1. MIMOBĚŽNÉ PŘÍMKY

Mimoběžné přímky jsou pro řadu lidí relativně obtížně představitelné a některé jejich vlastnosti jsou pro řadu z nich dokonce i neznámé. Proto se na jejich vlastnosti podíváme detailněji.

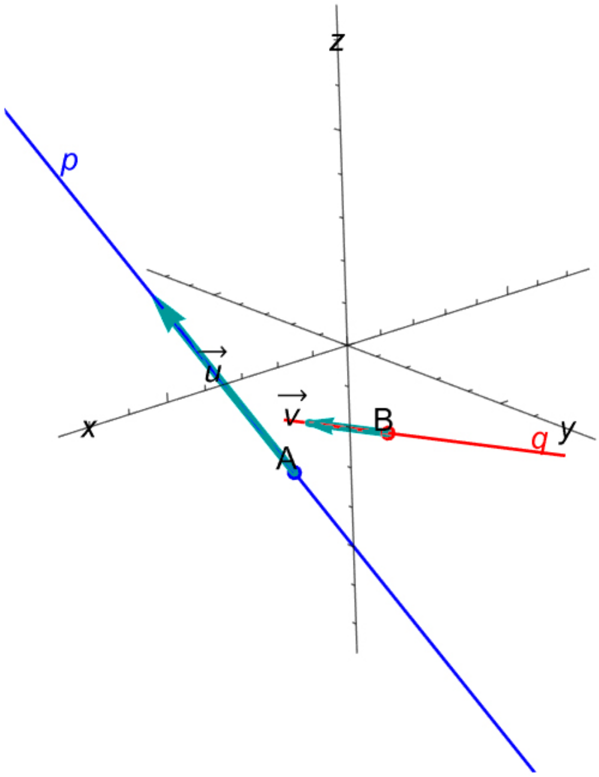
1.1 Definice

DVĚ PŘÍMKY JSOU MIMOBĚŽNÉ, POKUD NELEŽÍ V JEDNÉ ROVINĚ.

Mimoběžkami tedy není možné proložit takovou rovinu, aby v ní ležely obě současně.

Uvažujme mimoběžné přímky *p* a *q* (viz obr. 1) dané takto:

1. přímka *p* je dána bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$;
2. přímka q je dána bodem B a směrovým vektorem $\vec{v}$.



obr. 1

Body A a B jsou navzájem různé, směrové vektory jsou různoběžné. Jsou-li přímky *p* a *q* mimoběžné, pak nemají žádný společný bod.

1.2 Odchylka mimoběžných přímek

Uvažujme dvě mimoběžné přímky *p* a *q*, které jsou dány takto:

1. přímka *p* je dána bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$;
2. přímka q je dána bodem B a směrovým vektorem $\vec{v}$.

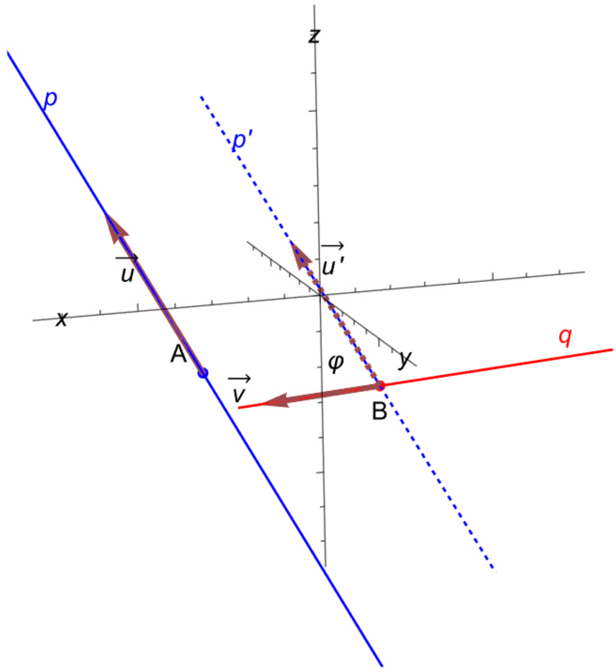
Odchylka dvou mimoběžných přímek se definuje pomocí různoběžných přímek.

ODCHYLKA DVOU MIMOBĚŽNÝCH PŘÍMEK SE DEFINUJE JAKO ODCHYLKA DVOU RŮZNOBĚŽNÝCH PŘÍMEK VEDENÝCH LIBOVOLNÝM BODEM PROSTORU ROVNOBĚŽNĚ SE ZADANÝMI MIMOBĚŽNÝMI PŘÍMKAMI.

Stačí tedy např. přímku *p* posunout rovnoběžně do bodu B ležícího na přímce *q* do polohy p'. Odchylka mimoběžných přímek *p* a *q* pak bude definovaná pomocí odchylek dvou různoběžných přímek p' a *q* (viz obr. 2).

Odchylka φ dvou mimoběžných přímek *p* a *q* pak je tedy definována vztahem, který definuje odchylku dvou různoběžných přímek p' a *q*:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{u}' \cdot \vec{v}\right|}{\left|\vec{u}'\right|\left|\vec{v}\right|} = \frac{\left|\vec{u} \cdot \vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}. \qquad (1)$$



obr. 2

1.3 Příčka mimoběžek

Zvláštním typem přímek jsou tzv. příčky mimoběžek.

PŘÍČKA MIMOBĚŽEK JE PŘÍMKA, KTERÁ PROTÍNÁ KAŽDOU ZE ZADANÝCH MIMOBĚŽEK V JEDNOM BODĚ.

Příčka mimoběžek může být přitom definována různě:

1. k daným mimoběžkám vést příčku, která prochází zadaným bodem neležícím na žádné ze zadaných mimoběžek (viz kapitola 1.3.1);
2. k daným mimoběžkám vést příčku rovnoběžnou se zadanou přímkou (resp. zadaným vektorem) – viz kapitola 1.3.2;
3. k daným mimoběžkám vést příčku, na níž body, v nichž příčka protíná zadané mimoběžky, vytínají úsečku nejkratší možné délky (viz kapitola 1.3.3).

1.3.1 Příčka mimoběžek vedená zadaným bodem

Postup, jak najít příčku mimoběžek, která má procházet zadaným bodem neležícím na žádné z nich, popíšeme teoreticky a poté ukážeme na konkrétní úloze.

Předpokládejme, že jsou dány dvě mimoběžné přímky p a q: přímka p je dána bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$ a přímka q je dána bodem B a směrovým vektorem $\vec{v}$. A dále je dán bod R neležící na žádné z nich (viz obr. 3).

Najít příčku mimoběžek p a q, která prochází bodem R, lze takto:

1. jednou z přímek (např. přímkou p) a bodem R proložíme rovinu ρ (viz obr. 4);

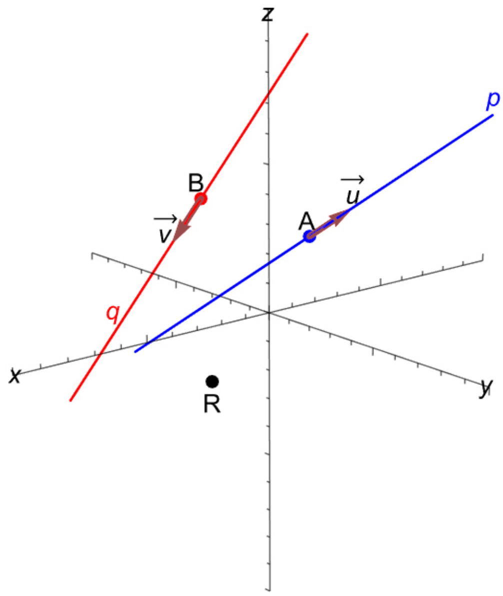
Tato rovina je jednoznačně určena, protože bod R neleží na žádné ze zadaných mimoběžek.

2. najdeme průsečík C druhé z přímek (tedy přímky q) s rovinou ρ (viz obr. 5);
3. sestrojíme příčku r (resp. najdeme její parametrické vyjádření) procházející body C a R – viz obr. 6;
4. najdeme průsečík D příčky r s první přímkou (tj. s přímkou p) – viz (obr. 7).

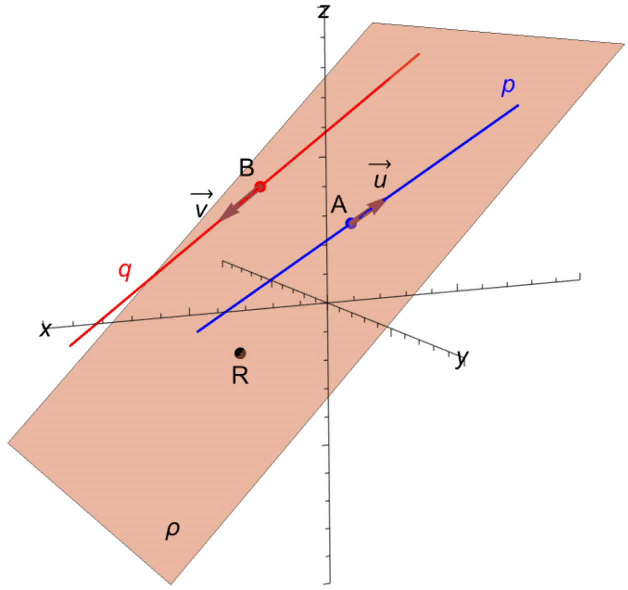
Pochopitelně, že rovinu ρ lze proložit i přímkou q a hledat pak průsečík této roviny a přímky p.

Z uvedeného rozboru hledání příčky mimoběžek procházející zadaným bodem je zjevné, že příčku bude možné nalézt, pokud bude možné jednoznačně sestrojit rovinu ρ. To bude možné při libovolné poloze bodu R, který (ve shodě se zadáním) neleží na žádné ze zadaných mimoběžek. Ale už obecně nemusí existovat průsečík C druhé přímky a roviny ρ. Bod C nebude existovat, pokud rovina ρ bude rovnoběžná se druhou ze dvou mimoběžných přímek. Obě zadané přímky budou sice mimoběžné, ale díky vzájemné poloze bodu R (a tedy i sestrojené roviny ρ) může být druhá přímka rovnoběžná se sestrojovanou rovinou.

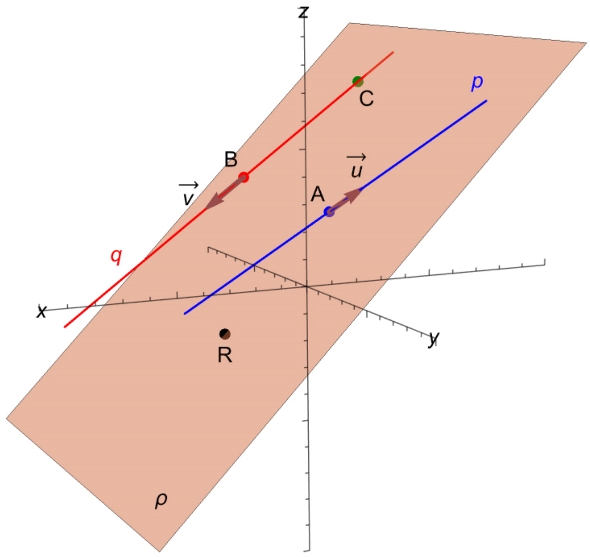
Proto bod R musí ležet mimo rovinu, která prochází jednou ze zadaných přímek a je rovnoběžná s druhou přímkou. Nebude-li bod R ležet v těchto dvou rovinách, pak bude existovat příčka zadaných mimoběžných přímek procházející bodem R.



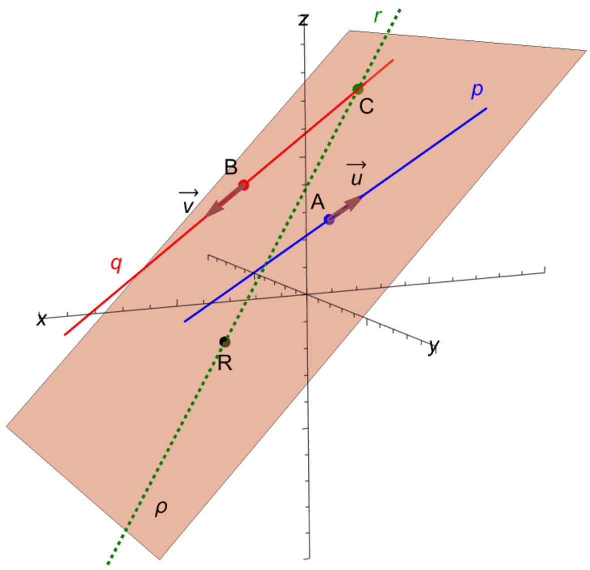
obr. 3



obr. 4

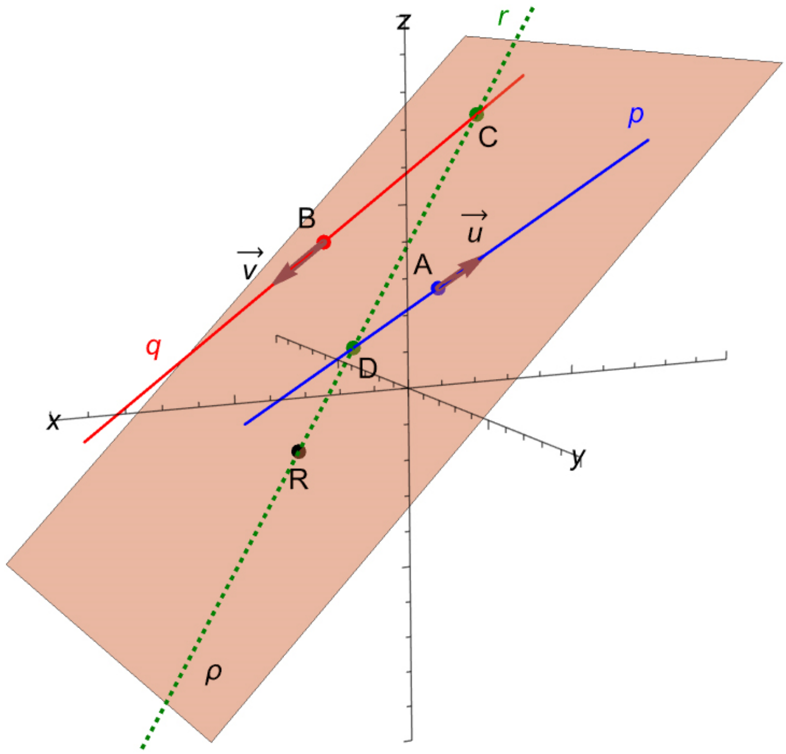


obr. 5



obr. 6

Uvažujme nyní konkrétní zadání. Přímka *p* je dána bodem $A = [0; 2; 3]$ a vektorem $\vec{u} = (-1; 1; 1)$ a přímka *q* je dána bodem $B = [2; -1; 4]$ a vektorem $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Jejich příčka *r* má procházet bodem $R = [4; 2; -1]$.



obr. 7

Parametrické vyjádření přímky p je:

$$p: x = -t; \quad y = 2 + t; \quad z = 3 + t; t \in \mathbb{R} . \tag{2}$$

Dále budeme potřebovat parametrické vyjádření přímky q. To má tvar:

$$q: x = 2 + 2s; \quad y = -1 + s; \quad z = 4 - s; s \in \mathbb{R} . \tag{3}$$

V rámci korektnosti bychom měli ukázat, že zadané přímky p a q jsou skutečně mimoběžné. Jejich směrové vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou sice navzájem různoběžné (není jeden násobkem druhého), ale i tak přímky nemusejí být mimoběžné. Je třeba zjistit, zda mají společné body, tedy pokusit se najít body, které leží na přímce p (a tedy jejich souřadnice splňují rovnice (2)) a současně leží na přímce q (a jejich souřadnice vyhovují rovnicím (3)). Musíme tedy řešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -t &= 2 + 2s \\ 2 + t &= -1 + s \\ 3 + t &= 4 - s \end{aligned} \tag{4}$$

s neznámými t a s.

Jedná se o tři rovnice o dvou neznámých, proto vyřešíme nejdříve první dvě rovnice. Jejich sečtením dostaneme rovnici $2 = 1 + 3s$, z níž vyjádříme $s = \frac{1}{3}$. Z první rovnice pak vyjádříme neznámu t ve tvaru $t = -2 - 2s$ a dosazením vypočtené hodnoty neznámé s získáme hodnotu druhé neznámé $t = -2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$.

Nyní je třeba ověřit, zda vypočtené hodnoty neznámých vyhovují poslední rovnici řešené soustavy. Pro její levou stranu dostáváme $3 + t = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$. Její pravá strana je pak rovna

$4-s=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$. Poslední rovnice tedy nevyhovuje vypočteným neznámým t a s. To tedy znamená, že soustava (4) nemá řešení. Neexistuje tedy ani společný bod přímek p a q. Vzhledem k tomu, že jejich směrové vektory jsou různoběžné, musejí být přímky p a q nutně mimoběžné.

Nyní potřebujeme najít obecnou rovnici roviny ρ, která prochází přímkou p a bodem R. Dva lineárně nezávislé vektory ležící v této rovině jsou směrový vektor přímky p a vektor $\overrightarrow{\mathrm{GR}}$, kde G je libovolný bod přímky p.

Bod G získáme volbou např. $t = 1$ a dosazením do rovnic (2); dostaneme tedy: $\mathrm{G}=[-1;3;4]$. Proto $\overrightarrow{\mathrm{GR}}=\mathrm{R}-\mathrm{G}=(5;-1;-5)$. Normálový vektor $\vec{n}$ roviny ρ pak můžeme psát ve tvaru:

$$\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{\mathrm{GR}}=(-4;0;-4). \tag{5}$$

Obecnou rovnici roviny ρ můžeme tedy psát ve tvaru $x+z+d=0$; využili jsme normálový vektor ve tvaru $\vec{n}=(1;0;1)$, což je plně v souladu s výpočtem (5).

Pro normálový vektor roviny je důležitý směrem, nikoliv jeho velikost.

Dosazením bodu R, který v rovině ρ leží, dostáváme rovnici ve tvaru $4-1+d=0$, odkud získáme $d=-3$. Rovina ρ má tedy obecnou rovnici:

$$\rho: x+z-3=0. \tag{6}$$

Pro nalezení souřadnic průsečíku C roviny ρ a přímky q musíme vyřešit soustavu rovnic (6) a (3). Dosazením rovnic (3) do rovnice (6) dostaneme rovnici $2+2s+4-s-3=0$ pro neznámou s. Pro její hodnotu dostáváme: $s=-3$. Dosazením do rovnic (3) dostaneme souřadnice hledaného průsečíku $\mathrm{C}=[-4;-4;7]$.

Nyní již můžeme psát parametrické vyjádření příčky r. Určíme souřadnice jejího směrového vektoru $\overrightarrow{\mathrm{RC}}=\mathrm{C}-\mathrm{R}=(-8;-6;8)$. Parametrické vyjádření příčky r tedy má tvar:

$$\begin{aligned} r: x&=4-4k; \\ y&=2-3k; \\ z&=-1+4k;\ k\in\mathbb{R} \end{aligned} \tag{7}$$

vydělení souřadnic směrového vektoru přímky r před dosazením do vztahů (7) nenulovým skalárem je zjednodušením dalšího výpočtu (opět – analogicky jako u normálového vektoru roviny – je důležitý směr tohoto vektoru, nikoliv jeho velikost).

Ačkoliv jsme úkol ze zadání – najít příčku r zadaných mimoběžných přímek – splnili, je vhodné najít ještě i souřadnici bodu D, ve kterém příčka r protíná přímku p. Vzhledem k tomu, že bod D má ležet na obou těchto přímkách, musí jeho souřadnice splňovat rovnice (2) a (7). Získáme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -t&=4-4k \\ 2+t&=2-3k \\ 3+t&=-1+4k \end{aligned} \tag{8}$$

Tu budeme řešit podobně, jako jsme řešili soustavu (4), Z prvních dvou rovnic soustavy (8) jejich sečtením získáme rovnici $2=6-7k$, ze které vyjádříme $k=\frac{4}{7}$. Z první rovnice vyjádříme neznámou t ve tvaru $t=4k-4$ a po dosazení hodnoty neznámé k získáme $t=4\cdot\frac{4}{7}-4=-\frac{12}{7}$.

Zbývá ověřit, zda nalezené hodnoty neznámých t a k vyhovují také poslední rovnici soustavy (8). Levá strana této poslední rovnice je rovna $3+t=3-\frac{12}{7}=\frac{9}{7}$ a pravá strana téže rovnice je rovna $-1+4k=-1+4\cdot\frac{4}{7}=\frac{9}{7}$. Soustava rovnic (8) má tedy řešení, a to odpovídá souřadnicím bodu D.

Dosazením např. vypočtené neznámé t do rovnic (2) získáme souřadnice hledaného průsečíku dvou přímek $\mathrm{D}=\left[\frac{12}{7};\frac{2}{7};\frac{9}{7}\right]$.

1.3.2 Příčka mimoběžek rovnoběžná s danou přímkou (resp. s daným vektorem)

Postup, jak najít příčku mimoběžek rovnoběžnou s danou přímkou popíšeme opět nejdříve teoreticky a poté ukážeme na konkrétní úloze.

Předpokládejme, že jsou dány dvě mimoběžné přímky p a q: přímka p je dána bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$ a přímka q je dána bodem B a směrovým vektorem $\vec{v}$. A dále je dána přímka h bodem H a jejím směrovým vektorem $\vec{w}$ (viz obr. 8).

Najít příčku mimoběžek p a q, která je rovnoběžná s přímkou h, lze takto:

1. libovolným bodem např. přímky p vedeme přímku h' rovnoběžnou s přímkou h (viz obr. 9);
2. přímkami p a h' proložíme rovinu ρ (viz obr. 10), v níž leží také hledaná příčka r;

Rovina je jednoznačně určena bodem, ve kterém se přímky p a h' protínají, a směrovými vektory obou přímek.

3. najdeme průsečík C druhé z přímek (tedy přímky q) s rovinou ρ (viz obr. 11);
4. sestrojíme příčku r (resp. najdeme její parametrické vyjádření) – viz obr. 12;

Příčka r je nyní určena nalezeným bodem C a směrovým vektorem přímky h, s níž má být příčka rovnoběžná.

5. najdeme souřadnice bodu D, ve kterém příčka r protíná druhou zadanou přímku (tj. přímku q) – viz obr. 13.

Aby byl výše uvedený postup realizovatelný, je nutné, aby zadaná přímka h byla různoběžná nebo mimoběžná s oběma zadanými přímkami. Jinými slovy vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$ musejí být lineárně nezávislé. Kdyby nezávislé nebyly, tak by nebylo možné buď sestrojit rovinu ρ (přímky p a h' by byly totožné) nebo by nebylo možné najít bod C (sestrojená rovina ρ a přímka q by byly navzájem rovnoběžné).

Uvažujme nyní konkrétní zadání. Přímka p je dána bodem $\mathrm{A}=[0;2;3]$ a vektorem $\vec{u}=(-1;1;1)$ a přímka q je dána bodem $\mathrm{B}=[2;-1;4]$ a vektorem $\vec{v}=(2;1;-1)$. Jejich příčka r má být rovnoběžná s přímkou h danou bodem $\mathrm{H}=[4;2;-1]$ a směrovým vektorem $\vec{w}=(-1;-1;2)$.

Přímky p a q byly zvoleny stejně, jako zadané přímky v řešené úloze v kapitole 1.3.1, proto jejich parametrická vyjádření jsou popsaná rovnicemi (2) a (3). Nemusíme tedy ani ověřovat fakt, že jsou mimoběžné (tento fakt jsme ověřili v kapitole 1.3.1).

Rovina ρ je určena přímkami p a h', tedy bodem A a dvěma navzájem různoběžnými vektory $\vec{u}$ a $\vec{w}$. Proto můžeme určit normálový vektor $\vec{n}$ roviny ρ:

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{w}=(3;1;2). \tag{9}$$

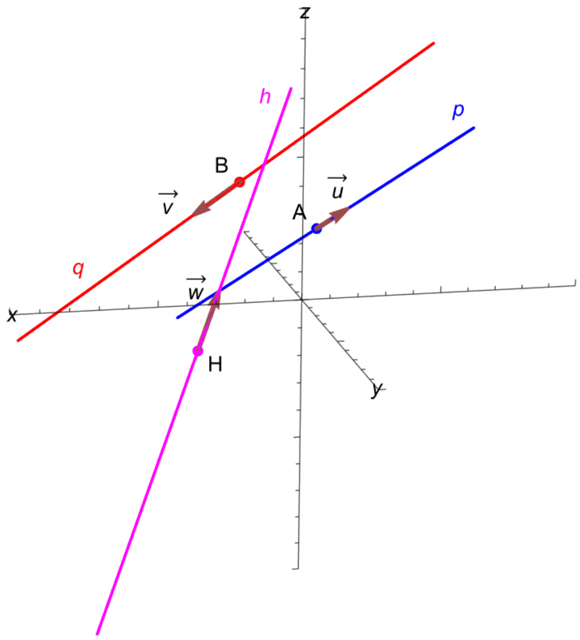
Obecnou rovnici roviny ρ můžeme tedy psát ve tvaru $3x+y+2z+d=0$. V této rovině leží bod A, pro jehož souřadnice musí tedy rovnice roviny platit. Proto můžeme psát rovnici $3\cdot 0+2+2\cdot 3+d=0$, odkud vyjádříme $d=-8$. Obecná rovnice roviny ρ má tedy tvar:

$$\rho: 3x+y+2z-8=0. \tag{10}$$

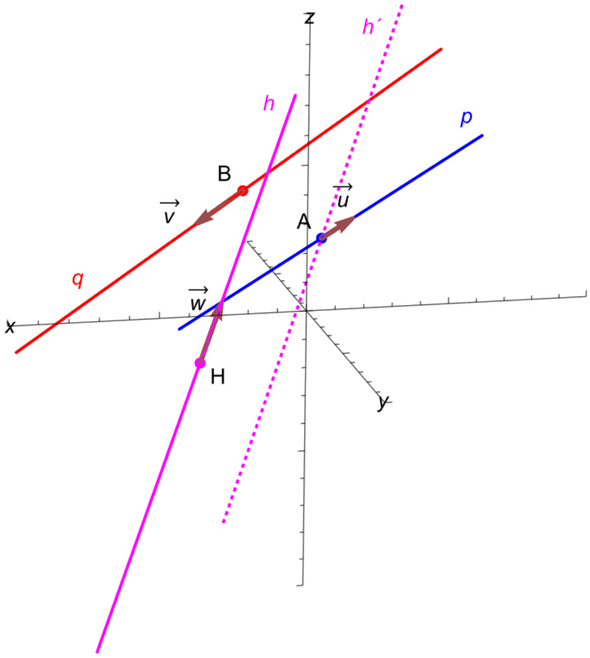
Nyní najdeme průsečík roviny ρ a přímky q tak, že do rovnice (10) dosadíme parametrické vyjádření (3) přímky q. Získáme tak rovnici $3\cdot(2+2s)+(-1+s)+2\cdot(4-s)-8=0$, z níž vyjádříme $s=-1$. Dosazením do parametrického vyjádření (3) přímky q získáme souřadnice hledaného průsečíku: $\mathrm{C}=[0;-2;5]$.

Nyní již můžeme napsat parametrické vyjádření hledané příčky r, která prochází bodem C a jejím směrovým vektorem je vektor $\overrightarrow{w}$:

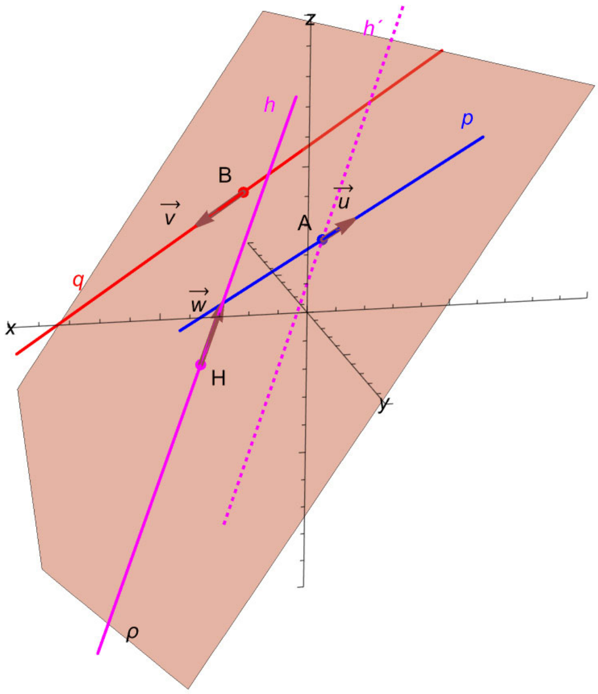
$$r: x = -l; \quad y = -2 - l; \quad z = 5 + 2l; l \in \mathbb{R} \tag{11}$$



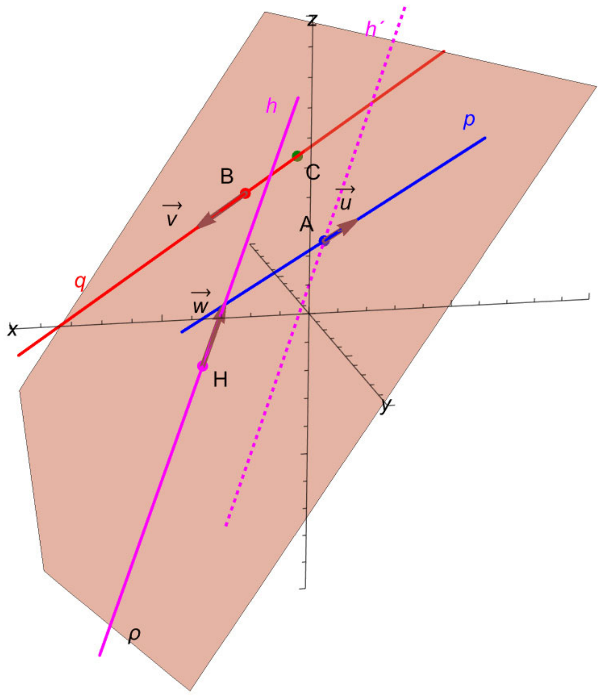
obr. 8



obr. 9



obr. 10



obr. 11

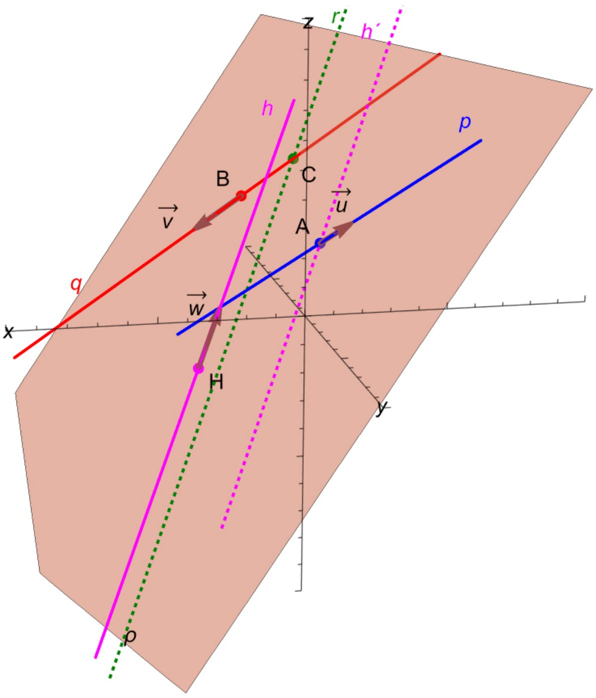
Zbývá určit souřadnice průsečíku přímek r a p. To znamená, že musíme vyřešit soustavu rovnic sestavenou z parametrických vyjádření přímky p (2) a přímky r (11):

$$\begin{aligned} -t &= -l \\ 2+t &= -2-l \\ 3+t &= 5+2l \end{aligned} \qquad (12)$$

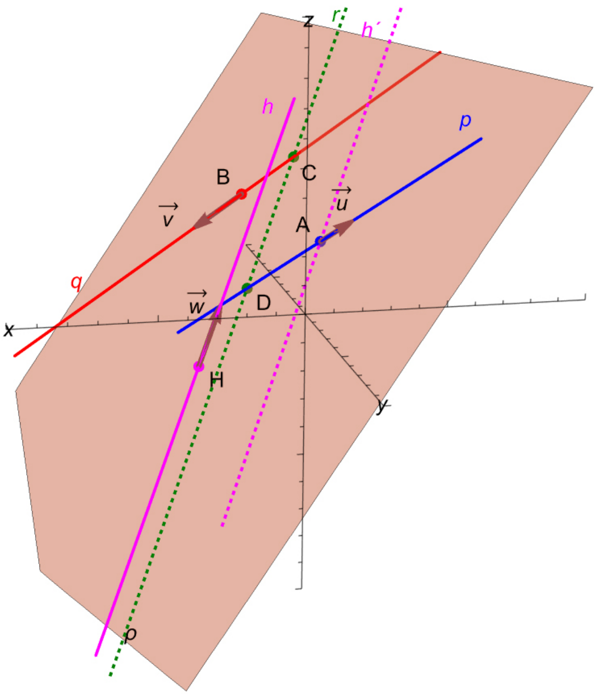
Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme rovnici $2=-2-2l$, z níž vyjádříme $l=-2$. Z první rovnice okamžitě vidíme, že $t=l=-2$. Zbývá ověřit dosazením do třetí rovnice soustavy (12), že nalezené hodnoty neznámých t a l řeší i tuto rovnici. Pro její levou stranu dostaneme $3+t=3-2=1$ a pro pravou pak máme $5+2l=5-4=1$. Levá i pravá strana třetí rovnice jsou stejné, proto má řešená soustava jako celek jedno řešení. Existuje tedy průsečík přímek p a r. Dosazením hodnoty neznámé t do rovnic (2) resp. hodnoty neznámé l do rovnic (11) získáme souřadnice průsečíku přímek p a r: $\mathrm{D}=[2;0;1]$.

Jak je patrné, během celého řešení jsme nevyužili informaci o bodu H, který leží na přímce h. To znamená, že lze stejným způsobem hledat i příčku dvou mimoběžek, která je rovnoběžná se zadaným vektorem.

Tuto úlohu lze též řešit postupem, který je uveden v kapitole 1.3.3.



obr. 12



obr. 13

1.3.3 <u>Osa mimoběžek</u>

Speciální příčkou mimoběžných přímek je **osa mimoběžek**.

OSA DVOU MIMOBĚŽNÝCH PŘÍMEK JE TA PŘÍČKA TĚCHTO MIMOBĚŽNÝCH PŘÍMEK, KTERÁ JE KOLMÁ K OBĚMA UVAŽOVANÝM MIMOBĚŽNÝM PŘÍMKÁM.

Postup, jak najít osu mimoběžek popíšeme opět nejdříve teoreticky a poté ukážeme na konkrétní úloze.

Předpokládejme, že jsou dány dvě mimoběžné přímky p a q: přímka p je dána bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$ a přímka q je dána bodem B a směrovým vektorem $\vec{v}$ (viz obr. 14).

Najít osu o mimoběžek p a q lze analogicky, jako bylo uvedeno v kapitole 1.3.2: hledáme totiž příčku mimoběžných přímek p a q, která má speciální směr – je k oběma mimoběžkám kolmá. Nalézt vektor $\vec{w}$, který je kolmý k oběma zadaným přímkám, lze s využitím vektorového součinu:

$$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}. \qquad (13)$$

Fakt, že vektor $\vec{w}$ je kolmý současně k vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$ plyne přímo z definice vektorového součinu, který byl užit k výpočtu souřadnic vektoru $\vec{w}$.

Dále bychom mohli postupovat v souladu s postupem uvedeným v již zmíněné kapitole 1.3.2. Ukážeme ale jiný způsob, v němž nevyužijeme žádnou pomocnou rovinu.

Pokud označíme, stejně jako v minulých kapitolách, průsečík přímky *p* a hledané osy *o* jako bod D a průsečík přímky *q* s hledanou osou *o* jako bod C, pak musí body C a D ležet na přímce určené směrovým vektorem $\vec{w}$. To ovšem znamená, že vektory $\vec{w}$ a $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \mathrm{D} - \mathrm{C}$ jsou rovnoběžné. To znamená, že platí:

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \alpha\vec{w} \text{ resp. } \mathrm{D} - \mathrm{C} = \alpha\vec{w}, \qquad (14)$$

kde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Bod D leží na přímce *p* dané směrovým vektorem $\vec{u}$, proto musí platit:

$$\mathrm{D} = \mathrm{A} + \beta\vec{u}, \qquad (15)$$

kde $\beta \in \mathbb{R}$.

Analogicky musí platit vztah:

$$\mathrm{C} = \mathrm{B} + \gamma\vec{v}, \qquad (16)$$

protože bod C leží na přímce *q* dané směrovým vektorem $\vec{v}$; přitom $\gamma \in \mathbb{R}$.

Koeficienty β a γ mohou být nulové; body C a D mohou klidně splynout s body B resp. A.

Dosazením rovnic (15) a (16) do podmínky (14) dostaneme rovnici $\mathrm{A} + \beta\vec{u} - (\mathrm{B} + \gamma\vec{v}) = \alpha\vec{w}$, kterou lze přepsat v ekvivalentním tvaru:

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \alpha\vec{w} - \beta\vec{u} + \gamma\vec{v}. \qquad (17)$$

Rovnice (17) představuje vlastně soustavu tří rovnic pro tři neznámé α, β a γ. Po jejich nalezení bude možné pomocí vtahů (15) a (16) získat hledané průsečíky osy *o* se zadanými mimoběžnými přímkami *p* a *q* a napsat parametrické vyjádření této osy.

Uvažujme nyní konkrétní zadání. Přímka *p* je dána bodem $\mathrm{A} = [4; 3; -1]$ a vektorem $\vec{u} = (1; -1; 2)$ a přímka *q* je dána bodem $\mathrm{B} = [-5; -1; -3]$ a vektorem $\vec{v} = (-2; -2; -1)$.

Parametrické vyjádření přímky *p* je:

$$\begin{aligned} p: x &= 4 + m; \\ y &= 3 - m; \\ z &= -1 + 2m; m \in \mathbb{R} \end{aligned} . \qquad (18)$$

Dále budeme potřebovat parametrické vyjádření přímky *q*. To má tvar:

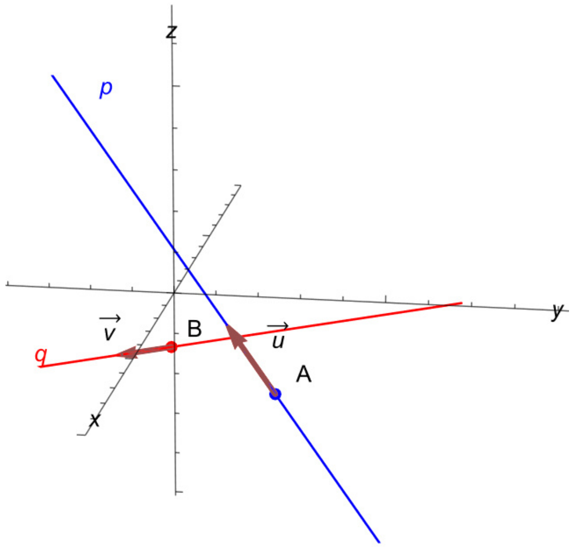
$$\begin{aligned} q: x &= -5 - 2n; \\ y &= -1 - 2n; \\ z &= -3 - n; n \in \mathbb{R} \end{aligned} . \qquad (19)$$

Směrové vektory přímek *p* a *q* jsou různoběžné (jeden z nich není násobkem druhého), ale to ještě neznamená, že tyto přímky jsou mimoběžné. Proto bychom měli ověřit, že nemají žádný společný bod. To ověříme vyřešením soustavy rovnic sestavené z parametrických vyjádření přímek *p* a *q*:

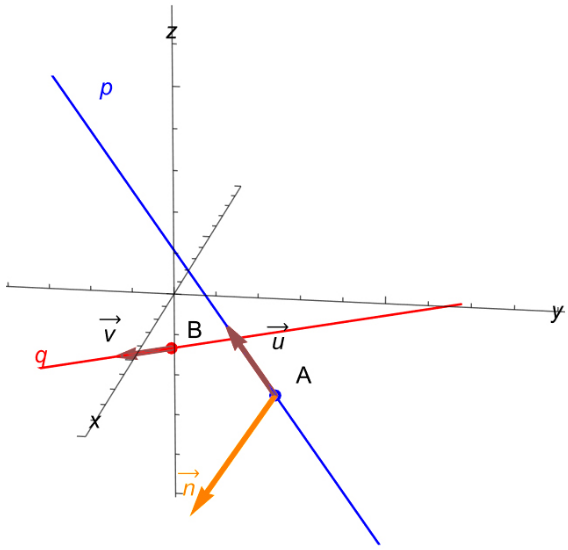
$$\begin{aligned} 4 + m &= -5 - 2n \\ 3 - m &= -1 - 2n \\ -1 + 2m &= -3 - n \end{aligned} . \qquad (20)$$

Sečtením prvních dvou rovnic soustavy (20) získáme rovnici $7 = -6 - 4n$, z níž vyjádříme $n = -\frac{13}{4}$. Z první rovnice soustavy vyjádříme $m = -9 - 2n$ a po dosazení dostaneme $m = -9 - 2 \cdot \left(-\frac{13}{4}\right) = -\frac{5}{2}$. Ověřením dosazením do třetí rovnice dostaneme pro levou stranu této rovnice $-1+2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=-6$ a pro pravou stranu pak máme $-3-\left(-\frac{13}{4}\right)=\frac{1}{4}$. Pro třetí rovnici tedy nalezené hodnoty proměnných *m* a *n* nevyhovují, což znamená, že soustava (20) nemá řešení. A tedy ani neexistují společné body přímek *p* a *q*; tyto přímky jsou tedy skutečně mimoběžné.

Nyní můžeme určit souřadnice vektoru $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$, který je kolmý na obě přímky. Dostaneme vektor $\vec{w}=(5;-3;-4)$. Zakreslení tohoto vektoru do zadání úlohy je zobrazeno na obr. 15.



obr. 14



obr. 15

S využitím výše odvozených úvah nyní dosadíme rovnou do vztahu (17) a dostaneme rovnici ve tvaru: $(9;4;2)=\alpha(5;-3;-4)-\beta(1;-1;2)+\gamma(-2;-2;-1)$. Tu přepíšeme jako soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned}9&=5\alpha-\beta-2\gamma\\4&=-3\alpha+\beta-2\gamma\,.\\2&=-4\alpha-2\beta-\gamma\end{aligned}\tag{21}$$

Vyjádříme-li z první rovnice neznámou β dostaneme $\beta=-9+5\alpha-2\gamma$. Dosazením do dalších dvou rovnic dostaneme soustavu rovnic $\begin{aligned}13&=2\alpha-4\gamma\\-16&=-14\alpha+3\gamma\end{aligned}$. Po vynásobení první rovnice sedmi a sečtení obou rovnic dostaneme rovnici $75=-25\gamma$, odkud vypočteme $\gamma=-3$. Z první rovnice upravené soustavy vyjádříme $\alpha=\frac{13}{2}+2\gamma$ a po dosazení dostaneme $\alpha=\frac{13}{2}+2\cdot(-3)=\frac{1}{2}$. Dosazením obou hodnot do vztahu pro neznámou β dostaneme $\beta=-9+5\cdot\frac{1}{2}-2\cdot(-3)=-\frac{1}{2}$.

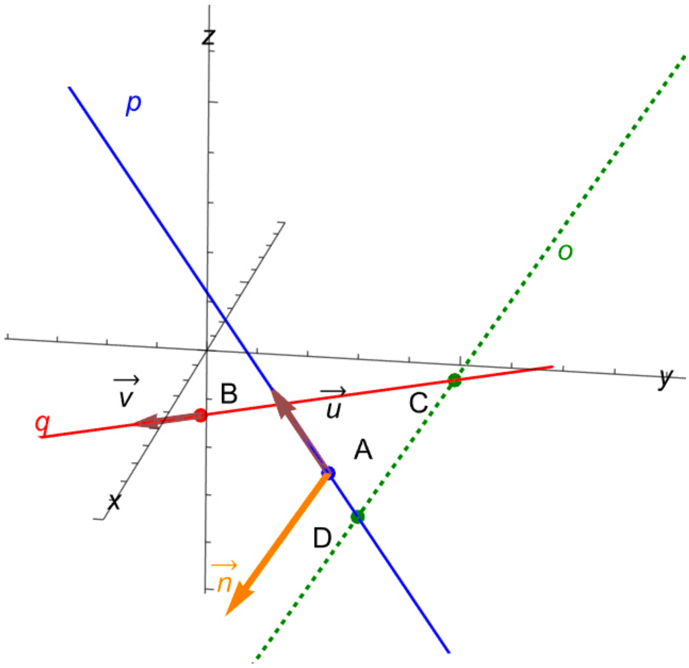
Dosazením do rovnice (15) získáme souřadnice průsečíku D hledané osy *o* a přímky *p*: $\mathrm{D}=\left[\frac{7}{2};\frac{7}{2};-2\right]$.

Dosazením do rovnice (16) získáme souřadnice průsečíku C hledané osy *o* a přímky *q*: $\mathrm{C}=[1;5;0]$. Osa *o* je zobrazena na obr. 16.

Parametrické vyjádření osy *o* zadaných mimoběžných přímek můžeme psát např. ve tvaru:

$$\begin{aligned}o: x&=1+5j;\\y&=5-3j;\quad.\\z&=-4j;\ j\in\mathbb{R}\end{aligned}\tag{22}$$

Osa *o* zadaných mimoběžných přímek je dána např. bodem C a směrovým vektorem $\vec{w}$. Stejně tak by mohlo parametrické vyjádření této osy vycházet ze zadání bodem C a směrovým vektorem $\overrightarrow{CD}$. Nebo bodem D a směrovým vektorem $\vec{w}$ či $\overrightarrow{CD}$.



obr. 16

1.4 *Vzdálenost mimoběžek*

Najít vzdálenost dvou mimoběžných přímek můžeme třemi způsoby:

1. najdeme osu těchto dvou mimoběžných přímek (viz kapitola 1.3.3) a vypočítáme vzdálenost bodů, v nichž osa mimoběžek protíná zadané mimoběžné přímky (v úloze řešené v kapitole 1.3.3 by to byla vzdálenost bodů C a D);
2. jednou z mimoběžek proložíme rovinu, která je rovnoběžná s druhou zadanou mimoběžkou a určíme vzdálenost této roviny od libovolného bodu druhé mimoběžky (viz kapitola 1.4.1);

Určení vzdálenosti bodu od roviny je snadné – buď známe příslušný vztah z paměti nebo si jej lze relativně snadno odvodit.

3. s využitím smíšeného součinu vektorů, které získáme ze zadání úlohy (viz kapitola 1.4.2).

1.4.1 Vzdálenost mimoběžek pomocí roviny procházející jednou z mimoběžek

Na konkrétní úloze ukážeme metodu hledání vzdálenosti mimoběžných přímek s využitím roviny, která prochází jednou ze zadaných mimoběžek.

Určete vzdálenost dvou mimoběžných přímek *p* a *q*. Přímka *p* je dána bodem $A=[4;3;-1]$ a vektorem $\vec{u}=(1;-1;2)$ a přímka *q* je dána bodem $B=[-5;-1;-3]$ a vektorem $\vec{v}=(-2;-2;-1)$ – viz obr. 17.

Vzhledem k tomu, že zadání přímek je stejné, jako bylo v kapitole 1.3.3, nemusíme znovu ověřovat, že jsou přímky mimoběžné. To jsme již dokázali.

Nyní proložíme přímkou *p* rovinu ρ, která je rovnoběžná s druhou zadanou přímkou *q*. Rovina ρ je tak dána bodem A a vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Tyto vektory jsou navzájem různoběžné, takže korektně definují rovinu.

Různoběžnost vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ (směrových vektorů přímek *p* a *q*) byla dokázána v rámci dokazování mimoběžnosti přímek *p* a *q*. Bod A a vektor $\vec{u}$ určují přímku *p*, která má ležet v rovině ρ.

Tato rovina má být rovnoběžná s přímkou q, proto je druhým vektorem určující tuto rovinu směrový vektor přímky q – vektor $\vec{v}$.

Normálový vektor $\vec{n}$ roviny ρ je vektor tvaru:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (5; -3; -4). \tag{23}$$

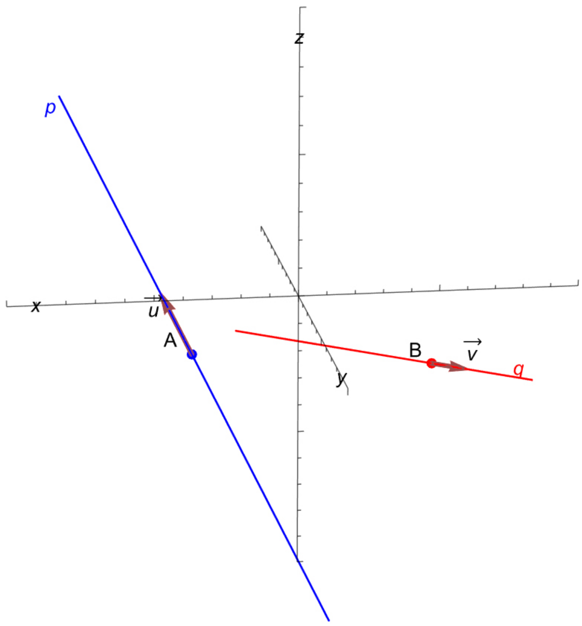
Obecnou rovnici roviny ρ můžeme psát ve tvaru $5x - 3y - 4z + d = 0$. Vzhledem k tomu, že v této rovině leží bod A, můžeme dosadit jeho souřadnice: $5 \cdot 4 - 3 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) + d = 0$. Z této rovnice vyjádříme $d = -15$. Obecná rovnice roviny ρ má tedy tvar:

$$5x - 3y - 4z - 15 = 0. \tag{24}$$

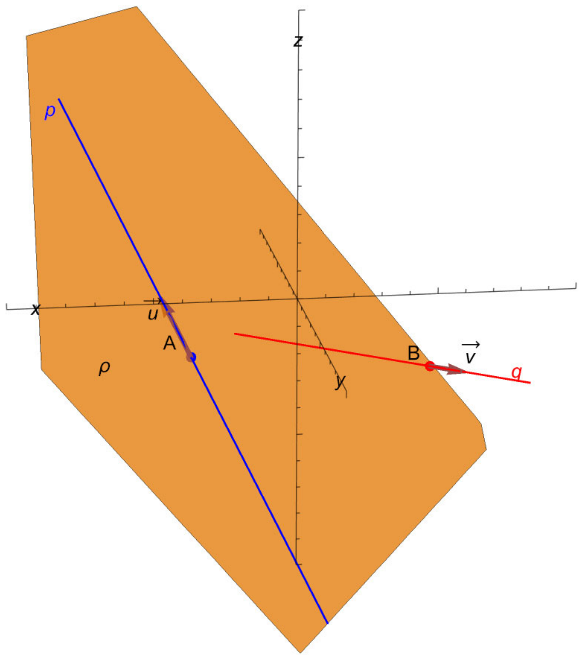
Rovina ρ je spolu se zadáním zobrazena na obr. 18.

Vzdálenost mimoběžných přímek p a q nyní určíme jako vzdálenost bodu B (ležícího na přímce q, která je rovnoběžná s rovinou ρ) od roviny ρ. Využijeme platného vztahu, do kterého dosadíme:

$$|p, q| = \frac{|5 \cdot (-5) - 3 \cdot (-1) - 4 \cdot (-3) - 15|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-4)^2}} \text{ j} = \frac{25}{\sqrt{50}} \text{ j} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ j}.$$



obr. 17



obr. 18

1.4.2 Vzdálenost mimoběžek pomocí smíšeného součinu vektorů

Určení vzdálenosti dvou mimoběžných přímek pomocí smíšeného součinu vektorů popíšeme teoreticky a vysvětlíme tak používaný vztah.

Předpokládejme, že jsou dány dvě mimoběžné přímky p a q: přímka p je dána bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$ a přímka q je dána bodem B a směrovým vektorem $\vec{v}$.

Již umíme nalézt osu mimoběžných přímek (viz kapitola 1.3.3). Předpokládejme tedy, že existují body C a D takové, že:

1. bod C leží na přímce q;
2. bod D leží na přímce p;
3. body C a D leží na ose mimoběžných přímek p a q;
4. délka $|\text{CD}|$ úsečky CD je rovna vzájemné vzdálenosti zadaných mimoběžných přímek.

Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\overrightarrow{\text{AB}}$ lze bez újmy na obecnosti umístit do bodu D. Tyto tři vektory definují rovnoběžnostěn (viz obr. 19).

Na obr. 19 je soustava souřadnic zobrazena v nezvyklém natočení, ale tak, aby byla relativně dobře vidět popisovaná tělesa.

Obsah S jeho podstavy je přitom roven

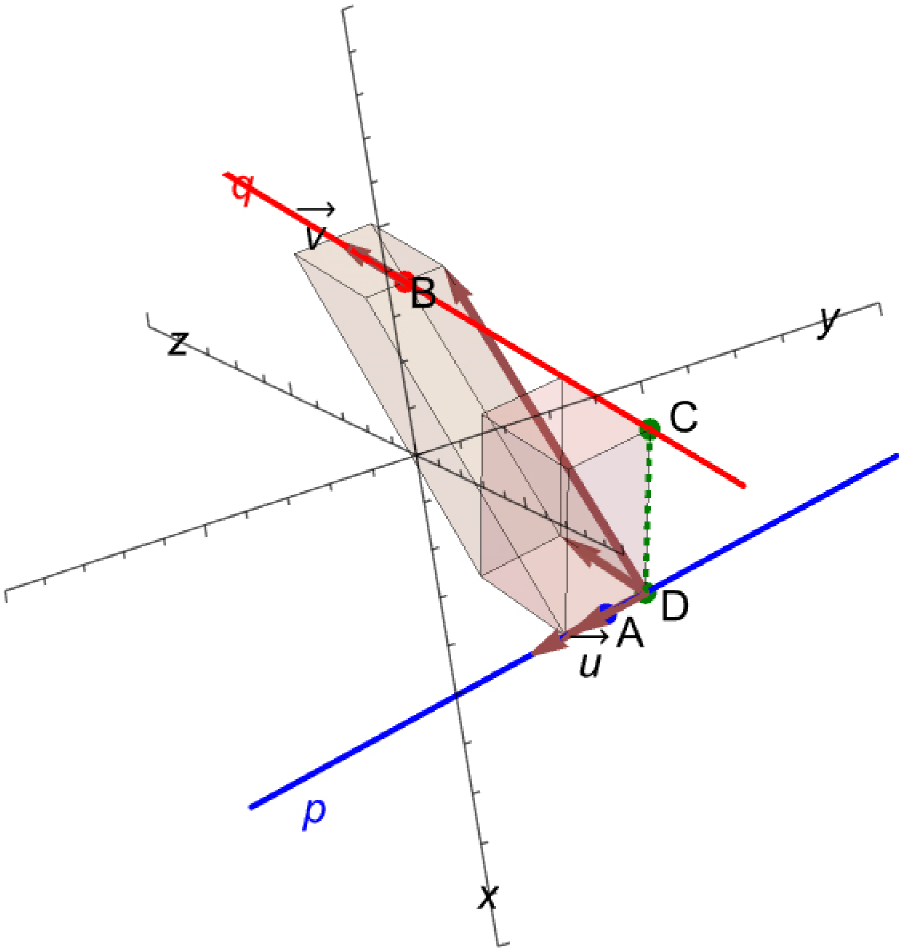
$$S = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right|. \tag{25}$$

Pro objem V rovnoběžnostěnu pak platí

$$V = \left|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} \times \vec{v}\right|. \tag{26}$$

Závorky ve vztahu (26) nemusejí být. Stačí si uvědomit, že vektorový součin je možné aplikovat pouze na dva vektory a výsledkem této operace je vektor. Skalární součin lze aplikovat také na dva vektory a výsledkem této operace je skalár. Proto je jednoznačné, že nejdříve je třeba vypočítat vektorový součin a až poté skalární součin. Pokud by pro někoho závorky byly přehlednější, tak uvažovaný vztah pak bude mít podobu: $V = \left|\overrightarrow{AB} \cdot \left(\vec{u} \times \vec{v}\right)\right|$.

Absolutní hodnota ve vztahu (26) je proto, aby bez ohledu na zvolenou orientaci příslušných vektorů vycházela vždy kladná hodnota objemu. Díky zadání (vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\overrightarrow{AB}$ charakterizují mimoběžné přímky) nemůže vyjít uvažovaný objem nulový.



obr. 19

Dále můžeme pomocí vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ tvořících jeho podstavu a délky úsečky CD definovat další rovnoběžnostěn (v tomto případě hranol).

Úsečka CD leží na ose mimoběžných přímek p a q, vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ posunuté do bodu D určují rovinu, která je rovnoběžná s přímkou q. Proto je úsečka CD kolmá na podstavu rovnoběžnostěnu určenou vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Pro objem V_h tohoto hranolu lze psát vztah $V_\mathrm{h} = S \cdot |\mathrm{CD}|$. Po dosazení ze vztahu (25) pak dostáváme

$$V_\mathrm{h} = |\mathrm{CD}| \cdot \left|\vec{u} \times \vec{v}\right|. \tag{27}$$

Objemy obou uvažovaných těles jsou přitom stejné: tělesa mají totiž stejnou podstavu a stejnou výšku. Proto platí $V_\mathrm{h} = V$. Porovnáním vztahů (26) a (27) a následným vyjádřením hledané délky úsečky CD dostaneme vztah

$$|\mathrm{CD}| = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{u} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}. \tag{28}$$

Vztah (28) je uveden ve finálním tvaru. Jakýkoliv pokus o případné krácení je nesmyslný. To, že se v čitateli i jmenovateli objevují na první pohled podobné výrazy, je pouze formální podoba. Ve skutečnosti mají oba zdánlivě stejné výrazy zcela jiný význam. Výraz v čitateli představuje vektor (který je dále skalárně násoben jiným vektorem), zatímco výraz ve jmenovateli představuje skalár (velikost vektoru).

Nyní ukážeme aplikaci odvozeného vztahu (28) na konkrétní zadání.

Určete vzdálenost dvou mimoběžných přímek p a q. Přímka p je dána bodem $\mathrm{A} = [4; 3; -1]$ a vektorem $\vec{u} = (1; -1; 2)$ a přímka q je dána bodem $\mathrm{B} = [-5; -1; -3]$ a vektorem $\vec{v} = (-2; -2; -1)$. Kvůli následnému srovnání číselných výsledků použijeme stejné přímky, jako byly použity v kapitolách 1.3.3 a 1.4.1.

Vektor $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ má tvar: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathrm{B} - \mathrm{A} = (-9; -4; -2)$.

Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ má tvar: $\vec{u} \times \vec{v} = (5; -3; -4)$.

Dosazením do vztahu (28) postupnými kroky dostáváme:

$$|\mathrm{CD}| = \frac{\left|(-9; -4; -2) \cdot (5; -3; -4)\right|}{\left|(5; -3; -4)\right|}\ \mathrm{j} = \frac{|-45 + 12 + 8|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-4)^2}}\ \mathrm{j} = \frac{25}{\sqrt{50}}\ \mathrm{j} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ \mathrm{j}.$$

Vzdálenost mimoběžných přímek p a q vyšla stejně, jako v kapitole 1.4.1.

To není pochopitelně důkaz správnosti. Důkaz správnosti vztahu (28) byl uveden výše.