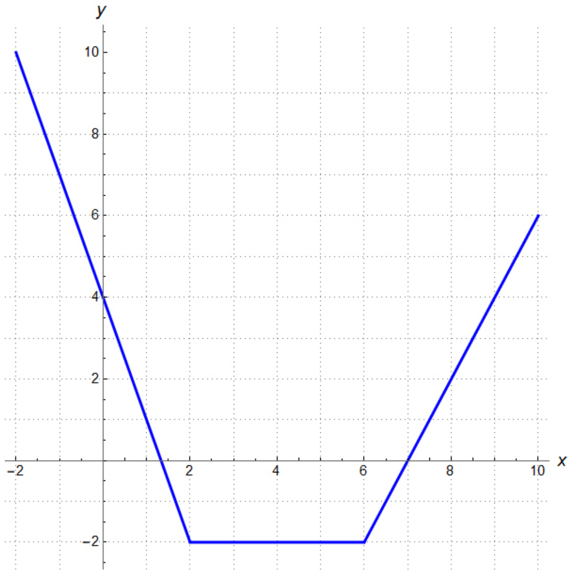
43.2 Určete definiční obor a intervaly monotonie funkce $h: y = 3x^2 + 5x - 1$.

43.3 Určete definiční obor a intervaly monotonie funkce $j: y = x^3 - 3x^2 - 45x + 15$.

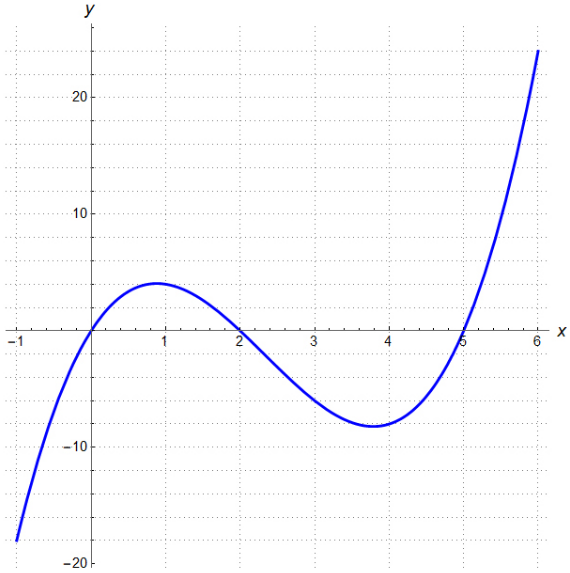
43.4 Určete definiční obor a intervaly monotonie funkce $k: y = x\cdot \mathrm{e}^x$.

43.5 Určete definiční obor, intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $l: y = x^4 - 0{,}5x^2$.

43.6 Určete definiční obor, intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $m: y = \frac{\ln x}{x}$.



obr. 38



obr. 39

43.7 Určete, na kterých intervalech je konvexní a na kterých konkávní funkce $n: y = 2x^3 - 6x^2 - 3x - 7$. Určete definiční obor této funkce.

43.8 Určete, na kterých intervalech je konvexní a na kterých konkávní funkce $m: y = x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 4x + 5$. Určete definiční obor této funkce.

43.9 Určete, na kterých intervalech je konvexní a na kterých konkávní funkce $o: y = x\ln x$. Určete definiční obor této funkce.

43.10 Určete předpis asymptot grafu funkce $p: y = \frac{2x^2 + 3}{x} + 4$.

43.11 Určete předpis asymptot grafu funkce $q: y = x \cdot \mathrm{e}^x$.

43.12 Je dána funkce $r: y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 50$. Určete její definiční obor a načrtněte pěkně její graf. Potřebné vlastnosti funkce (monotonie, lokální extrémy, konvexnost, konkávnost, limity v krajních bodech definičního oboru, …) si vypočítejte.

43.13 Je dána funkce $s: y = \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)$. Určete její definiční obor a načrtněte pěkně její graf. Potřebné vlastnosti funkce (monotonie, lokální extrémy, konvexnost, konkávnost, limity v krajních bodech definičního oboru, …) si vypočítejte.

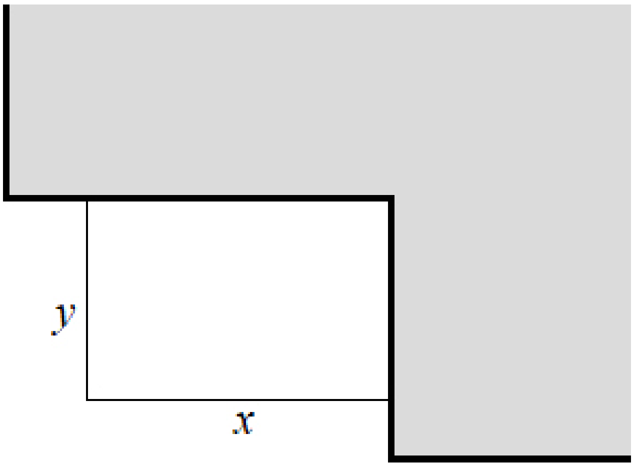
44. Diferenciální počet – technické aplikace

44.1 Mravenec se pohybuje po desce stolu tak, že *x*-ová souřadnice se v závislosti na čase *t* mění podle vztahu $x(t) = 0{,}05t^2 + 0{,}01t - 0{,}02\sin(0{,}2t)$. Najděte vztah popisující časovou závislost velikosti rychlosti a velikosti zrychlení mravence.

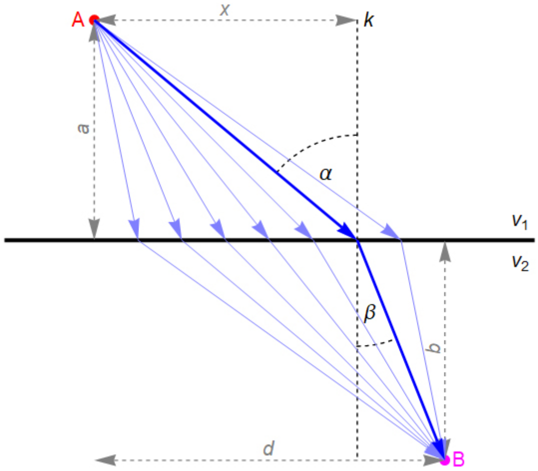
44.2 Okamžitá výchylka dětské hračky zavěšené na pružině je při zanedbání odporových sil popsána vztahem $y(t) = 0{,}1\sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$. Vypočtěte velikost rychlosti a zrychlení kmitající hračky v závislosti na čase. V jaké poloze se nacházela a jak velkou rychlostí a s jakým zrychlením se tato hračka pohybovala v čase 2 s od začátku pohybu?

44.3 Okamžitá výchylka *y* tlumeného harmonického oscilátoru je popsána vztahem $y = \mathrm{e}^{-bt} y_\mathrm{m} \sin(\omega t + \varphi_0)$, kde y_m je amplituda kmitání, ω je úhlová frekvence kmitaného pohybu, φ_0 je počáteční fáze kmitání a *b* je koeficient útlumu. Najděte vztah pro časovou závislost velikosti rychlosti a velikosti zrychlení tohoto pohybu.

44.4 Magnetický indukční tok se v cívce mění v závislosti na čase podle vztahu $\Phi(t) = a\cos\omega t + bt + c\ln(dt)$, kde a, b, c, d a ω jsou konstanty. Určete průběh elektrického napětí, které se přitom indukuje na svorkách cívky.



obr. 40



obr. 41

44.5 Cívkou s indukčností 0,2 H protéká proud popsaný vztahem $I = I_0 \sin\omega t$, kde $I_0 = 0{,}5\ \mathrm{A}$. Frekvence daného elektrického proudu je 50 Hz. Určete hodnotu napětí, které se v cívce naindukuje v čase 17 ms od začátku uvažovaného experimentu.

44.6 Na parabole popsané rovnicí $2x^2 - 2y - 9 = 0$ najděte bod, jehož vzdálenost od počátku soustavy souřadnic je minimální.

44.7 Farmář chce k rohu domu připevnit pletivo o délce 50 m tak, aby dostal ohraničený pozemek ve tvaru obdélníka (viz obr. 40). Určete rozměry tohoto obdélníka tak, aby jeho obsah byl maximální.

44.8 Majitel rodinného domu si chce vyhloubit u domu bazén ve tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu. Na dno a stěny bazénu má připraveno $48\ \mathrm{m}^2$ dlaždic. Jaké rozměry má mít bazén, chce-li majitel domku, aby měl bazén největší možný objem.

44.9 Zákon lomu, který popisuje lom světla na rozhraní dvou optických prostředí, odvodil též francouzský matematik Pierre de Fermat (1601 - 1665) pomocí tzv. principu nejmenšího času. Pokud vychází světelný paprsek z bodu A (viz obr. 41), na rozhraní dvou optických prostředí se láme a dopadá do bodu B. Tato trajektorie jako jediná ze všech možných trajektorií splňuje podmínku, že světlo projde dráhu odpovídající této trajektorii za nejkratší možný čas. Odvoďte podmínku, která pro tuto trajektorii platí. Symboly v_1 (resp. v_2) značí velikost rychlosti šíření světla v prvním (resp. ve druhém) optickém prostředí.

45. Integrální počet – primitivní funkce

Určete definiční obor funkce a vypočítejte k dané funkci její primitivní funkci:

45.1 $f: y = 3x^4 + \cos x - 10$;

45.2 $g: y = -2\mathrm{e}^x - \sin x + 3$;

45.3 $h: y = \dfrac{3x^5 - 4x^2\sqrt{x} - 2}{x^2}$;

45.4 $j: y = 4\sin x - \dfrac{3}{x}$;

45.5 $k: y = x\cos x$;

45.6 $l: y = 5x^2 \cdot \mathrm{e}^x$;

45.7 $m: y = \ln x$;

45.8 $n: y = \sin x \cdot \mathrm{e}^x$;

45.9 $p: y = \sin x \cdot \cos x$;

45.10 $q: y = \sin 2x + 5\sin 3x - 6\sin 4x$;

45.11 $r: y = 2\cos(4 - 3x) + 5\mathrm{e}^{2-4x}$;

45.12 $s: y = \sin^2 x \cdot \cos x$;

45.13 $t: y = (2x - 5)\cdot \mathrm{e}^{x^2 - 5x + 1}$;

45.14 $u: y = \dfrac{2x^2 + \cos x}{2x^3 + 3\sin x}$.

45.15 Napište předpis primitivní funkce k funkci $f: y = x^3 - 2x^2 + 1$; primitivní funkce má přitom procházet bodem $\mathrm{Q} = [-1; 2]$.

46. Integrální počet – určitý integrál

Vypočtěte:

46.1 $\int_0^1 \left(2x^3+3x-1\right)\mathrm{d}x$;

46.2 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x$;

46.3 $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

46.4 $\int_0^{\pi} \left(2x+1\right)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$;

46.5 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$;

46.6 $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$;

46.7 $\int_0^1 \frac{24x}{\left(2x^2+3\right)^3}\mathrm{d}x$;

46.8 $\int_{-1}^{1} \left(8x+2\right)\cdot\sqrt{2x^2+x}\,\mathrm{d}x$;

46.9 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\cdot\cos^2 x\,\mathrm{d}x$;

46.10 $\int_{\mathrm{e}}^{3\mathrm{e}} \frac{5}{x\cdot\ln x}\mathrm{d}x$.

47. Integrální počet – výpočet obsahů ploch

47.1 Vypočtěte obsah plochy pod jedním „obloukem“ grafu funkce $f: y=\cos x$.

47.2 Vypočtěte obsah plochy pod jedním „obloukem“ grafu funkce $g: y=\sin nx; n\in\mathbb{N}$.

47.3 Vypočtěte obsah plochy útvaru ohraničeného grafem funkce $f: y=1-x^2$ a osou x.

47.4 Vypočtěte obsah plochy útvaru ohraničeného grafem funkce $m: y=x^2-3x$ a osou x.

47.5 Vypočtěte obsah plochy útvaru ohraničeného grafy funkcí $p: y=x^2-4x+6$ a $q: y=-x^2+2x+6$.

47.6 Vypočtěte obsah plochy útvaru ohraničeného grafy funkcí $k: y=x^2$ a $l: y=\sqrt{x}$.

47.7 Vypočtěte obsah plochy útvaru ohraničeného grafem funkce $j: y=\mathrm{e}^x$, přímkou $x-1=0$ a osou x.

47.8 Vypočtěte obsah plochy útvaru ohraničeného grafem funkce $j: y=\mathrm{e}^x$ a přímkami $x-y+1=0$ a $x-1=0$.

47.9 Vypočtěte obsah plochy útvaru ohraničeného grafy funkcí $c: y=\mathrm{e}^x$ a $d: y=\mathrm{e}^{-x}$ a přímkou $x-1=0$.

47.10 Vypočtěte obsah plochy útvaru ohraničeného grafem funkce $v: y=x^5$ a přímkou $x-y=0$.

48. Integrální počet – výpočet objemů těles

48.1 Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y=2x^2$, $y=0$ a $x=1$ kolem osy x.

48.2 Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y=2x^2$, $x=0$ a $y=1$ kolem osy y.

48.3 Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y=\sqrt{x}$, $y=0$ a $x+4y-5=0$ kolem osy x.

48.4 Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y=\sqrt{x-1}$, $x=0$, $y=0$ a $y=2$ kolem osy y.

48.5 Odvoďte vztah pro výpočet objemu rotačního válce s poloměrem podstavy r a výškou v. Předpokládejte, že $r>0$ a $v>0$.

48.6 Odvoďte vztah pro výpočet objemu rotačního kužele s poloměrem podstavy r a výškou v. Předpokládejte, že $r>0$ a $v>0$.

48.7 Odvoďte vztah pro výpočet objemu koule s poloměrem r ($r>0$).

48.8 Odvoďte vztah pro výpočet objemu kulové úseče, která vznikla z koule s poloměrem r. Výška úseče je v. Předpokládejte, že $r>0$ a $v\in\left(0;r\right)$.

49. Integrální počet – technické aplikace

49.1 Závislost velikosti zrychlení hmotného bodu na čase je popsán funkcí $a(t) = 0{,}05t - 0{,}01$. Určete závislost velikosti rychlosti na čase a dráhy na čase. V čase $t = 0\ \mathrm{s}$ byl hmotný bod uveden do pohybu rychlostí o velikosti $0{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a jím uražená dráha byla nulová.

49.2 Dva přímé velmi dlouhé rovnoběžné vodiče se nacházejí ve vakuu v určité vzdálenosti od sebe. Vodiči protékají proudy 40 A a 30 A ve stejných směrech. Na zvětšení vzájemné vzdálenosti vodičů na trojnásobek je třeba vykonat určitou práci. Vypočítejte část této práce, která připadá na jednotkovou délku vodiče. (Pro velikost síly působící mezi uvažovanými vodiči platí vztah $F_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d} l$, kde l je délka vodičů, d jejich vzájemná vzdálenost a $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N \cdot A^{-2}}$ permeabilita prostředí.)

49.3 Jakou práci vykoná 5 molů ideálního plynu při izotermické expanzi plynu, při níž se počáteční objem plynu zdvojnásobí? Expanze probíhala při teplotě 300 K. (Pro ideální plyn platí stavová rovnice ve tvaru $pV = nRT$, kde p je tlak plynu, V jeho objem, n látkové množství, $R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$ je konstanta a T je termodynamická teplota.)

49.4 Fourierova řada nahrazující periodickou funkci f má tvar $f(t) = a_0 + \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} a_{\mathrm{n}} \cos n\omega t + \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} b_{\mathrm{n}} \sin n\omega t$.

Přitom platí: $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$, $a_{\mathrm{n}} = \frac{2}{T}\int_0^{\mathrm{T}} f(t).\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ a $b_{\mathrm{n}} = \frac{2}{T}\int_0^{\mathrm{T}} f(t).\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$. Vypočítejte koeficienty a_0, a_{n} a b_{n} pro funkci definovanou předpisem: $f(t) = 1$ pro $kT \le t < (2k+1)\frac{T}{2}$; $f(t) = -1$ pro $(2k+1)\frac{T}{2} \le t < (k+1)T$; $k \in \mathbb{N}_0$.

50. Posloupnosti – způsoby určení a vlastnosti

50.1 Vyjádřete zadané posloupnosti vztahem pro n-tý člen: a) $2, 3, 4, \ldots$; b) $2, 5, 10, 17, 26, 37, \ldots$, c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \frac{5}{32}, \ldots$; d) $-\frac{6}{2}, \frac{9}{8}, -\frac{12}{18}, \frac{15}{32}, -\frac{18}{50}, \ldots$.

50.2 Vypočítejte prvních pět členů posloupnosti, která je definována vztahem pro n-tý člen: a) $a_{\mathrm{n}} = 5(n-2)$; b) $b_{\mathrm{n}} = 3^{\mathrm{n}-1} + 2$; c) $c_{\mathrm{n}} = (-1)^{\mathrm{n}+1} \cdot \frac{n^2 - 1}{n+4}$; d) $d_{\mathrm{n}} = \frac{|n-2|}{n \cdot (n+1)}$.

50.3 Vypočítejte prvních šest členů posloupnosti, která je zadána rekurentně: a) $a_{\mathrm{n}} = 4 \cdot a_{\mathrm{n}-1}; a_1 = -0{,}5$, b) $b_{\mathrm{n}+2} = 2b_{\mathrm{n}+1} - b_{\mathrm{n}}; b_1 = -1, b_2 = 2$; c) $c_{\mathrm{n}+2} = c_{\mathrm{n}} + c_{\mathrm{n}+1}; c_1 = 1, c_2 = 1$; d) $d_{\mathrm{n}+3} = d_{\mathrm{n}} + \frac{2 \cdot d_{\mathrm{n}+2}}{1 - d_{\mathrm{n}+1}}; d_1 = 5, d_2 = 4, d_3 = 0$.

50.4 Vyjádřete zadané posloupnosti rekurentně: a) $(a_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty} = (n(n+1))_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$; b) $(b_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty} = (\log 2^{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$; c) $(c_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty} = \left(\frac{n+1}{n}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$.

50.5 Posloupnosti, které jsou dány rekurentně, vyjádřete vztahem po n-tý člen: a) $a_{\mathrm{n}} = 4 \cdot a_{\mathrm{n}-1}; a_1 = 3$; b) $b_{\mathrm{n}} = 2 \cdot b_{\mathrm{n}-1} - b_{\mathrm{n}-2}; b_1 = 2, b_2 = 3$; c) $c_{\mathrm{n}} = -c_{\mathrm{n}-1}; c_1 = 5$.

50.6 Určete a dokažte, zda jsou následující posloupnosti rostoucí či klesající: a) $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$; b) $(4-3n)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$; c) $(\sin(n\pi))_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$; d) $(n^2 - 1)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$.

50.7 Určete a dokažte, zda jsou zadané posloupnosti omezené zdola, omezené shora, omezené: a) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$; b) $(2n+1)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$; c) $(\cos(n\pi))_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$; d) $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)_{\mathrm{n}=2}^{\infty}$.

51. Důkaz matematickou indukcí

51.1 Odvoďte na základě vhodného obrázku vztah pro součet vnitřních úhlů konvexního *n*-úhelníku ($n > 3$) a tento vztah dokažte pomocí matematické indukce.

51.2 Vyslovte hypotézu o počtu úhlopříček konvexního *n*-úhelníku ($n > 3$) a dokažte jí pomocí matematické indukce.

51.3 Dokažte matematickou indukcí, že součet prvních *n* přirozených čísel je roven výrazu $\frac{n(n+1)}{2}$.

51.4 Dokažte matematickou indukcí, že součet prvních *n* sudých přirozených čísel je roven výrazu $n(n+1)$.

51.5 Dokažte matematickou indukcí, že součet prvních *n* lichých přirozených čísel je roven výrazu n^2.

51.6 Dokažte matematickou indukcí: $\forall n \in \mathbb{N} : 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

51.7 Matematickou indukcí dokažte platnost tvrzení: $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

51.8 Dokažte, že pro všechna přirozená čísla *n* platí: $6 / (n^3 + 5n)$.

51.9 Dosaďte postupně do výrazu $Q(n) = 2^{2n} - 1$ několik přirozených čísel a formulujte hypotézu o dělitelnosti tohoto výrazu jistým přirozeným číslem pro každé přirozené *n*. Hypotézu poté dokažte matematickou indukcí.

51.10 Dokažte matematickou indukcí, že číslo $V(n) = \frac{10^n - 1}{81} - \frac{n}{9}$ je pro všechna přirozená čísla číslo celé.

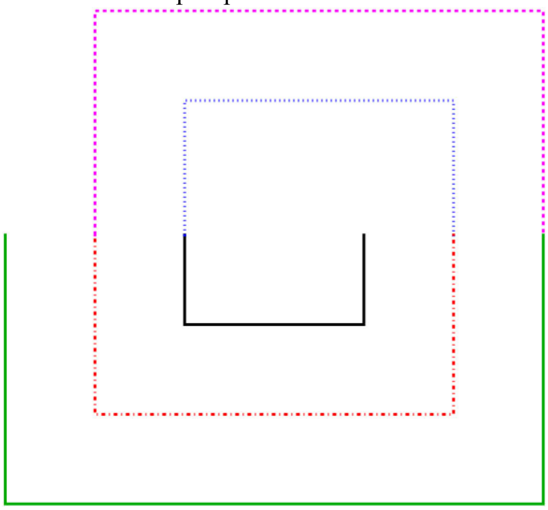
52. Posloupnosti – aritmetická posloupnost

52.1 Zjistěte, zda zadaná posloupnost je aritmetická: a) $(3-2n)_{n=1}^{\infty}$; b) $\left(\frac{2n+1}{5}\right)_{n=1}^{\infty}$; c) $\left(\frac{n}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$.

52.2 Je dána posloupnost vztahem pro *n*-tý člen $a_n = 3n - 4$. Vypočtěte $a_{n+1} - a_n$. Kolikátý člen posloupnosti je sedmkrát větší než třetí člen? Kolikátý člen je roven 50?

52.3 Aritmetická posloupnost obsahuje 60 členů. První tři členy této posloupnosti jsou -200, -190 a -180. Vypočtěte patnáctý člen posloupnosti. Vypočtěte poslední člen posloupnosti. Vypočtěte součet všech členů této posloupnosti. Kolikátý člen posloupnosti je nulový?

52.4 Aritmetická posloupnost obsahuje třicet členů. Poslední dva členy této posloupnosti jsou 5 a 2. Vypočítejte první člen této posloupnosti. Vypočtěte součet všech členů této posloupnosti. Kolikátý člen je třináctkrát větší než předposlední člen?



obr. 42

obr. 43

52.5 Pátý člen aritmetické posloupnosti je 7, osmý člen je 19. Určete součet prvních deseti členů této posloupnosti.

52.6 Součet všech dvaceti členů aritmetické posloupnosti s diferencí -2 je 220. Určete první a poslední člen uvažované posloupnosti.

52.7 První člen aritmetické posloupnosti je 7 a její diference je 3. Kolik členů této posloupnosti je nutno sečíst, abychom získali součet 205? Jaký je první následující člen posloupnosti, který není zařazen do výše uvedeného součtu?

52.8 Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti s diferencí 3 j. Určete strany tohoto trojúhelníka.

52.9 Na obr. 42 je zobrazena část ornamentu, který mají dělníci vyskládat z černých kostek do bílými kostkami dlážděného chodníku. Na druhou nejmenší část ornamentu potřebují dělníci 40 kostek, na každou další pak o 20 kostek více. Kolik kostek budou potřebovat dělníci na pátý úsek? Kolik kostek bude potřeba na celý ornament složený z deseti částí?

52.10 Na obr. 43 je zobrazena vinná klobása na talíři. Uvažujte, že poloměr první kružnice je 1,5 cm a poloměr každé následující je o 1,5 cm větší. Jak dlouhá je vinná klobása?

52.11 Stav částice v kvantové fyzice je popsán třemi kvantovými čísly. Hlavní číslo *n* je dáno přirozenými čísly. Vedlejší kvantové číslo *l* nabývá hodnot 0, 1, 2, …, *n*-1. Magnetické kvantové číslo *m* pak nabývá hodnoty $0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l$. Kolik různých stavů (popsaných různou kombinací čísel *m* a *l*) přísluší k danému hlavnímu kvantovému číslu *n*.

53. Posloupnosti – geometrická posloupnost

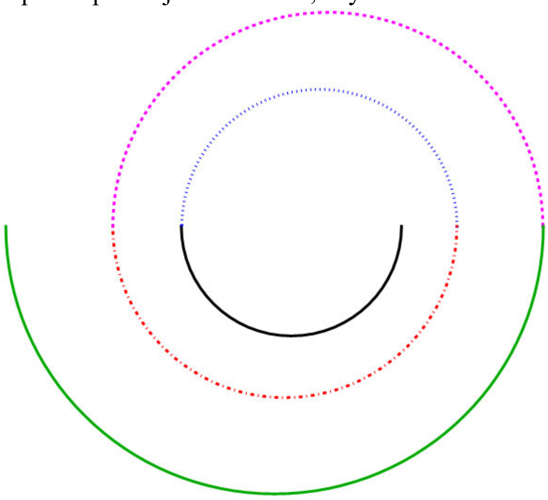
53.1 Zjistěte, zda zadaná posloupnost je geometrická: a) $\left(5+4n\right)_{n=1}^{\infty}$; b) $\left(n^2+3\right)_{n=1}^{\infty}$; c) $\left(3^n\right)_{n=1}^{\infty}$; d) $\left(2\cdot 0{,}1^{n-2}\right)_{n=1}^{\infty}$.

53.2 Geometrická posloupnost je dána vztahem pro *n*-tý člen $b_n = 3^n$. Vypočtěte $\frac{b_{n+1}}{b_n}$. Kolikátý člen posloupnosti je 81krát větší než čtvrtý člen? Kolikátý člen je roven 243?

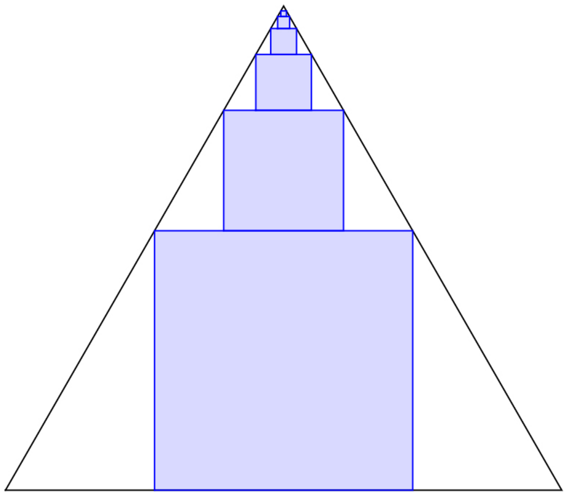
53.3 Zjistěte, zda čísla $\sqrt{3}$, $\frac{3}{2}$ a $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.

53.4 V šestičlenné geometrické posloupnosti je první člen roven 2, poslední pak je roven $\frac{243}{16}$. Určete kvocient této posloupnosti. Jaký je součet všech členů této posloupnosti?

53.5 Sedmý a osmý člen geometrické posloupnosti jsou 6 a 3. Určete kvocient této posloupnosti. Kolik členů této posloupnosti je třeba sečíst, abychom získali součet 756?



obr. 44



obr. 45

53.6 Třetí člen geometrické posloupnosti je $\frac{9}{16}$, pátý člen téže posloupnosti je roven $\frac{81}{256}$. Určete součet prvních pěti členů této posloupnosti.

53.7 Přičteme-li k číslům 1, 13 a 49 stejné číslo, získáme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete toto číslo a kvocient získané posloupnosti.

53.8 Mezi čísla 5 a 160 vložte čtyři čísla tak, aby všechna čísla tvořila po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.

53.9 Členy geometrické posloupnosti tvoří délky hran kvádru, který má objem $64\ \text{cm}^3$ a povrch $112\ \text{cm}^2$. Určete délky hran kvádru.

53.10 Na obr. 44 je zobrazena část ornamentu, který má vyšít švadlena na rukáv košile. Na třetí nejmenší část ornamentu potřebuje švadlena 40 cm nitě, na každou další část ornamentu pak 1,25krát více. Kolik nitě spotřebuje na ornament složený ze šesti částí? Zaokrouhlete tento údaj na desetiny metru. Kolik špulek nití bude švadlena potřebovat na vyšití deseti takových ornamentů, je-li na jedné špulce nit o délce 2 m?

54. Základy finanční matematiky

54.1 Jarda si uložit na začátku roku 2015 do banky na stálý úrok 2 % částku 1000,- Kč. Jakou částku bude mít v bance na konci roku 2020 při a) jednoduchém úrokování, b) při složeném úrokování?

54.2 Jarda si uložil na začátku roku 2014 do banky na stálý úrok 2,1 % částku 5000,- Kč. Jakou částku bude mít v bance na konci roku 2025, platí-li se daň z úroku ve výši 15 %? Uvažujte složené úrokování.

54.3 Jarda si uložil na začátku roku do banky na stálý úrok 3 % částku 10000,- Kč. Jakou částku bude mít na konci roku na účtu, jestliže úrokování probíhá a) ročně, b) pololetně, c) čtvrtletně, d) měsíčně, e) denně (uvažujte 365 dnů)?

54.4 Firemní automobil byl pořízen za 850000,- Kč. Každý následující rok se z ceny automobilu odepisuje vždy stejné procento ceny automobilu z minulého roku. Po pěti letech se hodnota automobilu sníží přibližně na 143000. Jaké procento ceny se každoročně odepisuje z ceny automobilu?

54.5 Jarda si na nový telefon půjčil od kamaráda 20000,- Kč. Domluvili se, že mu částku splatí během jednoho roku ve čtyřech splátkách, ke které si kamarád připočítá 5 % z aktuální dlužné částky. Kolik zaplatí Jarda na úrocích kamarádovi?

54.6 Počet obyvatel Kocourkova roste každý rok o 4 % počtu z minulého roku. Za jak dlouho dosáhne počet obyvatel trojnásobku počtu z doby, kdy sčítání obyvatel začalo?

54.7 Jedním tažením se průměr drátu zmenší o 7,5 %. Kolik tažení je minimálně potřeba provést, aby se průměr drátu zmenšil z 5 mm na méně než polovinu?

54.8 V Kocourkově se každý rok zvýší příjmy městské poklady o 60 % vzhledem k příjmům z minulého roku. Každé čtyři roky ale hodnota místních peněz klesne na pětinu. Jak se změní hodnota příjmů za 12 let?

54.9 Množství dřeva v určité lesní oblasti se odhaduje na $2\cdot 10^6\ \text{m}^3$ a roční přírůstek dřeva je 2,1 %. Jaký bude stav po 10 letech, těží-li se ročně $2{,}5\cdot 10^4\ \text{m}^3$ dřeva? Působení kůrovce a) neuvažujte, b) charakterizujte ročním úbytkem dřeva 0,05 %.

55. Posloupnosti – limita

55.1 Dokažte, že posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\dfrac{2n+3}{4n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní.

Zjistěte, zda jsou dané posloupnosti konvergentní. Pokud je to možné, určete jejich limitu:

55.2 $\left(\dfrac{11-2n}{5n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$;

55.3 $\left(\left(-1\right)^{n-2}\dfrac{n+1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$;

55.4 $\left(\dfrac{\left(n-3\right)\left(2n+1\right)}{4n^2-10}\right)_{n=1}^{\infty}$;

55.5 $\left(\dfrac{2n\left(3-n\right)\left(n+4\right)}{\left(2n+1\right)^2-1}\right)_{n=1}^{\infty}$;

55.6 $\left(n^2+1\right)_{n=1}^{\infty}$;

55.7 $\left(\left(\dfrac{100}{99}\right)^n-2\right)_{n=1}^{\infty}$;

55.8 $\left(\left(\dfrac{1000}{1001}\right)^n+1\right)_{n=1}^{\infty}$;

55.9 $\left(\sin\left(\pi\dfrac{n-1}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$;

55.10 $\left(\dfrac{5-\left(-1\right)^{n+1}n}{2n-3}\right)_{n=1}^{\infty}$.

56. Nekonečná geometrická řada

56.1 Určete součet nekonečné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^{-2n}$.

Určete, zda daná řada konverguje. Pokud ano, určete její součet.

56.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{2n}$; **56.3** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2^{n-1}}$; **56.4** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^{n+2}$; **56.5** $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin k)^{1-n}$.

V množině reálných čísel řešte dané rovnice:

56.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^x\right)^n = 1$; **56.7** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^n = \frac{3x-1}{2x+1}$; **56.8** $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^{2n-1} = \operatorname{tg} x$.

56.9 Do kruhu o poloměru r je vepsán čtverec, do něho je vepsán opět kruh, do něho je vepsán čtverec, … Určete součet obvodů a obsahů všech takto sestrojených kruhů a čtverců.

56.10 Do rovnostranného trojúhelníku o straně délky a jsou postupně vepisovány největší možné čtverce tak, že dvě strany čtverce jsou vždy rovnoběžné s jednou stranou trojúhelníka (viz obr. 45). Určete: obvod vyšrafovaného útvaru, součet obsahů všech čtverců a jakou část tvoří vepsané čtverce v trojúhelníku.

57. Kombinatorika – základní principy

57.1 Jarda si večer nepřipravil ponožky na druhý den. Ráno vstává po tmě, protože nechce budit mladší sestru. V šuplíku má volně naházeny ponožky černé a šedé barvy, které jsou jinak stejné. Kolik ponožek musí vzít, aby měl jistotu, že bude mít pár stejné barvy?

57.2 Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápise se a) každá jeho cifra vyskytuje právě jednou, b) každá jeho cifra vyskytuje nejvýše jednou, c) každá jeho cifra vyskytuje právě dvakrát, d) každá jeho cifra vyskytuje alespoň dvakrát, e) nevyskytuje cifra 0, f) nevyskytují cifry 0 a 5.

57.3 Určete počet všech přirozených trojciferných čísel, jejichž dekadický zápis je sestaven z číslic 0, 1, 2, 3, 4 a 5. Kolik z těchto čísel a) je dělitelných dvěma, b) není dělitelných pěti, c) je dělitelný třemi? Číslice se v daném čísle neopakují.

57.4 Řešte předchozí úlohu pro případ, že se číslice v čísle opakují.

57.5 Na vrchol hory vedou čtyři turistické cesty a lanovka. Určete počet způsobů, kterými je možné se dostat na vrchol hory a zpět: a) libovolnými způsoby, b) tak, aby zpáteční cesta byla jiná než cesta na vrchol, c) tak, aby alespoň jednou byla použita lanovka, d) tak, aby lanovka byla použita právě jednou, e) tak, aby na cestu zpátky byla použita lanovka.

57.6 Je dán pětiúhelník JARYN, na jehož každé straně je n vnitřních bodů. Kolik různých trojúhelníků lze v pětiúhelníku najít, jestliže vrcholy trojúhelníků leží v daných bodech (ale ne ve vrcholech pětiúhelníku)?

57.7 V kódovém označení firemních výrobků se vyskytuje na prvním místě jedno z písmen A až E a na dalších dvou místech je jedno z čísel 15 až 60. Kolik různých kódů firma používá?

58. Kombinatorika – variace

58.1 Deset závodníků jede finálový závod, který přenáší televize. Grafik si chce připravit titulky všech možností umístění závodníků na prvních třech místech. Kolik by musel vytvořit návrhů titulků?

58.2 Kolika způsoby lze ve třídě, v níž je 25 žáků, vybrat kandidáty na předsedu, místopředsedu, pokladníka a strážce třídní knihy?

58.3 Kolika způsoby si může 81 členů Senátu České republiky rozdělit mezi sebou funkce předsedy Senátu a předsedů devíti výborů senátu?

58.4 K sestavení vlajky, která má být složená ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté. Kolik vlajek lze z těchto látek na základě uvedených pravidel sestavit? Kolik z nich má modrý pruh? Kolik z nich má modrý pruh uprostřed? Kolik jich nemá uprostřed červený pruh (ale červený pruh na vlajce je)?

58.5 Určete počet všech nejvýše čtyřciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou. Kolik z nich je větších než 6000?

58.6 Ve třídě se vyučují následující předměty: Č, A, ON, D, Z, BI, M, F, CH, DG, IT, TV. Kolika způsoby lze sestavit rozvrh pro tuto třídu na jeden den, má-li den šest vyučovacích hodin a každý předmět má nejvýše jednu hodinu denně? V kolika z nich se vyskytuje matematika? V kolika z nich je matematika první hodinu? V kolika z nich není fyzika?

58.7 O telefonním čísle si Jarda zapamatoval pouze toto: je devítimístné, začíná sedmičkou, neobsahuje žádné dvě číslice stejné a je dělitelné dvaceti pěti. Kolik telefonních čísel připadá v úvahu? Jak dlouho bude muset Jarda v nejhorším případě zkoušet, které je to pravé, trvá-li vytočení jednoho čísla a následné spojení čtvrt minuty?

58.8 Z kolika prvků je možné vytvořit 42 dvoučlenných variací?

58.9 Z kolika prvků je možné vytvořit čtyřikrát více tříčlenných variací než dvoučlenných variací?

58.10 Jestliže se zvýší počet prvků o dva, zvýší se počet z nich vytvořených tříčlenných variací o 600. Kolik bylo původně prvků?

59. Kombinatorika – permutace, faktoriály

59.1 Vypočtěte: a) $5!$, b) $6!-4!$, c) $2\cdot 3!+5!$, d) $3\cdot 0!-4!+2\cdot 5!$.

59.2 Určete, které ze dvojice čísel je větší a kolikrát než číslo druhé: a) $a=3\cdot 4!$, $b=5!$; b) $m=11!\cdot 4!$, $n=12!\cdot 3!$; c) $u=100!\cdot 5!$, $v=4\cdot 101!\cdot 3!$; d) $\alpha=4\cdot 2000!\cdot 5!$, $\beta=1999!\cdot 4!$.

59.3 Určete číslo q, jestliže $200!=q\cdot 198!$.

59.4 Určete číslo u, jestliže $u!\cdot 3^6=3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdot 15\cdot 18$.

59.5 Řešte rovnici $k!\cdot 4^5=2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16\cdot 18\cdot 20$.

59.6 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: a) $\dfrac{(n+1)!-n!}{n!}$, b) $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{2}{(n+1)!}$, c) $\dfrac{n^2-16}{(n+4)!}+\dfrac{7}{(n+3)!}-\dfrac{2}{(n+2)!}$.

59.7 Kolika způsoby se může postavit 30 žáků sportovního kurzu do zástupu na ranní rozcvičku? V kolika těchto zástupech je předseda třída na okraji řady? V kolika zástupech jsou nejlepší kamarádi Petr a Pavel vedle sebe?

59.8 Tři dívky a čtyři chlapci stojí ve frontě před pokladnou kina. Kolika způsoby se mohou seřadit a) bez omezení, b) tak, aby dvě dívky stály na okrajích fronty (třetí dívka může být kdekoliv), c) tak, aby chlapci stáli vedle sebe, d) tak, aby se ve frontě střídali dívky s chlapci?

59.9 Kolika způsoby lze seřadit písmena slova PRŮMYSLOVKA? V kolika z těchto pořadí tvoří bezprostředně za sebou jdoucí písmena a) slovo MYSL, b) slovo VAK, c) slova SLOVA a RYK v libovolném pořadí, d) slovo PRAK stojící na jednom z okrajů řady písmen?

59.10 Kolika způsoby se může 8 hostů rodinné večeře posadit kolem kruhového stolu tak, že záleží jen na vzájemném rozmístění hostů, nikoliv na umístění hostů vůči okolním předmětům? V kolika takových případech nesedí vnuk vedle své babičky?

60. Kombinatorika – kombinační čísla a jeho vlastnosti, kombinační rovnice

60.1 Vypočtěte: a) $\binom{5}{2}$, b) $\binom{10}{3}$, c) $\binom{20}{0}$, d) $\binom{11}{9}$.

60.2 Vyjádřete jediným kombinačním číslem: a) $\binom{6}{2}+\binom{6}{3}$, b) $\binom{9}{5}-\binom{8}{5}$, c) $\binom{10}{2}+\binom{10}{7}$, d) $\binom{11}{2}+\binom{11}{3}+\binom{12}{4}+\binom{13}{5}$.

60.3 V množině přirozených čísel řešte rovnici $\binom{x}{1}+\binom{x}{2}=6$.

60.4 V množině přirozených čísel řešte rovnici $\binom{q+1}{2}-\binom{q}{1}=10$.

60.5 V množině přirozených čísel řešte rovnici $36-\binom{m+1}{m-1}=\binom{m}{m-2}$.

60.6 V množině přirozených čísel řešte rovnici $\binom{z+1}{z-1}+3\binom{z}{z-2}=5\binom{z-1}{z-3}+13$.

60.7 V množině přirozených čísel řešte rovnici $\binom{w+6}{w+4}+2\binom{w+5}{w+3}=\binom{4}{2}+\binom{w+8}{w+7}$.

61. Kombinatorika – kombinace

61.1 Kolika způsoby lze vylosovat při zkoušení tři otázky z dvaceti připravených otázek?

61.2 Kolika způsoby je možné vyplnit tiket sportky?

61.3 Na večírku, na kterém je 10 lidí, si chce připít každý s každým. Kolik celkem se ozve cinknutí dvou sklenek o sebe, jestliže žádná dvě cinknutí nesplynou?

61.4 Při zkoušce si student losuje čtyři otázky. Ze sady deseti otázek si losuje jednu, z další sady dvaceti otázek si losuje dvě a z poslední sady pěti otázek si losuje jednu. Kolika způsoby si může student vylosovat otázky ke zkoušce?

61.5 Kolika způsoby lze vybrat ze třídy, v níž je 20 chlapců a 10 dívek, pětičlenné družstvo na reprezentaci v soutěži a) bez omezení, b) tak, aby v družstvu byli právě dva chlapci, c) tak, aby v družstvu byly alespoň tři dívky?

61.6 Kolika způsoby může vytvořit 15 chlapců a 10 dívek smíšené páry k tanci?

61.7 Kolika způsoby lze na hlavní nebo na vedlejší diagonálu čtvercové šachovnice, která má celkem 36 polí, umístit čtyři stejné figurky? Všechny figurky musejí být na stejné diagonále.

61.8 Z kolika prvků lze vytvořit 28 kombinací druhé třídy?

61.9 Určete počet prvků tak, aby počet čtyřčlenných kombinací z nich sestavených a počet tříčlenných variací z nich sestavených byly v poměru 7:4.

61.10 Zvětšíme-li počet prvků o dva, zvětší se počet dvoučlenných kombinací sestavených z daného počtu prvků o 11. Kolik bylo prvků původně?

61.11 Zvětšíme-li počet prvků o jeden, bude dvoučlenných variací sestavených z těchto prvků o 35 více, než je počet dvoučlenných kombinací z původního počtu prvků. Kolik bylo prvků původně?

62. Kombinatorika – binomická věta

62.1 Užitím binomické věty vypočítejte: a) $(2x+1)^4$, b) $\left(\frac{a}{2}-2\right)^5$, c) $(1+\mathrm{i})^6$ (kde $\mathrm{i}^2=-1$), d) $1{,}03^3$, e) $0{,}99^4$.

62.2 Vypočítejte pátý člen rozvoje výrazu $\left(3+\frac{m}{2}\right)^7$.

62.3 Vypočtěte čtvrtý člen rozvoje výrazu $\left(v-\frac{2}{3}\right)^5$.

62.4 Určete, kolikátý člen rozvoje výrazu $\left(c^2+\frac{1}{c}\right)^6$ je absolutní. Určete tento člen.

62.5 Určete, kolikátý člen rozvoje výrazu $\left(q+\frac{2}{q^2}\right)^6$ je lineární. Určete tento člen.

62.6 Určete, kolikátý člen rozvoje výrazu $\left(\frac{2}{w}-w^2\right)^7$ je kvadratický. Určete tento člen.

62.7 Odvoďte vztah pro a) $\sin 3x$, b) $\cos 5x$.

63. Pravděpodobnost

63.1 S jakou pravděpodobností vylosujeme z osudí s čísly 1 až 100 čísly číslo a) patnáct, b) které udává měsíc narození losujícího, c) větší než 50, d) menší než 10.

63.2 Z čísel 1 až 50 losujeme tři čísla, která po vylosování pokládáme na stůl těsně vedle sebe. S jakou pravděpodobností na stole vyskládané číslo a) je dělitelné pěti, b) je dělitelné deseti, c) začíná trojkou, d) končí šestkou?

63.3 Bíle natřenou dřevěnou krychli o hraně délky 10 cm rozřežeme na krychličky o hraně délky 1 cm. Jaká je pravděpodobnost, že z nařezaných krychliček náhodně vytáhneme jednu, která má a) jednu stěnu bílou, b) dvě stěny bílé, c) tři stěny bílé, d) všechny stěny nenatřené?

63.4 S jakou pravděpodobností budou z desetičlenné skupiny, v níž je sedm mužů, vybráni do tříčlenné skupiny samí muži?

63.5 Firma dodává obchodu každý týden 100 tabletů. Majitel obchodu vybere náhodně 20 tabletů a zkontroluje je. Není-li mezi těmito zkontrolovanými žádný vadný kus, majitel zboží přijme. Jaká je pravděpodobnost, že majitel zboží přijme, je-li mezi dodávanými tablety a) 10 vadných kusů, b) 30 vadných kusů?

63.6 Ze třídy, v níž je 25 žáků, se mají vybrat dva žáci do plesového výboru. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými a) bude Jarda, b) bude Jarda nebo Petr, c) budou Jarda i Petr, d) nebude ani jeden z této dvojice? Ve třídě je pouze jediný chlapec jménem Jarda a jediný chlapec jménem Petr.

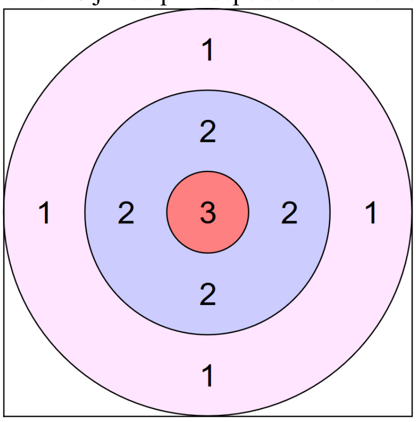
63.7 Ve třídě je 30 žáků, z nichž je 20 připraveno na závěrečné zkoušení. Vyučující bude zkoušet čtyři žáky. Jaká je pravděpodobnost, že a) všichni budou na zkoušení připraveni, b) bude připraven právě jeden, c) nebude připraven právě jeden, d) budou připraveni alespoň dva.

63.8 V jistém městě jezdí taxíky pouze od společností *DoMinuty* a *JakoBlesk*. Obě společnosti mají taxíky značky Peugeot a Felicia. Jarda zjistil, že kolem jeho domu jezdí taxíky Peugeot společnosti *JakoBlesk* s pravděpodobností 0,1 a taxíky Felicia téže společnosti s pravděpodobností 0,3. Taxíky značky Felicia projíždějí kolem domu s pravděpodobností 0,4. Jaká je pravděpodobnost, že kolem domu pojede taxík značky Peugeot? Jaká je pravděpodobnost, že kolem domu pojede taxík značky Felicia společnosti *DoMinuty*? Jaká je pravděpodobnost, že pojede kolem domu taxík společnosti *DoMinuty*? Jaká je pravděpodobnost, že kolem domu pojede taxík značky Peugeot společnosti *DoMinuty*? Jaká je pravděpodobnost, že kolem domu nepojede taxík společnosti *JakoBlesk* značky Felicia?

63.9 V krabici je 5 černých kostek a 3 bílé kostky; všechny kostky mají stejný tvar. Aniž kostky do krabice vracíme, postupně vytahujeme jednu kostku za druhou. Jaká je pravděpodobnost, že a) první vytažená kostka je bílá, b) první dvě vytažené kostky jsou černé, c) mezi prvními dvěma vytaženými kostkami jsou kostky obou barev?

63.10 Při výrobě dotykového displeje se objevují v technologickém procesu tři navzájem nezávislé vady. První nastává v šedesáti procentech případů, druhá s pravděpodobností 0,05 a třetí s pravděpodobností 0,01. Jaká je pravděpodobnost, že vyrobený výrobek je bez vady? Jaká je pravděpodobnost, že pět po sobě vyrobených výrobků je bez vady? Jaká je pravděpodobnost, že pět po sobě vyrobených výrobků má všechny vady?

63.11 Terč zakreslený na čtvercovém papíru je tvořen třemi soustřednými kružnicemi s poloměry 2 j, 4 j a 6 j (viz obr. 46), mezi nimiž jsou různě bodované oblasti. S jakou pravděpodobností zasáhne střelec a) tříbodovou, b) dvoubodovou a c) jednobodovou oblast? S jakou pravděpodobností nezasáhne žádnou bodovanou oblast?



obr. 46

64. Statistika

64.1 Známky z angličtiny na pololetním vysvědčení v polovině A1 jisté třídy byly tyto (dle abecedního pořadí žáků): 1, 2, 3, 1, 2, 1, 1, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 3. Určete: a) průměr známek, b) medián známek, c) modus známek.

64.2 Celková cena deseti mobilních telefonů ve výloze obchodu je 144000,- Kč. O kolik korun a jak se změní průměrná cena vystavených telefonů a) po přidání, b) po odebrání pěti telefonů v celkové ceně 75000,– Kč ?

64.3 Firma provozující vyhlídkové autobusy v hlavním městě nabízí v každém z pěti dvoupatrových vozů celkem 30 míst v ceně 120,- Kč a 20 míst v ceně 170,- Kč. V sobotu vyjelo všech pět plně obsazených vozů. V neděli byly plně obsazeny dva vozy a v ostatních nebyla obsazena čtvrtina dražších míst. Jaká je průměrná víkendová tržba připadající na jeden vůz?

64.4 Výsledky prvních dvou čtvrtletních prací z matematiky ve třídě s 25 žáky jsou zobrazeny v tab. 1. Obě písemné práce přitom měly stejný průměr. Určete průměr, modus a medián známek z první písemné práce. Určete počet trojek a čtyřek, které dostali žáci ze druhé písemné práce.

64.5 Návštěvníci autosalonu hodnotili na základě zkušební jízdy čtyři vozy typu A, B, C a D. Někteří z návštěvníků se nedokázali rozhodnout, který vůz je nejlepší. Výsledky testů jsou uvedeny v tab. 2. Kolik návštěvníků preferovalo typ vozu, který v této anketě zvítězil? S jakou relativní četností se umístil vůz na posledním místě? Kolik procent respondentů se nedokázalo rozhodnout?

	Známky				
	1	2	3	4	5
	Četnost známek				
1. práce	8	6	6	3	2
2. práce	9	3			1

tab. 1

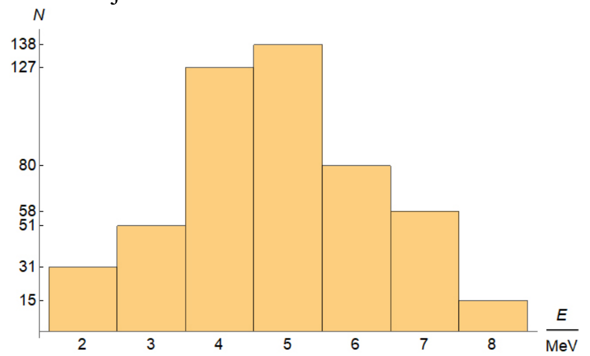
	A	B	C	D	nerozhodnutí	Celkem
Četnost	40				20	400
Relativní četnost		25 %	15 %			

tab. 2

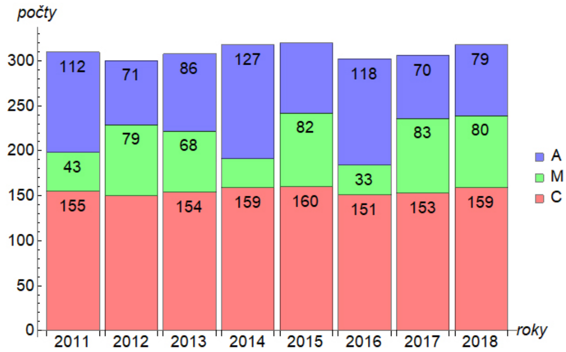
64.6 Jarda si z dlouhé chvíle házel hrací kostkou od společenské hry *Člověče, nezlob se*. Postupně mu padala tato čísla 1, 2, 3, 5, 3, 2, 1, 4, 5, 1, 6, 4, 5, 1, 2, 4, 6, 1, 2, 4, 6, 2, 3, 1, 5. Nakreslete histogram rozdělení hodů a určete modus a medián uvedeného souboru.

64.7 Na sportovním kurzu se účastníci rozdělili do skupin podle toho, jakým sportem se chtěli zabývat. Šestina účastníků si vybrala plavání, třetina chtěla hrát fotbal, 20 % účastníků šla hrát tenis, devítina šla hrát basketbal, 10 % účastníků šla hrát golf a osm účastníků hrálo volejbal. Kolik účastníků bylo na soustředění? Nakreslete koláčový graf rozdělení účastníků na jednotlivé sporty.

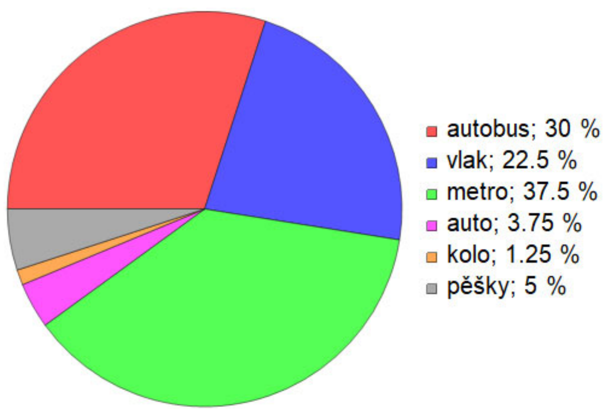
64.8 V grafu na obr. 47 je zobrazeno rozložení určitého vzorku α částic. Kolik částic obsahoval tento vzorek? Jaká je průměrná energie jedné částice ze vzorku? Jaká je nejčastější energie, kterou částice z tohoto vzorku mají?



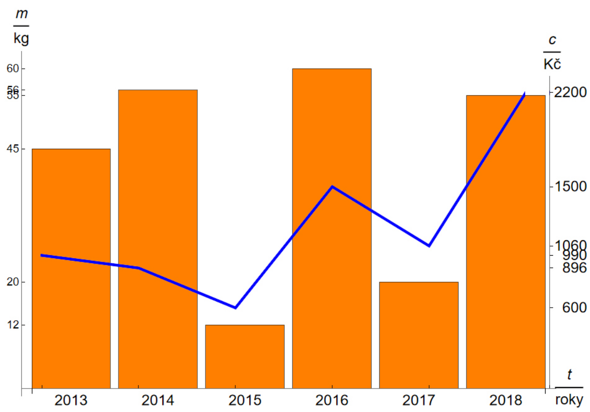
obr. 47



obr. 48



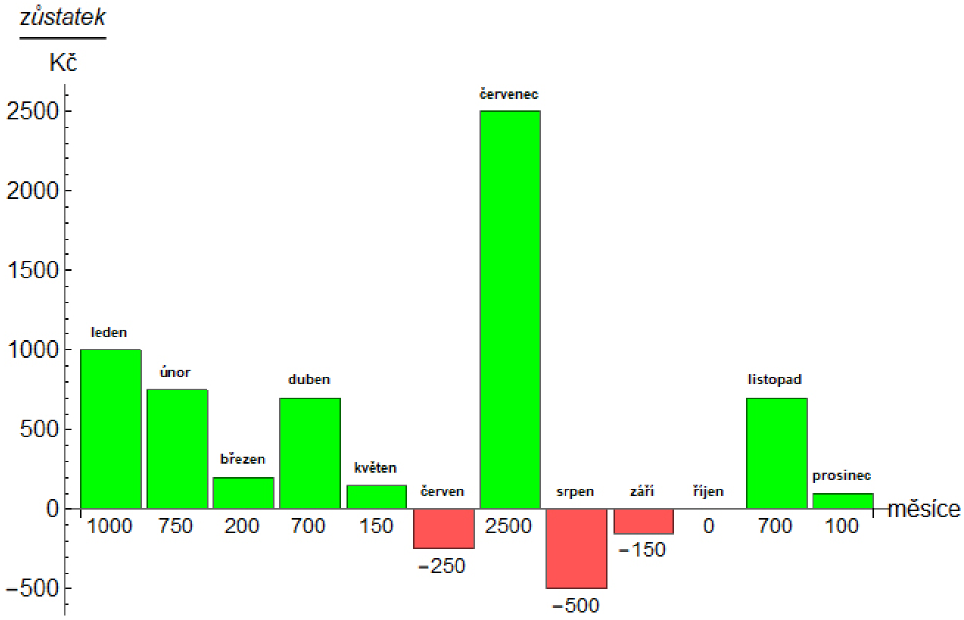
obr. 49



obr. 50

64.9 V grafu na obr. 48 jsou zobrazeny počty žáků, kteří maturovali v rámci profilové maturitní zkoušky na jisté střední škole. Každý žák maturoval v rámci této zkoušky právě ze dvou předmětů – český jazyk a jeden předmět z dvojice matematika - angličtina. Vypočtěte zbývající počty, které nejsou v grafu uvedeny. Ve kterém roce maturovalo z matematiky procentuálně nejvíce žáků? Ve kterém roce maturovalo z anglického jazyka procentuálně nejvíce žáků?

64.10 Mezi žáky prvních a druhých ročníků jisté pražské školy probíhal výzkum, jaký dopravní prostředek volí při cestě do školy. Výsledky jsou zobrazeny v grafu na obr. 49. Organizátory ankety překvapilo, že 9 žáků jezdí do školy autem s rodiči. Kolik žáků se zúčastnilo výzkumu? Kolik žáků nechodí do školy pěšky? Kolik žáků jezdí do školy metrem?



obr. 51

64.11 Na obr. 50 je graficky znázorněna produkce jednoho sadařství a jeho tržby za prodaná jablka. Ve kterém roce byla cena jednoho kilogramu prodaných jablek nejvyšší? Ve kterém roce byla tato cena nejnižší? Jestliže jako základ budeme uvažovat produkci jablek v roce 2013, kdy sadařství své podnikání začínalo, kolik procent úrody bylo sklizeno v letech 2015 a 2016?

64.12 Graf zobrazený na obr. 51 zobrazuje stav Jardových úspor na konci každého měsíce roku 2017. Ve kterém měsíci měl nejvíce úspor? Ve kterém měsíci měl Jarda nejvyšší dluh? Popište situaci, která nastala na konci října. Jaký je průměrný stav Jardových financí během roku 2017? Kolik procent činí prosincový stav úspor ve srovnání s červencovým stavem? Kolik korun minimálně získal Jarda během července? Vysvětlete, proč je v minulé větě uvedeno slovo *minimálně*.

Zdroje a inspirace příkladů:

[1] život a fantazie Jaroslava Reichla
[2] Bušek I, Řešené maturitní úlohy z matematiky, SPN Praha, 1985
[3] http://novamaturita.cz/, [citováno 25. 8. 2018]

Sbírka neprošla jazykovou úpravou. Za případné chyby se omlouvám a prosím na jejich upozornění.