



**Střední průmyslová škola sdělovací techniky  
Panská 3  
Praha 1**

© Jaroslav Reichl, 2006



# Aplikovaná matematika

text určený jako doplněk stejnojmennému semináři pro studenty čtvrtého ročníku technického lycea, ale i pro samostatné studium

**Jaroslav Reichl**

**OBSAH**

<b>1.</b>	<b>Úvod</b> .....	<b>6</b>
<b>2.</b>	<b>Matematika</b> .....	<b>7</b>
<b>2.1</b>	<b>Filosofická stránka matematiky aneb Hilbert versus množiny</b> .....	<b>7</b>
<b>2.2</b>	<b>Základní pojmy algebry</b> .....	<b>8</b>
2.2.1	Od kartézského součinu k zobrazení aneb co na střední škole ještě bylo.....	8
2.2.2	Od operace k unitárnímu prostoru aneb co se dozvíte až na vysoké škole.....	9
2.2.3	Konstrukce množiny modulárních množiny .....	10
<b>2.3</b>	<b>Matice</b> .....	<b>11</b>
2.3.1	Definice a základní operace .....	11
2.3.2	Použití matic při řešení soustav rovnic.....	13
<b>2.4</b>	<b>Determinanty</b> .....	<b>13</b>
2.4.1	Definice, základní vlastnosti .....	13
2.4.2	Výpočet determinantů vyšších stupňů .....	14
2.4.2.1	Součin prvků na hlavní diagonále .....	14
2.4.2.2	Rozvoj podle daného sloupce nebo řádku .....	15
2.4.3	Použití determinantů .....	16
<b>2.5</b>	<b>Systémy souřadnic</b> .....	<b>16</b>
2.5.1	Kartézský systém souřadnic .....	16
2.5.2	Polární souřadnice.....	17
2.5.3	Cylindrické (válcové) souřadnice.....	18
2.5.4	Sférické (kulové) souřadnice.....	19
<b>2.6</b>	<b>Transformace kartézského systému souřadnic</b> .....	<b>20</b>
2.6.1	Kartézský systém souřadnic v rovině.....	20
2.6.1.1	Posunutí.....	20
2.6.1.2	Otočení .....	20
2.6.1.3	Posunutí a otočení .....	22
2.6.2	Kartézský systém souřadnic v 3D prostoru .....	22
2.6.2.1	Posunutí.....	22
2.6.2.2	Otočení .....	22
<b>2.7</b>	<b>Matematické vyjadřování a zanedbávání</b> .....	<b>23</b>
2.7.1	Matematické vyjádření slovního projevu .....	23
2.7.2	Přibližné vztahy aneb co lze zanedbat.....	23
2.7.3	Zjednodušení matematických výrazů .....	23
2.7.3.1	Kroneckerův symbol .....	23
2.7.3.2	Levi-Civitův symbol .....	24
2.7.3.3	Einsteinovo sumační pravidlo .....	24
<b>2.8</b>	<b>Součiny s vektory; pravidlo pravé ruky</b> .....	<b>24</b>
2.8.1	Skalární součin .....	24
2.8.2	Vektorový součin .....	25
2.8.3	Pravidlo pravé ruky .....	26
2.8.4	Smíšený součin.....	26
2.8.5	Výrazy obsahující směsici součinů .....	27
<b>3.</b>	<b>Komplexní čísla a kvaterniony</b> .....	<b>28</b>
<b>3.1</b>	<b>Komplexní čísla</b> .....	<b>28</b>
3.1.1	Zavedení komplexních čísel .....	28
3.1.2	Počtení operace s komplexními čísly .....	28
3.1.3	Absolutní hodnota a grafické znázornění komplexních čísel .....	29
3.1.4	Goniometrický tvar komplexních čísel .....	30
3.1.5	Exponenciální tvar komplexních čísel.....	30
3.1.6	Grafická interpretace početních operací.....	31
3.1.7	Kvadratické rovnice řešené v oboru komplexních čísel .....	32
3.1.8	Binomické rovnice .....	32
<b>3.2</b>	<b>***Kvaterniony</b> .....	<b>33</b>
<b>4.</b>	<b>Diferenciální počet</b> .....	<b>34</b>
<b>4.1</b>	<b>Elementární funkce</b> .....	<b>34</b>

<b>4.2</b>	<b>Limita funkce .....</b>	<b>35</b>
4.2.1	Základní pojmy, zavedení pojmu limita .....	35
4.2.1.1	Limita v bodě .....	36
4.2.1.2	Jednostranná limita .....	38
4.2.1.3	Nevlastní limity funkce v bodě .....	39
4.2.1.4	Limita funkce v nevlastním bodě .....	40
4.2.2	Neurčité výrazy .....	41
4.2.3	Důležité limity .....	42
4.2.4	Užití limity funkce .....	43
4.2.4.1	Asymptoty grafu funkce .....	43
4.2.4.1.1	Asymptoty se směrnici .....	43
4.2.4.1.2	Asymptoty bez směrnice .....	44
4.2.4.2	Tečna grafu funkce .....	45
<b>4.3</b>	<b>Spojítost funkce .....</b>	<b>46</b>
4.3.1	Spojítost v bodě a v intervalu .....	46
4.3.2	Spojité funkce na uzavřených intervalech .....	48
<b>4.4</b>	<b>Derivace funkce .....</b>	<b>49</b>
4.4.1	Fyzikální význam derivace .....	49
4.4.2	Definice derivace .....	50
4.4.3	Derivace vyšších řádů .....	51
4.4.4	Vlastnosti derivace .....	51
4.4.5	Derivace elementárních a složených funkcí .....	52
4.4.6	Funkce více proměnných .....	53
4.4.6.1	Nástin definice funkce více proměnných .....	54
4.4.6.2	Parciální derivace funkce více proměnných .....	54
4.4.7	Implicitně zadané funkce a jejich derivace .....	55
<b>4.5</b>	<b>***Diferenciál funkce .....</b>	<b>57</b>
<b>4.6</b>	<b>l'Hospitalovo pravidlo .....</b>	<b>58</b>
<b>4.7</b>	<b>Průběh funkce .....</b>	<b>59</b>
4.7.1	Věty o spojitosti .....	59
4.7.2	Monotónnost funkce a derivace .....	60
4.7.3	Extrémy funkce a derivace .....	60
4.7.4	Stacionární body .....	61
4.7.5	Extrémy funkce a druhá derivace .....	62
4.7.6	Konvexnost a konkávnost funkce .....	62
4.7.7	Inflexní body .....	64
4.7.8	Vyšetřování průběhu funkce .....	64
<b>4.8</b>	<b>Užití diferenciálního počtu .....</b>	<b>65</b>
<b>5.</b>	<b>Integrální počet .....</b>	<b>66</b>
<b>5.1</b>	<b>Historický úvod .....</b>	<b>66</b>
<b>5.2</b>	<b>Primitivní funkce .....</b>	<b>66</b>
5.2.1	Zavedení primitivní funkce .....	66
5.2.2	Primitivní funkce elementárních funkcí .....	67
5.2.3	Integrační metody .....	67
5.2.3.1	Per partes .....	68
5.2.3.2	Substituční metoda .....	68
5.2.3.3	Rozklad na parciální zlomky .....	69
<b>5.3</b>	<b>Určitý integrál .....</b>	<b>71</b>
5.3.1	Pojem určitý integrál .....	72
5.3.2	Definice určitého integrálu .....	73
5.3.3	Výpočty určitých integrálů .....	73
5.3.3.1	Substituce v určitém integrálu .....	74
5.3.3.2	Metoda per partes v určitém integrálu .....	75
5.3.3.3	Rozklad na parciální zlomky v určitém integrálu .....	75
<b>5.4</b>	<b>Užití integrálního počtu .....</b>	<b>75</b>
5.4.1	Obsah rovinného obrazce .....	75
5.4.1.1	Útvar omezený grafem jedné funkce .....	75
5.4.1.2	Útvar omezený grafy více funkcí .....	76
5.4.2	Objem rotačního tělesa .....	77
5.4.3	Délka křivky .....	78

5.4.4	Povrch rotačního tělesa .....	79
<b>6.</b>	<b>Tenzory.....</b>	<b>82</b>
6.1	Skaláry .....	82
6.2	Vektory .....	82
6.3	Tenzory 2. řádu .....	83
6.3.1	Tenzorová algebra aneb základní vlastnosti a operace s tenzory 2. řádu .....	84
6.3.2	Symetrické a antisymetrické tenzory.....	84
6.3.3	Izotropní tenzory .....	85
6.4	Levi-Civitův symbol (tenzor) .....	85
6.5	Tenzor napětí.....	86
6.6	Tenzorová analýza .....	87
6.6.1	Hamiltonův operátor nabla .....	87
6.6.2	Gradient, divergence, rotace.....	88
6.6.3	Fyzikální význam .....	89
<b>7.</b>	<b>Posloupnosti.....</b>	<b>91</b>
7.1	Definice a základní vlastnosti.....	91
7.2	Způsoby zadání posloupností.....	91
7.3	Fibonacciho posloupnost .....	92
7.4	Užití geometrických posloupností.....	94
7.4.1	Základní pojmy finanční matematiky.....	94
7.4.2	Spoření bez průběžného vybírání s jednou vloženou jistinou .....	94
7.4.3	Spoření bez průběžného vybírání s pravidelně vkládanou jistinou na konci každého úrokovacího období 95	
7.4.4	Spoření bez průběžného vybírání s pravidelně vkládanou jistinou na začátku každého úrokovacího období 95	
7.4.5	Poskytování úvěru.....	96
7.5	Limita posloupnosti .....	97
7.5.1	Aritmetické posloupnosti .....	97
7.5.2	Geometrické posloupnosti.....	97
7.6	Užití limit posloupností.....	97
7.6.1	Výpočet Ludolfova čísla .....	98
7.6.2	Výpočet čísla $e$ .....	99
7.6.3	Výpočet druhé odmocniny reálných čísel .....	99
<b>8.</b>	<b>Aplikace .....</b>	<b>82</b>
8.1	Taylorův polynom (rozvoj) .....	101
8.2	„Zajímavé“ výpočty .....	103
8.2.1	Racionální kořeny rovnice s racionálními koeficienty .....	103
8.2.2	Hornerovo schéma .....	104
8.2.3	Euklidův algoritmus hledání největšího společného dělitele.....	106
8.2.4	Diferenciál funkce .....	107
8.3	Iterační metody hledání reálných kořenů polynomů.....	108
8.3.1	Před aplikací metody .....	108
8.3.2	Metoda půlení intervalu (bisekce).....	109
8.3.3	Metoda sečen (regula falsi) .....	110
8.3.4	Metoda tečen (Newtonova metoda) .....	111
8.4	Matematické zpracování naměřených dat.....	112
8.4.1	Lineární regrese.....	113
8.4.2	Lineární interpolace .....	116
8.4.3	Bilineární interpolace .....	117
8.4.4	Polynomičká aproximace .....	119
8.4.5	Lagrangeovy polynomy.....	119
8.4.6	Spline-křivky.....	120
8.5	Momenty setrvačnosti tuhého tělesa .....	123
8.5.1	Tuhé těleso a jeho pohyby.....	123

8.5.2	Kinetická energie tuhého tělesa.....	123
8.5.3	Výpočet momentů setrvačnosti .....	124
8.5.3.1	Obdélníková deska .....	124
8.5.3.2	Obruč.....	125
8.5.3.3	Plášť válce .....	125
8.5.3.4	Kruhová deska.....	125
8.5.3.5	Plný válec .....	125
8.5.3.5.1	Výpočet na základě momentu setrvačnosti kruhové desky .....	126
8.5.3.5.2	Výpočet bez znalosti momentu setrvačnosti kruhové desky .....	126
8.5.3.6	Koule.....	126
8.5.3.7	Kužel .....	127
8.5.4	Přehled momentů setrvačnosti některých těles.....	127
<b>8.6</b>	<b>Fourierova transformace .....</b>	<b>128</b>
8.6.1	Matematický popis .....	128
8.6.2	Odvození koeficientů .....	128
8.6.3	Praktický výpočet.....	129
<b>8.7</b>	<b>Vlnová rovnice.....</b>	<b>130</b>
8.7.1	Připomenutí diferenciálu .....	130
8.7.2	Šíření příčného vlnění .....	131
8.7.3	Šíření podélného vlnění.....	132
<b>8.8</b>	<b>Diferenciální rovnice.....</b>	<b>133</b>
8.8.1	Typy diferenciálních rovnic .....	133
8.8.2	Diferenciální rovnice známé z matematiky ze střední školy .....	133
8.8.3	Pohyb po úsečce aneb s kanónem na vrabce .....	134
8.8.4	Pohyb po úsečce s odporovou silou .....	135
8.8.4.1	Síla roste s rychlostí lineárně.....	135
8.8.4.2	Pohyb parašutisty .....	136
8.8.4.3	Kmitavý pohyb.....	138
8.8.5	Nabíjení kondenzátoru .....	140
8.8.6	Vybíjení kondenzátoru .....	142
8.8.7	Elektrický proud procházející cívkou.....	140
<b>8.9</b>	<b>Využití diferenciálního a integrálního počtu k řešení úloh.....</b>	<b>145</b>
<b>8.10</b>	<b>Dynamické modelování.....</b>	<b>148</b>
8.10.1	Princip metody .....	148
8.10.1.1	Základní principy .....	148
8.10.1.2	Zdůvodnění použití přibližných vztahů.....	150
8.10.1.3	Různé varianty metody.....	151
8.10.2	Řešené úlohy .....	151
8.10.2.1	Volný pád.....	151
8.10.2.2	Pád tělesa v odporujícím prostředí .....	152
8.10.2.3	Šikmý vrh v odporujícím prostředí.....	154
8.10.2.4	Kmitavý pohyb v odporujícím prostředí .....	156

# 1. ÚVOD

Text, který jste právě otevřeli, doplňuje středoškolskou matematiku a fyziku. V první části detailněji rozvíjí ty části matematiky, které jsou stěžejní pro další studium na vysoké škole. Jedná se zejména o matematickou analýzu, tj. teorii funkcí (elementární funkce a jejich vlastnosti, limita funkce, derivace funkce, primitivní funkce, ...) a algebru (vektory, matice, ...).

V další části textu jsou ukázány některé aplikace těchto částí matematiky na řešení fyzikálních problémů. Některé z předložených fyzikálních problémů se vracejí ke středoškolskému učivu fyziku a rozvíjejí jej a doplňují. Některé problémy středoškolskou látku výrazně přesahují.

## **PŘEDLOŽENÝ TEXT NENÍ V ŽÁDNÉM PŘÍPADĚ UČEBNÍCI MATEMATIKY ČI FYZIKY!!!**

Je psán volnějším stylem než by měla být psaná učebnice, chybí důkazy předkládaných matematických vět, některé poznatky jsou občas vytrženy z kontextu, takže jsou obecně v dané podobě neplatné (ale pro danou situaci použitelné), ...

Cílem textu je přiblížit matematiku a její aplikace volnějším jazykem pro ty studenty střední školy, kteří uvažují o studiu na vysokých školách technického směru. Z vlastní zkušenosti a z vyprávění bývalých spolužáků ze střední školy vím, že občas se ve fyzice, elektronice, mechanice, ... vyskytne použití matematického aparátu, který zatím nebyl v matematice probírán. Uvědomí-li si to příslušný přednášející odborného předmětu, přiblíží několik větami, o co jde, jaké „to“ má vlastnosti, jak se s „tím“ počítá, ... Pokud ne a nebo prostě nechá na studentech, ať si to zjistí sami, je mnohdy velmi obtížné sledovat další výklad! Příslušný matematický aparát pak bude probírán i v matematice - ale až o několik semestrů později. A to už někdy bývá pozdě ...

Pokud text usnadní pochopení předkládané látky, budu rád. Pokud ho budete používat i při studiu na vysoké škole, je nutné dbát výše zmíněných omezení. Řadu pojmů zde uváděných budete probírat i na vysoké škole, ale pouze stylem definice - věta - důkaz - věta - důkaz - definice - věta - důkaz ... Pomohou-li vám příklady a vysvětlení obsažené v tomto textu, pak text splnil svůj účel.

Text je psán pomocí několika zvláštních stylů:

Běžný text, odvozování vztahů, výsledné vztahy, ...

**DEFINICE DŮLEŽITÝCH POJMŮ, ZÁKONŮ, ROVNIC, ...**

Komentář, který probíranou látku rozšiřuje, upřesňuje či doplňuje.

Zjednodušená tvrzení pro lepší pochopení, která jsou tedy z matematického (fyzikálního, ...) hlediska nepřesná, ale která mohou napomoci k lepšímu pochopení probírané látky.

Text neprošel jazykovou ani odbornou kontrolou. Pokud se v textu někde vyskytnou chyby, překlepy, nejasnosti, ... omlouvám se a prosím na jejich upozornění.

Jaroslav Reichl, srpen 2010

## 2. MATEMATIKA

### 2.1 Filosofická stránka matematiky aneb Hilbert versus množiny

Matematika během svého vývoje postupně prošla třemi krizemi, které ovlivnily další vývoj a většinou nejen matematiky, ale i věd příbuzných. Zpočátku vývoje prvních vědeckých poznatků se totiž většinou „vědec“ (učenec) zabýval vědou bez rozdílu zájmu. Takže v historických a životopisných dílech můžeme najít o daném učenci, že to byl matematik, astronom, filosof, lékař, řečník, právník, teolog, ... později (když se začala zhruba od 14. století rozvíjet fyzika) i fyzik. Postupem času, jak se zvětšovalo množství poznatků, které byly z daných oborů objeveny, začali se i vědci (učenci) specializovat, takže později se v životopisech setkáme „jen“ s matematikem a fyzikem, fyzikem a astronomem, právníkem, teologem a politikem (náhrada starověkých řečníků), ...

Zmíněné 3 krize matematiky byly tyto:

1. krize matematiky - objevila se během tzv. hrdinského věku řecké matematiky (6. - 4. století př. n. l.). Její příčinou byl objev nesouměřitelnosti úseček, tj. nemožnost vyjádření všech čísel (úseček) pomocí poměrů (tj. pomocí čísel racionálních) - např. strana čtverce a jeho úhlopříčka (poměr je  $1 : \sqrt{2}$ ). Tento objev vycházel přímo z učení pythagorejců, kteří se snažili veškeré dění ve světě převést na čísla, takže se čísla zabývali důkladně. Hlavním jejich představitelem byl Pythagoras (asi 570- 500 př. n. l.).
2. krize matematiky - přelom 18. a 19. století; souvisí s nepřesným zaváděním „nekonečně malých“ a „nekonečně velkých“ veličin v souvislosti se zpřehledněním a zpřesňováním základů matematické analýzy („ $\varepsilon - \delta$  akrobatika“ - definice limit, derivací, ... jsou vystavěny právě na základě „nekonečně malých“ a „nekonečně velkých“ veličin).
3. krize matematiky - konec 19. století, kdy ruský matematik George Cantor (1845 - 1918) zavádí teorii množin (vychází v roce 1874). Vybudováním teorie množin se objevila řada paradoxů, které se snažily teorii množin vyvrátit. Problém byl v samotné axiomatické výstavbě teorie množin. Tato (zatím poslední) krize matematiky trvá v podstatě dodnes.

Problém, na základě něhož v podstatě vznikla třetí krize matematiky, souvisí úzce teorií množin. Ta operuje s pojmem „nekonečno“ a to bylo právě příčinou řady obtíží a paradoxů. Při zavádění pojmu „nekonečno“ jsou možné dva přístupy:

1. nekonečno potenciální (v možnosti) - přístup starších matematiků, kdy nekonečné množiny (např. množina přirozených čísel) byla budována postupným přidáváním dalších prvků: z množiny  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  vytvořím množinu  $\{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$ , z ní pak množinu  $\{1, 2, 3, \dots, n, n+1, n+2\}$ , ...; přitom platí:  $\{1, 2, 3, \dots, n\} \subset \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\} \subset \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, n+2\} \subset \dots$
2. nekonečno aktuální (v uskutečnění) - přístup, který převažuje dnes a který vychází z toho, že všechny nekonečné množiny, které matematikové potřebují, jsou již vytvořeny

První známky aktuálního nekonečna se začínají objevovat ve filosofii na přelomu starověku a novověku - německý matematik Gottfried Wilhelm Leibniz (1. 7. 1646 - 14. 11. 1716) patří k prvním zastáncům aktuálního nekonečna. Problém s nekonečnými množinami vzniká ale už dříve. Galileo Galilei (15. 2. 1564 - 8. 1. 1642) konstruuje (nekonečné) množiny  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$  a  $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$ . Mezi těmito množinami existuje vzájemně jednoznačné zobrazení (druhá mocnina resp. druhá odmocnina). Jinými slovy existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$  na svoji podmnožinu  $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$ . To je ale přitom ve sporu s Euklidovým axiomem (postulátem), který říká, že celek je vždy větší než část. Obě uvažované množiny jsou totiž nekonečné ...

Bernard Bolzano (1781 - 1848) přistupuje k celé problematice nekonečen s teologickými argumenty (kromě toho, že je matematikem, je i profesorem teologie na Karlově Univerzitě). Tento teologický argument se týká právě nekonečných množin s aktuálním přístupem: vytvořená (již existující) nekonečná množina vyžaduje (aby byla uchována) nekonečnou mysl. Tu má jedině Bůh, který sice může nekonečné množiny (přirozená čísla, ...) vytvořit, ale otázkou je, jestli to chce (jestli je to správné, užitečné, ...).

Poté, co v roce 1874 publikoval George Cantor (1845 - 1918) svojí teorii množin, problémy s nekonečny se projeví ještě více. Teorie množin obsahuje všechny množiny a tedy i množin nekonečné. A řada matematiků se bránila jejímu přijetí - měly podobně rozporuplné pocity jako Galileo Galilei při konstruování svých dvou množin.

Typickým příkladem, který se v této souvislosti objevuje jako „důkaz“ neplatnosti teorie množin a na kterém je založena řada dalších paradoxů, je případ holiče ve městě. Ve městě žije holič, který některé obyvatele holí, někteří se holí sami. Každý obyvatel se tedy nechává holit buď holičem nebo se holí sám (nekombinuje obě metody). Cílem je rozdělit město do dvou disjunktních množin (množin s prázdným průnikem), podle toho, jestli je holí holič nebo se holí sami. Kam ale s holičem? Holiče holí holič a přitom se ale holí sám!

Jiným příkladem je tzv. Russelův paradox: zavedeme množinu  $M$  jako množinu všech množin  $X$ , pro které platí, že množina  $X$  nepatří do  $X$ , tj.  $M = \{X; X \notin X\}$ . A co množina  $M$ ? Pokud  $M \in M$ , pak to znamená (podle konstrukce množiny  $M$ ), že  $M \notin M$ . Pokud budeme předpokládat, že  $M \notin M$ , pak (opět podle zavedení množiny  $M$ ) dojdeme k závěru, že  $M \in M$ .

Nepříjemné na celé situaci bylo, že tyto uvedené spory a paradoxy se začaly objevovat v době, kdy celá matematika teorii množin už používala a začala na ní budovat další závěry.

Pokusem o záchranu nejen teorie množin se stala **axiomatická výstavba matematiky**. Za axiom bylo v ranných matematických dobách (Euklides a jeho *Základy*) považováno tvrzení intuitivně jasné, které není třeba dokazovat. Na počátku 20. století se význam axiom posunul: je to tvrzení, které je vybráno pro daný účel a z něhož se potom odvozují další tvrzení a závěry. Hlavním iniciátorem tohoto snažení byl německý matematik a fyzik David Hilbert (23. 1. 1862 - 14. 2. 1943), který formalizoval matematiku, tzn. že zavedl

1. systém symbolů (jakousi abecedu) používanou matematiky (latinská a řecká písmena, číslice, symboly, ...)
2. pravidla podle kterých se z abecedy tvoří slova (např.  $x + y$ ,  $y + + / - ab + +$ ), (...)

Hilbertův formalismus říká, že matematik si nesmí nic představovat - pro něj existují jen axiomy, na základě nichž a platných pravidel se provádí důkazy „složitějších“ tvrzení, ... Matematika se tím odloučila od reálného světa. Reálný svět popisuje fyzika. Fyzik, pokud pustí ve výšce jednoho metru nad podlahou kámen, ví, že kámen spadne na podlahu pod vlivem tíhové síly Země. Dost těžko může rozvíjet teorii, která bude popisovat, jak puštěný kámen bude levitovat nebo dokonce prorazí strop a vyletí směrem vzhůru, protože to neodpovídá realitě. Matematik tuto šílenou teorii budovat může, protože díky Hilbertovu formalismu nemá matematická teorie žádnou spojitost s praxí.

Součástí Hilbertovy práce byly tyto podmínky na matematickou teorii:

1. nezávislost axiomů - jsou některé matematické teorie, kde se závislé axiomy vyskytují a je to ku prospěchu věci
2. úplný systém - matematická teorie musí být úplná (např. je možné dokázat platnost tvrzení  $T$  nebo jeho negaci)
3. bezesporný systém - v tomto systému není možné dokázat zároveň platnost tvrzení  $T$  i jeho negaci

Na základě těchto požadavků a základních axiomů by bylo možné budovat jakoukoliv teorii. Hilbert věřil, že je posledním skutečným matematikem, který „něco vymyslel“. Byl přesvědčen, že je možné nalézt mechanické pravidlo pro hledání důkazu a část svého života věnoval hledání tohoto pravidla. Kdyby toto pravidlo skutečně našel, pak by se velmi podstatným způsobem snížila role matematiků - ti by se stali jen pomocníky strojů, které by hledali důkazy nových tvrzení, formulovali tvrzení nová, ...

Začátkem třicátých let 20. století Kurt Gödel dokázal větu o neúplnosti, čímž zhroutil Hilbertovy představy o „konci matematiků“. Gödel využil konečný systém axiomů a navrhl větu, která odkazovala sama na sebe a kterou lze jednoduše formulovat takto:

**V:** Tato věta není dokazatelná.

Pokud by byl Gödel schopen tuto větu dokázat, věta by byla nepravdivá a to by byl problém. Žádná dobrá množina axiomů by totiž neměla umožnit dokázat tvrzení, které je nepravdivé. Pokud by naopak tuto větu nebylo možné dokázat, byla by věta pravdivá, ale to není možné v rámci dané teorii dokázat. Matematika je tedy neúplná a Gödelova věta se tak stává nejdůležitějším milníkem (pokrokem) v matematice dvacátého století.

Věta o neúplnosti tedy říká, že když máme k dispozici nějakou matematickou teorii (popsatelnou axiomy, formulami, ...), která obsahuje aritmetiku přirozených nebo celých čísel a která je bezesporná, pak tato teorie nemůže být úplná. Jinými slovy v této teorii je možné formálními prostředky dané teorie dokázat platnost tvrzení  $T$  i jeho negace nebo danými prostředky není možné dokázat ani tvrzení  $T$  ani jeho negaci. Jistá náprava by se mohla na první pohled zdát v tom, že jedno z problematických tvrzení vezme jako základní axiom. Tím zvětšíme teorii, ale přesto se zde vyskytne další nedokazatelné tvrzení.

Problém je v tom, že bezespornost dané teorie není možné dokázat v rámci této teorie, ale až v rámci teorii širší. O té ale dopředu nevíme jestli je nebo není bezesporná. (Např. bezespornost reálných čísel není možné dokázat v rámci reálných čísel, ale až v rámci čísel komplexních - viz definici komplexních čísel jako dvojice čísel reálných v odstavci 3)

## 2.2 Základní pojmy algebry

Algebra je část matematiky, která se zabývá různými matematickými strukturami (grupy, tělesa, vektorové prostory, okruhy, obory integrity, ...), vztahy mezi těmito strukturami a zobrazeními mezi jednotlivými strukturami. Zabývá se těmito strukturami jak na obecné úrovni, tak potom na konkrétních aplikacích (např. matice a řešení lineárních rovnic a jejich soustav; ...). Pro další výklad bude nezbytné seznámit se základními pojmy z lineární algebry.

### 2.2.1 Od kartézského součinu k zobrazení aneb co na střední škole ještě bylo

Začneme se základní definicí, od níž se odvíjí vše ostatní: kartézský součin.

**KARTÉZSKÝ SOUČIN MNOŽIN  $A$  A  $B$  JE MNOŽINA VŠECH USPOŘÁDANÝCH DVOJIC  $[x, y]$  TAKOVÝCH, ŽE  $x \in A$  A ZÁROVEŇ  $y \in B$ . ZNAČÍ SE  $A \times B$ .**

Pokud se budeme zabývat speciální případem kartézského součinu, ve kterém každý prvek má maximálně jeden obraz, budeme mluvit o zobrazení.

**ZOBRAZENÍ MNOŽINY  $A$  DO MNOŽINY  $B$  JE PODMNOŽINA KARTÉZSKÉHO SOUČINU  $A \times B$ , PRO JEJÍŽ USPOŘÁDANÉ DVOJICE  $[x_1; y_1]$ ,  $[x_2; y_2]$  PLATÍ:  $y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ .**

Speciálním případem zobrazení je pak zobrazení prosté, kdy každému obrazu odpovídá maximálně jeden vzor.



**ZOBRAZENÍ  $U$  SE NAZÝVÁ PROSTÉ, PŘÁVĚ TEHDY KDYŽ PRO LIBOVOLNÉ DVA PRVKY  $y_1 = U(x_1)$  A  $y_2 = U(x_2)$  ZOBRAZENÍ  $U$  PLATÍ:  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$ .**

Jestliže se jedná o zobrazení množiny  $A$  na množinu  $B$ , které je prosté, mluvíme o vzájemně jednoznačném zobrazení  $A$  na  $B$ .

### 2.2.2 Od operace k unitárnímu prostoru aneb co se dozvíte až na vysoké škole

K důležitým strukturám, které se zavádějí právě v algebře, je nutné zavést i pojem operace.

**NECHŤ  $G$  JE NEPRÁZNÁ MNOŽINA. OPERACÍ (BINÁRNÍ OPERACÍ) NA MNOŽINĚ  $G$  SE ROZUMÍ KTERÉKOLIV ZOBRAZENÍ  $f: G \times G \rightarrow G$ .**

Máme-li na neprázdne množině  $G$  definovanou nějakou operaci (např. operaci  $*$  - „hvězdička“), můžeme zavést uspořádanou dvojici  $(G, *)$ , která se nazývá **grupoid**. Aby byl grupoid **grupou**, což je důležitý pojem pro další výklad, musí být splněny určité podmínky.

**GRUPOID  $(G, *)$  SE NAZÝVÁ GRUPOU, JSOU-LI SPLNĚNY NÁSLEDUJÍCÍ PODMÍNKY:**

1. PRO VŠECHNA  $g_1, g_2 \in G$  PLATÍ:  $g_1 * g_2 \in G$ ,
2. PRO VŠECHNA  $g_1, g_2, g_3 \in G$  PLATÍ:  $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$  (ASOCIATIVNÍ ZÁKON),
3. EXISTUJE NEUTRÁLNÍ PRVEK  $n \in G$  TAKOVÝ, ŽE PRO KAŽDÝ PRVEK  $g \in G$  PLATÍ:  $g * n = n * g = g$ ,
4. PRO KAŽDÝ PRVEK  $g \in G$  EXISTUJE SYMETRICKÝ PRVEK  $s \in G$  TAK, ŽE PLATÍ:  $g * s = s * g = n$ .

Pokud navíc pro všechna  $g_1, g_2 \in G$  platí  $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$  hovoří se o **komutativní (Abelově) grupě**.

Právě uvedená definice grupy je oproti ostatním (uvedeným dříve) složitější, ale pokusíme se jí rozebrat. První bod říká, že pokud provedeme na libovolné dva prvky z množiny  $G$  definovanou operaci, výsledek musí být také prvkem z množiny  $G$ . Druhý bod je vyjádřením asociativního zákona. Třetí a čtvrtý bod definují jisté „speciální“ prvky v množině  $G$ , které dávají grupám řadu výhod. Jedná se ale o učivo, které překračuje rámec tohoto článku.

V definici grupy jsou tyto „speciální“ prvky popsány v obecné podobě, i když se většinou pracuje s konkrétními případy:

1. pro grupu s operací „+“ (tj. sčítání) se neutrální prvek nazývá **nulový** a symetrický prvek je prvek **opačný**
2. pro grupu s operací „·“ (tj. násobení) se neutrální prvek nazývá **jednotkový** a symetrický prvek je prvek **inverzní**.

Příklady grup jsou tyto grupoidy  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ , ... ale už ne  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  (neexistuje prvek inverzní),  $(\mathbb{N}, +)$  (neexistuje prvek opačný), ...

Další algebraickou strukturou je těleso, které můžeme zavést pomocí grup.

**NECHŤ  $T$  JE NEPRÁZNÁ MNOŽINA, NA KTERÉ JSOU DEFINOVÁNY DVĚ OPERACE: SČÍTÁNÍ A NÁSOBENÍ.  $(T, +, \cdot)$  JE TĚLESO, JSOU-LI SPLNĚNY NÁSLEDUJÍCÍ PODMÍNKY:**

1. PRO VŠECHNA  $t_1, t_2, t_3 \in T$  PLATÍ:  $t_1 \cdot (t_2 + t_3) = t_1 \cdot t_2 + t_1 \cdot t_3$  (DISTRIBUTIVNÍ ZÁKON),
2.  $(T, +)$  JE KOMUTATIVNÍ GRUPOU,
3.  $(T - \{0\}, \cdot)$  JE (KOMUTATIVNÍ) GRUPOU.

Jako příklady těles je možné uvést  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  a  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ . Další příklady (s nimiž se pracuje v algebře) pro nás nejsou žádným přínosem.

Další strukturou, s níž pracuje i kvantová fyzika, je vektorový prostor.

**NECHŤ  $(T, +, \cdot)$  JE TĚLESO. ŘEKNEME, ŽE  $V$  JE VEKTOROVÝ PROSTOR NAD TĚLESEM  $T$ , JESTLIŽE  $V$  JE NEPRÁZNÁ MNOŽINA, NA NÍŽ JSOU DEFINOVÁNY OPERACE SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ A PRO VŠECHNA  $\lambda \in T$  A VŠECHNA  $v \in V$  JE DEFINOVÁN PRVEK  $\lambda v \in V$ , PŘIČEMŽ PLATÍ:**

1.  $(V, +)$  JE KOMUTATIVNÍ GRUPOU,
2. PRO VŠECHNA  $\alpha, \beta \in T$  A PRO VŠECHNA  $v \in V$  JE  $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ ,
3. PRO VŠECHNA  $\alpha, \beta \in T$  A PRO VŠECHNA  $v \in V$  JE  $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ ,
4. PRO VŠECHNA  $\alpha \in T$  A PRO VŠECHNA  $u, v \in V$  JE  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ ,
5. PRO VŠECHNA  $v \in V$  JE  $1 \cdot v = v$ .

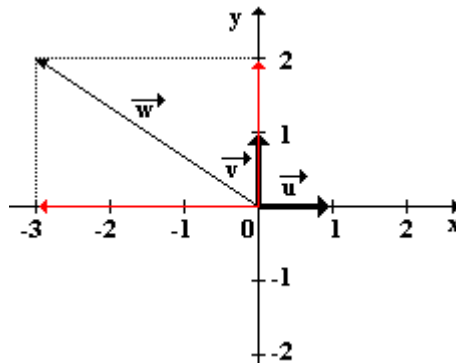
Prvky vektorového prostoru se nazývají **vektory**, prvky tělesa, nad kterým je vektorový prostor definován, jsou **skaláry**. Prvky vektorového prostoru nemusí být vektory v běžném slova smyslu, tj. „úsečky se šipkou“. Jako vektory (tj. prvky vektorového prostoru) mohou vystupovat např. reálná čísla, ... Příklady

vektorových prostorů: komplexní čísla (viz odstavec 3) lze chápat jako vektorový prostor nad tělesem reálných čísel, reálná čísla je možné chápat také jako vektorový prostor nad tělesem reálných čísel, ...

Každý vektorový prostor má svoji **bázi**. Jedná se o skupinu vektorů, která má tyto vlastnosti:

1. pomocí vektorů báze je možné vyjádřit libovolný vektor z daného vektorového prostoru (odborně se říká, že uvažovaná skupina vektorů generuje celý vektorový prostor)
2. vektory jsou lineárně nezávislé, tj. žádný vektor báze není lineární kombinací ostatních vektorů
3. počet vektorů báze je roven dimenzi daného vektorového prostoru

To, co na první pohled zní učeně, si lze velice jednoduše představit např. v kartézské soustavě souřadnic v rovině. Rovinu je možné chápat jako prostor dimenze 2 (má 2 nezávislé směry, tj. dvě osy). Jako vektory báze tohoto prostoru, tj. roviny, lze volit např. vektory  $\vec{u} = (1; 0)$  a  $\vec{v} = (0; 1)$ . Pomocí těchto dvou vektorů, které jsou lineárně nezávislé (jeden není lineární kombinací druhého, tj. v tomto případě není jeden násobkem druhého), je možné vyjádřit skutečně všechny vektory. Tak např. vektor  $\vec{w} = (-3; 2)$  můžeme napsat jako tuto lineární kombinaci vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ :  $\vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v} = -3(1; 0) + 2(0; 1) = (-3; 0) + (0; 2) = (-3; 2)$  (viz obr. 1). Analogicky je možné postupovat v případě libovolného jiného vektoru.



obr. 1

Je třeba si uvědomit, že zvolená báze (tj. vektory  $\vec{u} = (1; 0)$  a  $\vec{v} = (0; 1)$ ) není jediná. Existuje nekonečné množství dalších, ale tato je nejjednodušší - říkáme, že je **ortonormální**:

1. vektory báze jsou **ortogonální** (navzájem kolmé)
2. vektory báze jsou **normované**, tj. jejich velikost je jedna

Pokud to je možné vždy se v daném vektorovém prostoru volí ortonormální báze, protože vektory takové báze mají „jednoduché“ souřadnice, s nimiž se provádějí výpočty snadně, navíc v případě euklidovského prostoru vektory leží na osách kartézského systému.

**UNITÁRNÍM PROSTOREM SE ROZUMÍ DVOJICE  $(V, g)$ , KDE  $V$  JE VEKTOROVÝ PROSTOR A  $g$  SKALÁRNÍ SOUČIN. PRO KAŽDÉ  $u, v \in V$  JE  $g(u, v)$  SKALÁRNÍ SOUČIN UVEDENÝCH DVOU VEKTORŮ  $u, v$ .**

**ŘEKNEME, ŽE VEKTORY  $u, v \in V$  JSOU NAVZÁJEM ORTOGONÁLNÍ (KOLMÉ), POKUD  $g(u, v) = 0$ .**

### 2.2.3 Konstrukce množiny modulárních množiny

Pro pevně zvolené přirozené číslo  $p$  a celé číslo  $m$  je možné zkonstruovat množinu  $\overline{m}_p = \{n \in \mathbb{Z}; n \bmod p = m \bmod p\}$ , tj. množinu, která obsahuje čísla, která mají při dělení číslem  $p$  stejný zbytek jako při dělení číslem  $m$ . Příklady uvedených množin:

$$\overline{0}_3 = \overline{3}_3 = \{\dots; -6; -3; 0; 3; 6; 9; \dots\}$$

$$\overline{1}_3 = \overline{4}_3 = \{\dots; -5; -2; 1; 4; 7; 10; \dots\}$$

$$\overline{2}_3 = \overline{5}_3 = \{\dots; -4; -1; 2; 5; 8; 11; \dots\}$$

...

Symbolem  $\mathbb{Z}_p$  se pak značí množina všech různých množin  $\overline{m}_p$  pro  $m \in \mathbb{Z}$ :  $\mathbb{Z}_p = \{\overline{0}_p; \overline{1}_p; \overline{2}_p; \dots; \overline{p-1}_p\}$ .

Je-li  $p$  prvočíslo a pokud dodefinujeme  $\overline{m}_p + \overline{h}_p = \overline{m+h}_p$  a  $\overline{m}_p \cdot \overline{h}_p = \overline{m \cdot h}_p$  pro  $h \in \mathbb{Z}$ , je možné dokázat, že tímto způsobem jsou korektním způsobem na množině  $\mathbb{Z}_p$  definovány operace sčítání a násobení, při nichž je  $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$  těleso.

Při sčítání a násobení čísel tvaru  $\overline{m}_p$  se postupuje stejně jako v případě, že bychom pracovali v číselné soustavě o základu  $p$ . Např.  $\overline{2}_3 + \overline{2}_3 = \overline{4}_3 = \overline{1}_3$ ,  $\overline{2}_3 \cdot \overline{4}_3 = \overline{8}_3 = \overline{2}_3$ , ... Někdy se této části aritmetiky říká aritmetika hodinových ručiček: počítání s ní je podobné jako počítání hodin na hodinách.

## 2.3 Matice

### 2.3.1 Definice a základní operace

V tomto odstavci zmíníme základní informace o maticích a operacích, které je možné s maticemi provádět.

NECHŤ  $m, n \in \mathbb{N}$ . MATICÍ  $A$  SESTAVENOU Z PRVKŮ TĚLESA  $T$  ROZUMÍME ZOBRAZENÍ

$$A: m \times n \rightarrow T, \quad A: (i, j) \rightarrow a_{ij} \in T. \quad \text{TATO MATICE SE ZNAČÍ } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{NEBO}$$

$A = (a_{ij})$ . MNOŽINU VŠECH TAKOVÝCH MATIC BUDEME ZNAČIT  $T^{m \times n}$ . O MATICÍCH Z MNOŽINY  $T^{m \times n}$  ŘÍKÁME, ŽE MAJÍ  $m$  ŘÁDKŮ A  $n$  SLOUPCŮ, TJ. JDE O MATICE TYPU  $(m, n)$ .

V PŘÍPADĚ, ŽE  $m = n$ , HOVOŘÍME O ČTVERCOVÉ MATICI STUPNĚ  $n$ .

Důležitým pojmem u matice je její hodnota:

HODNOST MATICE  $M$  TYPU  $(m, n)$  UDÁVÁ MAXIMÁLNÍ POČET LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝCH ŘÁDKŮ, KTERÝ JE ROVEN MAXIMÁLNÍMU POČTU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝCH SLOUPCŮ DANÉ MATICE. ZNAČÍ SE  $h(M)$ .

Příklad: Hodnota matice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$  je  $h(M) = 1$ , pro matici  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  je  $h(A) = 2$ , ...

Hodnota matice  $A$  se nezmění (tj. z matice  $A$  vytvoříme novou matici  $B$  o téže hodnotě), pokud s řádky resp. sloupci provedeme některou z těchto **elementárních úprav**:

1. napíšeme řádky (resp. sloupce) matice  $A$  v jiném pořadí
2. násobíme některý řádek (resp. sloupec) matice  $A$  nenulovým skalárem
3. přidáme k matici  $A$  řádek (resp. sloupec), který je lineární kombinací ostatních řádků (resp. sloupců)
4. vynecháme v matici  $A$  řádek (resp. sloupec), který je lineární kombinací ostatních řádků (resp. sloupců)
5. přičteme k některému řádku (resp. sloupci) matice  $A$  lineární kombinaci ostatních řádků (resp. sloupců)

V tom případě se matice nazývají **ekvivalentní matice**.

Operace, které je možné provádět s maticemi jsou tyto:

**PRO MATICE**  $A = (a_{ij})$  A  $B = (b_{ij})$  TYPU  $(m, n)$  SE DEFINUJE SOUČET MATIC  $A + B$  JAKO MATICE  $C$  TYPU  $(m, n)$ , PRO KTEROU PLATÍ:  $C = (c_{ij})$ , KDE  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  PRO  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**PRO MATICI**  $A = (a_{ij})$  TYPU  $(m, n)$  A  $\lambda \in T$  SE DEFINUJE NÁSOBEK MATICE  $A$  SKALÁREM  $\lambda$  JAKO MATICE  $D$  TYPU  $(m, n)$ , PRO KTEROU PLATÍ:  $D = (d_{ij})$ , KDE  $d_{ij} = \lambda a_{ij}$  PRO  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**PRO MATICE**  $A = (a_{ij})$  TYPU  $(m, n)$  A  $B = (b_{ij})$  TYPU  $(n, k)$  SE DEFINUJE SOUČIN MATIC  $AB$  JAKO MATICE  $F$  TYPU  $(m, k)$ , PRO KTEROU PLATÍ:  $F = (f_{ij})$ , KDE  $f_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}$  PRO  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Poznámka: Formulí  $f_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}$  z definice součinu dvou matic lze opsat slovy tak, že násobíme  $i$ -tý řádek matice  $A$   $j$ -tým řádkem matice  $B$ .

**Násobení matic není obecně komutativní!!!**

Tak jako v grupách a tělesech (viz odstavce 2.2.2) existoval jednotkový prvek, existuje „jednotkový prvek“ i pro matice - je jím jednotková matice:

$$\text{MATICE } E_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ SE NAZÝVÁ JEDNOTKOVÁ MATICE STUPNĚ } m.$$

Podobně jako existoval v grupách a tělesech (viz odstavec 2.2.2) prvek inverzní k danému prvku, existuje „inverzní prvek“ i pro matice - je jím inverzní matice:

**ČTVERCOVÁ MATICE  $M^{-1}$ , PRO KTEROU PLATÍ  $M^{-1} \cdot M = M \cdot M^{-1} = E$ , SE NAZÝVÁ INVERZNÍ MATICE KE ČTVERCOVÉ MATICI  $M$ .**

Najít inverzní matici  $M^{-1}$  k matici  $M$  je možné několika způsoby:

1. pomocí násobení dvou matic (přesně podle definice inverzní matice a definice násobení matic) s tím, že budeme řešit soustavu několika rovnic, v nichž neznámé budou jednotlivé koeficienty hledané inverzní matice  $M^{-1}$
2. „fintou“, která spočívá v tom, že si napíšeme danou matici  $M$  a jednotkovou matici do „velké matice“  $(M : E)$  a pomocí povolených úprav matic (násobení řádku, přičtení řádku k jinému řádku, výměna řádků, ...) dojdeme do tvaru, kdy jednotková matice  $E$  bude „v levé části velké matice“ - „v pravé části velké matice“ pak bude matice  $M^{-1}$ , tj.  $(E : M^{-1})$

Příklad: Nalezněte inverzní matici k matici  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ .

Řešení: K nalezení inverzní matice k matici  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$  použijeme právě popsanou „fintu“. Podle návodu

vytvoříme matici  $\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ , kterou budeme dále upravovat:  $\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$   
 $\left( \begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right)$ . Inverzní matice k matici  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$  je tedy matice  $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ .

Tuto matici je možné dále upravit na tvar  $M^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

Pro inverzní matice platí tato pravidla:

1.  $(M^{-1})^{-1} = M$
2.  $(\lambda M)^{-1} = \frac{1}{\lambda} M^{-1}$ , kde  $\lambda \in T$  je nenulový skalár
3.  $(M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_{n-1} \cdot M_n)^{-1} = M_n^{-1} \cdot M_{n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot M_2^{-1} \cdot M_1^{-1}$

Na základě existence inverzní matice se matice dělí do dvou disjunktních skupin:

**MATICE, K NÍŽ EXISTUJE INVERZNÍ MATICE, SE NAZÝVÁ REGULÁRNÍ MATICE. V OPAČNÉM PŘÍPADĚ SE NAZÝVÁ SINGULÁRNÍ.**

Při počítání s matice je možné se též setkat s maticí transponovanou:

**NECHŤ MATICE  $M = (a_{ij})$  JE TYPU  $(m, n)$ . MATICÍ TRANSPONOVANOU K MATICI  $M$**

**ROZUMÍME MATICI  $M^T = (b_{ji})$  TYPU  $(n, m)$ , KDE  $(b_{ji}) = (a_{ij})$  PRO  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .**

Příklad: maticí transponovanou k matici  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  je matice  $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ .

Pro transponované matice platí tato pravidla:

1.  $(M^T)^T = M$
2.  $(\lambda M)^T = \lambda M^T$ , kde  $\lambda \in T$  je nenulový skalár
3.  $(M_1 + M_2 + \dots + M_{n-1} + M_n)^T = M_1^T + M_2^T + \dots + M_{n-1}^T + M_n^T$
4.  $(M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_{n-1} \cdot M_n)^T = M_n^T \cdot M_{n-1}^T \cdot \dots \cdot M_2^T \cdot M_1^T$

### 2.3.2 Použití matic při řešení soustav rovnic

Při řešení soustavy rovnic hraje důležitou úlohu matice stupňovitého tvaru:

**MATICE  $M$  TYPU  $(m, n)$  SE NAZÝVÁ MATICE STUPŇOVITĚHO TVARU, MÁ-LI TVAR:**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1i_1} & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & a_{2i_2} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \cdots & & & & \vdots & & * \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & a_{ki_k} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{KDE} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, \quad k \in \mathbb{N},$$

$a_{1i_1} \neq 0 \wedge a_{2i_2} \neq 0 \wedge \dots \wedge a_{ki_k} \neq 0$  A \* ZNAČÍ LIBOVOLNÝ PRVEK Z TĚLESA  $T$ .

Speciálním případem matice stupňovitého tvaru je matice trojúhelníková.

Významnou roli hrají matice při řešení soustavy rovnic, kdy maticový zápis výrazně zpřehlední řešení této soustavy a eliminuje možnost vzniku chyby.

Uvažme soustavu  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ve tvaru:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \quad \text{kde } a_{ij}, b_1, b_2, \dots, b_m \in T$$

**SOUSTAVA ROVNIC SE NAZÝVÁ HOMOGENNÍ, JESTLIŽE  $b_i = 0$  PRO  $i = 1, 2, \dots, m$ . SOUSTAVA ROVNICE SE NAZÝVÁ NEHOMOGENNÍ, JESTLIŽE  $b_i \neq 0$  ALESPŮŇ PRO JEDEN INDEX  $i = 1, 2, \dots, m$ .**

Pro snadné určení řešitelnosti dané soustavy rovnic se zavádí dvě matice:

$$\text{MATICE } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{SE NAZÝVÁ MATICE SOUSTAVY ROVNIC. MATICE}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad \text{SE NAZÝVÁ ROZŠÍŘENÁ MATICE SOUSTAVY ROVNIC.}$$

Na základě hodnoty matice soustavy rovnic a hodnoty rozšířené matice soustavy rovnic je možné určit počet řešení dané **nehomogenní soustavy rovnic** (matematicky se jedná o **Frobeniovu větu**):

1.  $h(A) = h(A^*) = n$  - soustava rovnic má právě jedno řešení
2.  $h(A) = h(A^*) < n$  - soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení
3.  $h(A) \neq h(A^*)$  - soustava rovnic nemá žádné řešení.

**Homogenní soustava rovnic** má vždy netriviální řešení (alespoň jedno z  $x_i$  pro  $i = 1, 2, \dots, n$  je nenulové), právě když  $h(A) < n$ .

Postup, kterým je možné pomocí maticového zápisu vyřešit soustavu  $m$  rovnic o  $n$  neznámých, formuloval už Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). Na jeho počest se tato metoda nazývá **Gaussova eliminační metoda**:

1. pomocí elementárních úprav převést rozšířenou matici soustavy rovnic na matici stupňovitého tvaru
2. v případě, že má soustava řešení, pak  $m - n$  neznámých (je-li  $m - n > 0$ ) zvolit jako parametr (pokud  $m = n$  tento krok odpadá)
3. pomocí tzv. zpětného chodu dopočítávat jednotlivé neznámé „odspodu“ matice stupňovitého tvaru - vypočítat a dosadit do řádku o jeden výše

## 2.4 Determinanty

### 2.4.1 Definice, základní vlastnosti

Determinant je pojem, který souvisí přímo s maticemi. Jedná se o číslo, které ze **čtvercové** matice získáme předem definovaným způsobem. Nejjednodušší je determinant matice druhého stupně.

NECHĚT JE TĚLESO A  $a, b, c, d \in T$ . DETERMINANTEM MATICE DRUHÉHO STUPNĚ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ROZUMÍME PRVEK } ad - bc \in T. \text{ ZÁPIS: } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

*Poznámka:* Determinant matice A bývá někdy zvykem značit též  $\det A$ .

Podobným způsobem je možné vypočítat i determinant matice třetího stupně. Výpočet tohoto determinantu je možný pomocí **Sarrusova pravidla**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Pamatovat si Sarrusovo pravidlo

v tomto tvaru je asi dost náročné (i když jistou závislost pro vytvoření nějaké mnemotechnické pomůcky by se jistě podařilo nalézt). Rozumnější je uvědomit si, že se jedná o jakési zobecnění výpočtu determinantu druhého

stupně. Stačí si determinant  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  přepsat do pomocného tvaru  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$  a nyní už řešit

analogicky jako determinant matice druhého stupně. Na třech „diagonálách“, které míří „zleva shora doprava dolů“ vynásobíme prvky a vzniklé součiny sečteme. Na třech „diagonálách“, které jdou „zleva zdola doprava nahoru“ opět vynásobíme prvky a vzniklé součiny sečteme. Tento výsledek odečteme od součtu získaného z diagonál jdoucích „zleva shora doprava dolů“ a determinant je vypočtený.

Příklad: Vypočtete determinant matice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Řešení: Determinant si přepíšeme v pomocném tvaru  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$  a nyní už můžeme počítat:

$1.4.1 + (-1).(-3).(-1) + 2.2.0 - (-1).4.2 - 0.(-3).1 - 1.2.(-1)$ . Po vyčíslení dostaneme:  $4 - 3 + 0 + 8 + 0 + 2 = 11$ .

Tedy  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 11$ .

## 2.4.2 Výpočet determinantů vyšších stupňů

Determinant čtvercové matice vyššího stupně než tři se počítá podle jistých pravidel. Odvození těchto pravidel jde ale za rámec středoškolské matematiky a nebudeme je zde proto uvádět. Připomeneme vlastnosti determinantů:

1. determinant jednotkové matice je 1
2. výměnou libovolných dvou řádků se změní znaménko determinantu
3. má-li matice libovolné dva řádky stejné, pak její determinant je nulový
4. vynásobením libovolného řádku matice nenulovým skalárem  $\lambda$  se determinant příslušné matice zvýší  $\lambda$ -krát
5. determinant singulární matice je nulový; determinant regulární matice je nenulový

### 2.4.2.1 Součin prvků na hlavní diagonále

V případě, že je nutné vypočítat determinant vyššího než třetího stupně, je možné použít následující pravidlo: Upravíme-li matici do trojúhelníkového tvaru, tj. pod hlavní diagonálou jsou samé nuly, je hodnota determinantu rovna součinu prvků na hlavní diagonále. Při úpravách je třeba dbát na to, abychom hodnotu determinantu nezvyšovali. Zejména bod 4 z právě uvedených vlastností determinantů by mohl působit potíže. Je tedy možné násobit libovolným nenulovým reálným číslem  $\lambda$  libovolný řádek determinantu. Pokud ale s řádkem nic neprovádíme, hodnota determinantu se  $\lambda$ -krát zvýší. Násobíme-li řádek, který potom přičítáme k dalšímu, není nutné provádět žádné korekce při výpočtu determinantu - jeho hodnota se tím nemění.

Konkrétněji asi vše vysvětlí následující příklad.

Příklad: Vypočtete determinant  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ .

Řešení: Determinant vypočteme zejména s využitím bodu 4 uvedeného ve vlastnostech determinantů. Aby se hodnota determinantu nezměnila, je třeba uvažovaným skalárem  $\lambda$  determinant ihned vydělit:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-3) = \frac{1}{(-3)^4} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -8 \end{vmatrix} \cdot (-2) =$$

$$= \frac{1}{(-3)^4 \cdot 5^3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -36 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -21 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -36 \end{vmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{(-3)^4 \cdot 5^3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -36 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -35 \end{vmatrix} \cdot (-4) =$$

$$= \frac{1}{(-3)^4 \cdot 5^3 \cdot (-4)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -36 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 135 \end{vmatrix} \cdot (-4) = \frac{3 \cdot (-5) \cdot (-36) \cdot (-20) \cdot 135}{(-3)^4 \cdot 5^3 \cdot (-4)} = 36$$

Problematika  $\lambda$ - násobku snad vynikla a byla vysvětlena. Ve třetím kroku, kde se násobí třetí řádek determinantu skalárem  $\left(-\frac{1}{6}\right)$  se žádná korekce na výpočet determinantu neprovádí, protože tento třetí řádek přičítáme k řádku čtvrtému a pátému. V ostatních případech je nutné korekce provést, protože vždy násobíme řádek, do něhož se přičítá, tj. se řádkem samotným se vlastně jakoby nehýbe.

#### 2.4.2.2 Rozvoj podle daného sloupce nebo řádku

Dříve než začneme s výpočtem determinantu pomocí rozvoje podle daného sloupce resp. řádku, je třeba zavést některé důležité pojmy.

NECHŤ MATICE  $A = (a_{ij})$  JE TYPU  $(m, n)$ . VZNIKNE-LI MATICE  $M$  TAK, ŽE Z MATICE  $A$  VYNECHÁME ŘÁDKY  $i_1, i_2, \dots, i_h$  A SLOUPCE  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , BUDEME PSÁT  $M = A^g \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_h \\ j_1, j_2, \dots, j_k \end{pmatrix}$  A BUDEME ŘÍKAT, ŽE MATICE  $M$  JE SUBMATICE MATICE  $A$ .

**Příklad:** Je dána matice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Určete  $A^g \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  a  $A^g \begin{pmatrix} 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Řešení:** Submatice  $A^g \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  vznikne z matice  $A$  vynecháním 1. a 3. řádku a 2. a 3. sloupce, tedy z matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Proto dostáváme: } A^g \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Analogickým postupem dostaneme: } A^g \begin{pmatrix} 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pomocí submatice dané matice je možné zavést též subdeterminant a algebraický doplněk.

NECHŤ  $M$ , MATICE TYPU  $(k, k)$ , JE SUBMATICE MATICE  $A$  TYPU  $(m, n)$ , KDE  $1 \leq k \leq \min(m, n)$ . PRVEK  $\det M = |M|$  SE NAZÝVÁ SUBDETERMINANT MATICE  $A$ .

NECHŤ MATICE  $A = (a_{ij})$  JE ČTVERCOVÁ MATICE STUPNĚ  $m$ . PRO SUBMATICI  $M = A^g \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  ZAVÁDÍME  $A_{ij}^+ = \det M = \det A^g \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  A DÁLE DEFINUJEME  $A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^+$ , PŘIČEMŽ PRVEK  $A_{ij}$  SE NAZÝVÁ ALGEBRAICKÝ DOPLNĚK PRVKU  $a_{ij}$  V MATICI  $A$ .

Nyní je možné napsat rozvoj determinantu pomocí daného sloupce: Pro matici typu  $A$  typu  $(m, m)$  a pro  $i$ , pro které  $1 \leq i \leq m$ , platí:  $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{im}A_{im}$ .

Analogicky je možné postupovat při rozvoji determinantu pomocí daného řádku: Pro matici typu  $A$  typu  $(m, n)$  a pro  $i$ , pro které  $1 \leq i \leq m$ , platí:  $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{im}A_{im}$ .

Tento způsob výpočtu determinantu je možné použít v případě determinantů vyšších stupňů, které obsahují v některém sloupci či řádce „velké množství nul“. V ten okamžik se výpočet determinantu výrazně urychlí. Nicméně tato pravidla mají obecnou platnost.

**Příklad:** Vypočítejte determinant matice  $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

**Řešení:** Vzhledem k tomu, že se jedná o determinant čtvrtého stupně, nemůžeme použít Sarrusovo pravidlo. To bychom mohli použít až na determinanty třetího stupně, které vzniknou po rozvoji determinantu dané matice např. podle prvního sloupce:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} = \\ & = a_{11}A_{11}^+(-1)^{1+1} + a_{21}A_{21}^+(-1)^{2+1} + a_{31}A_{31}^+(-1)^{3+1} + a_{41}A_{41}^+(-1)^{4+1} = \\ & = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \\ & = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \text{(nyní použijeme Sarrusovo pravidlo)} \\ & = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \\ & = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \\ & = 3[(-1) \cdot (-3) \cdot (-2) + 5 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 0 - ((-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 \cdot 5)] - \\ & - [2 \cdot (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 0 - ((-1) \cdot (-3) \cdot 2 + 0 \cdot 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 \cdot (-1))] + \\ & + [2 \cdot 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot (-3) - (2 \cdot 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1))] = \\ & = 3(-16+17) - (14-10) + (24-16) = 3-4+8 = 7 \end{aligned}$$

### 2.4.3 Použití determinantů

Význam determinantů spočívá v jejich použití při řešení soustavy rovnic. Kromě Gaussovy eliminační metody (viz odstavec 2.3.2) je možné k řešení soustavy  $m$  rovnic o  $n$  neznámých, kde  $m = n$ , použít **Cramerovo**

**pravidlo** publikované švýcarským matematikem Gabrielem Cramerem (1704 - 1752): Platí:  $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$  pro

$i = 1, 2, \dots, n$ , kde  $\Delta$  je determinant matice soustavy lineárních rovnic (viz odstavec 2.3.2) a  $\Delta_i$  je determinant matice, kterou získáme z matice soustavy lineárních rovnic tak, že  $i$ -tý sloupec nahradíme sloupcem pravých stran soustavy lineárních rovnic.

Otázkou je, zda se jedná o velkou výhodu. Řešit např. soustavu 5 rovnic o 5 neznámých znamená při použití Cramerova pravidla vyřešit 6 determinantů pátého stupně. Možná, že Gaussovou eliminační metodou se dostaneme k výsledku dříve ... Ale to závisí na konkrétních prvcích matice - pokud jich bude „několik na správných místech“ nulových, výpočet determinantů se zjednoduší.

## 2.5 Systémy souřadnic

V matematice a ve fyzice je třeba vyšetřovat různé úlohy, které se výrazně zjednoduší, pokud si úlohu překreslíme do systému souřadnic. Podle zadání úlohy a způsobu výpočtu je možné volit z několika systémů souřadnic.

### 2.5.1 Kartézský systém souřadnic

Za název kartézského systému souřadnic je zodpovědný francouzský filosof, matematik, fyzik a fyziolog René Descartes (1596 -1650), který začal v matematice jako první hledat souvislosti mezi geometrií a algebrou. Proto byl po něm pojmenován nejjednodušší systém souřadnic. Soustava souřadnic (a nejen kartézská) slouží jednak geometrickému náhledu na danou situaci a jednak umožňuje pomocí algebraických struktur a pravidel počítat základní veličiny spojené s tímto systémem souřadnic.

Kartézská soustava souřadnic v rovině (resp. prostoru) je tvořena dvěma (resp. třemi) navzájem kolmými osami  $x$  a  $y$  (resp.  $x$ ,  $y$  a  $z$ ), které se protínají v počátku soustavy souřadnic  $O$ . Tímto způsobem je zvolena



**ortogonální (pravouhlá) soustava souřadnic**, která je speciálním případem tzv. kosohlé soustavy souřadnic, kde souřadnicové osy svírají libovolný úhel. Tento obecný případ ale probírat nebudeme, protože se používá jen ve zcela výjimečných případech.

Pomocí dvou (resp. tří) vektorů  $\vec{e}_1$  a  $\vec{e}_2$  (resp.  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  a  $\vec{e}_3$ ), které leží postupně na osách  $x$  a  $y$  (resp.  $x$ ,  $y$  a  $z$ ) zvolíme tzv. bázi kartézského systému souřadnic, tj. vektory, pomocí nichž je možné vyjádřit souřadnice jakéhokoliv bodu a vektoru v daném kartézském systému souřadnic (obšírněji je báze popsána v odstavci 2.2.2). Zvolíme-li uvažované vektory tak, aby  $\vec{e}_1 = (1; 0; 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0; 1; 0)$  a  $\vec{e}_3 = (0; 0; 1)$ , získáme tzv. **normované** vektory, tj. vektory, které mají jednotkovou velikost, tj.  $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$ .

Tímto způsobem byl vytvořen **ortonormální** (ortogonální a normovaný) systém souřadnic.

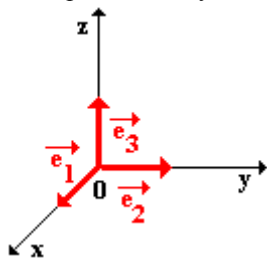
„Speciality“ kartézských souřadnic:

1. jedna z uvažovaných souřadnic je konstantní - získáme rovinu, která je kolmá k ose, jejíž souřadnice je konstantní (např. všechny body, pro něž  $z = 7$  vytvoří rovinu, která je kolmá k ose  $z$  a tuto osu protíná v bodě  $z = 7$ )
2. dvě souřadnice konstantní - získáme přímku, která je rovnoběžná s třetí osou (např. všechny body, pro které je  $x = 5$  a  $y = -2$  vytvoří přímku rovnoběžnou s osou  $z$ , která protne rovinu  $xy$  v bodě  $[5; -2]$ )

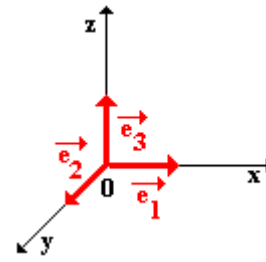
Kartézské souřadnice v třírozměrném prostoru se dále rozlišují na:

1. pravotočivé - viz obr. 2; v takovém systému souřadnic platí:  $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$
2. levotočivé - viz obr. 3; pro vektory báze  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  a  $\vec{e}_3$  platí:  $\vec{e}_3 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_1$

Rozdíl mezi pravotočivým a levotočivým kartézským systémem souřadnic se běžně příliš neprojevuje. Rozdíly se objevují v okamžiku, kdy počítáme nějaký příklad (vektory, derivace, ...) po složkách. Pravotočivý systém se většinou používá ve fyzice, levotočivý v matematice.



obr. 2



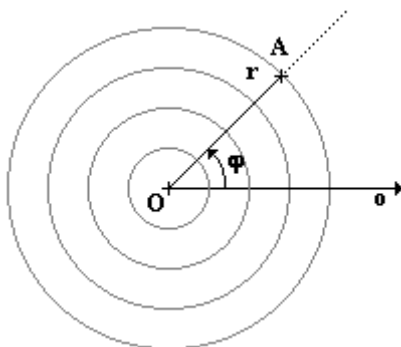
obr. 3

## 2.5.2 Polární souřadnice

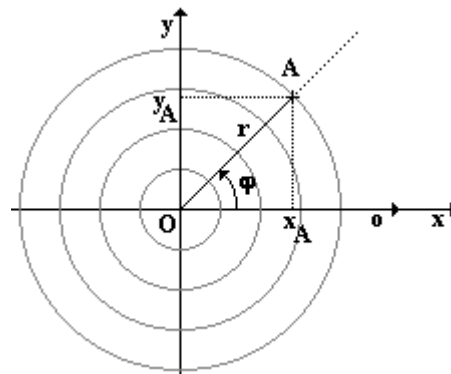
Polární souřadnice jsou souřadnice rovinné. Jsou určeny počátkem (pólem)  $O$  a polární osou  $o$ , která prochází počátkem (pólem)  $O$ . Polohu libovolného bodu  $A$  určíme v polárních souřadnicích (viz obr. 4):

1. vzdáleností  $r$  bodu  $A$  od pólu  $O$ ; jedná se o velikost vektoru  $\vec{OA}$ , který se nazývá **polohový vektor (rádius vektor, průvodič)**;  $r$  je reálné nezáporné číslo
2. základní velikostí orientovaného úhlu  $\varphi$ , který se nazývá **polární úhel (argument, amplituda)**; úhel  $\varphi$  je z intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  (otevřenost intervalu u hodnoty  $2\pi$  je z důvodu zabránění duplicitám)

Poloha bodu  $A$  je tedy dána v podstatě poloměrem kružnice se středem v bodě  $O$ , na níž bod  $A$  leží, a úhlem, který svírá v kladném směru jeho průvodič s osou  $o$ . Tímto způsobem je tedy zavedena polární soustava souřadnic  $Or\varphi$ .



obr. 4



obr. 5

„Speciality“ polárních souřadnic:

1.  $r = konst.$  - získáme body, které leží na kružnici o poloměru  $r$  se středem v počátku

2.  $\varphi = konst.$  - získáme body, které leží polopřímce procházející počátkem  $O$ , která svírá s osou  $o$  kladně orientovaný úhel  $\varphi$

Chceme-li vyjádřit polární souřadnice bodu  $A = [r; \varphi]$  v kartézské soustavě souřadnic, tj. určit  $A = [x_A; y_A]$ , je možné použít obr. 5. Z tohoto obrázku je možné určit:  $x_A = r \cos \varphi$  a  $y_A = r \sin \varphi$ .

Pro opačný převod, tj. převod z kartézské soustavy souřadnic do polární soustavy souřadnic, je možné též použít obr. 5 a právě odvozené vztahy. Z obrázku je zřejmé, že  $r = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$ , což vyplývá i ze vztahů  $x_A = r \cos \varphi$  a  $y_A = r \sin \varphi$ , které stačí dát na druhou a sečíst. Z těchto vztahů je možné podílem vyjádřit i úhel

$$\varphi: \frac{y_A}{x_A} = \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Tento vztah je třeba ale ještě okomentovat, protože funkce tangens je nespojitá a pro některé hodnoty je nedefinovaná:

1.  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y_A}{x_A}$  pro  $x_A > 0$  a  $y_A > 0$
2.  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  pro  $x_A = 0$  a  $y_A > 0$
3.  $\varphi = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y_A}{x_A}$  pro  $x_A < 0$  a  $y_A \in \mathbb{R}$
4.  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$  pro  $x_A = 0$  a  $y_A < 0$
5.  $\varphi = 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{y_A}{x_A}$  pro  $x_A > 0$  a  $y_A < 0$

Právě uvedený rozpis není nutné si pamatovat, stačí jen přemýšlet a vědět, že hodnota úhlu  $\varphi$  je z intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$ .

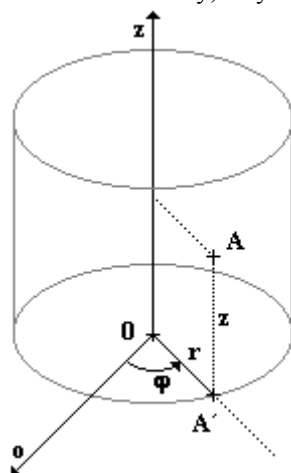
### 2.5.3 Cylindrické (válcové) souřadnice

V odstavci 2.5.2 byly popsány polární souřadnice v rovině. Jejich třírozměrnou analogií jsou souřadnice cylindrické (válcové). K rovině, v níž jsou zavedeny polární souřadnice, vedeme kolmici  $z$  počátkem (pólem) polárních souřadnic  $O$  (viz obr. 6). Polární souřadnice  $r$  a  $\varphi$  pak jsou souřadnicemi průmětu  $A'$  daného bodu  $A$  do roviny, v níž jsou polární souřadnice zavedeny. Tímto způsobem je tedy zavedena cylindrická (válcová) soustava souřadnic  $Or\varphi z$ .

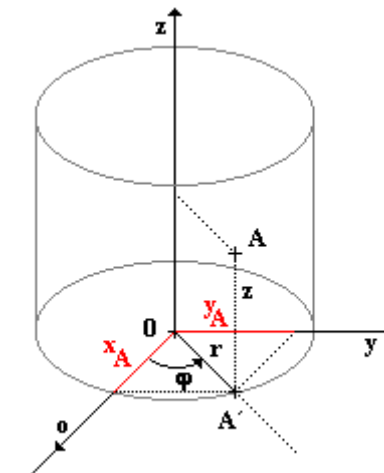
„Speciality“ cylindrických souřadnic:

1.  $r = konst.$  - získáme body, které leží na rotačních válcových plochách se společnou osou  $z$
2.  $\varphi = konst.$  - získáme body, které leží v polorovinách, jejichž hraničními přímkami je osa  $z$
3.  $z = konst.$  - získáme body, které leží v rovinách kolmých k ose  $z$

Chceme-li nyní vyjádřit souřadnice bodu  $A = [r; \varphi; z]$  v kartézské soustavě souřadnic, tj. určit  $A = [x; y; z]$  je možné postupovat podle obrázku obr. 7. Z obrázku je vidět, že pro  $x$ -ovou a  $y$ -ovou souřadnice libovolného bodu, jehož souřadnice jsou udány pomocí cylindrického systému souřadnic, platí:  $x = r \cos \varphi$  a  $y = r \sin \varphi$ . Tedy naprosto totéž, jako pro převod souřadnic polárních na kartézské (viz odstavce 2.5.2). Třetí souřadnice zůstává beze změny, tedy  $z = z$ .



obr. 6



obr. 7

Pro inverzní převod, tj. převod souřadnic kartézských na souřadnice cylindrické, je situace opět podobná jako v odstavci 2.5.2. Pro libovolný bod, jehož souřadnice v kartézské soustavě souřadnic jsou  $A = [x; y; z]$  po převodu do cylindrických souřadnic platí:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$  a tedy  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  a  $z = z$ . Diskuse pro úhel  $\varphi$  je uvedena v odstavci 2.5.2. Když si ale uvědomíme definiční obor úhlu  $\varphi$  a vlastnosti funkce tangens, je možné všechny případy (znaménka souřadnic  $x$ ,  $y$  a nulovost souřadnice  $x$ ) dát dohromady bez jakýchkoliv problémů.

V případě, že by kartézský systém byl levotočivý, vymění se  $x$ -ové a  $y$ -ové souřadnice.

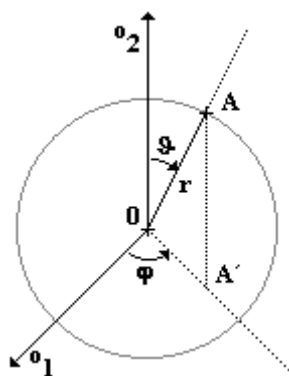
## 2.5.4 Sférické (kulové) souřadnice

Sférické (kulové) souřadnice je možné zavést následujícím způsobem. V prostoru zvolíme rovinu a v ní bod  $O$ , který bude počátkem sférické soustavy souřadnic. Bodem  $O$  pak v této zvolené rovině vedeme polopřímku  $o_1$ . Dále vedeme bodem  $O$  přímku  $o_2$  kolmo ke zvolené rovině. Polohu libovolného bodu  $A$  v této soustavě souřadnic určíme (viz obr. 8):

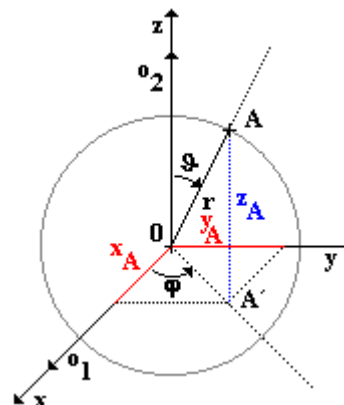
1. vzdáleností  $r$  bodu  $A$  od počátku  $O$  soustavy souřadnic; jedná se o velikost vektoru  $\overline{OA}$ , který se nazývá **polohový vektor (radius vektor, průvodič)**;  $r$  je reálné nezáporné číslo
2. velikostí orientovaného úhlu  $\varphi$ , který svírá polopřímka  $o_1$  s polopřímkou  $OA'$ , kde  $A'$  je průmět bodu  $A$  do zvolené roviny; úhel  $\varphi$  je z intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  (otevřenost intervalu u hodnoty  $2\pi$  je z důvodu zabránění duplicitám)
3. velikostí orientovaného úhlu  $\vartheta$ , který svírá polopřímka  $OA$  s přímkou  $o_2$ ; úhel  $\vartheta$  je z intervalu  $\langle 0; \pi \rangle$

„Speciality“ sférických souřadnic:

1.  $r = \text{konst.}$  - získáme body, které leží na soustředných kulových plochách se středem v počátku  $O$
2.  $\varphi = \text{konst.}$  - získáme body, které leží v polorovinách, jejichž hraničními přímkami je přímka  $o_2$
3.  $\vartheta = \text{konst.}$  - získáme body, které leží na rotačních kuželových plochách s vrcholem v počátku  $O$  a s osou splývající s přímkou  $o_2$



obr. 8



obr. 9

Chceme-li nyní vyjádřit souřadnice bodu  $A = [r; \varphi; \vartheta]$  v kartézské soustavě souřadnic, tj. určit  $A = [x; y; z]$ , je možné postupovat podle obr. 9. Z tohoto obrázku je možné určit  $x$ -ovou,  $y$ -ovou a  $z$ -ovou souřadnici libovolného bodu. Nejprve je třeba určit vzdálenost počátku  $O$  sférických souřadnic od průmětu daného bodu do roviny polárních souřadnic, tj. do roviny  $xy$  (na obrázku se jedná o průmět bodu  $A$  - bod  $A'$ ). Tato vzdálenost je  $|OA'| = |OA| \sin \vartheta = r \sin \vartheta$ . Nyní je možné již určit  $x$ -ovou souřadnici daného bodu:  $x = |OA'| \cos \varphi = r \sin \vartheta \cos \varphi$ . Analogicky pro  $y$ -ovou souřadnici dostáváme:  $y = |OA'| \sin \varphi = r \sin \vartheta \sin \varphi$ . Souřadnice  $z$  je nejjednodušší:  $z = r \cos \vartheta$ .

Zpětný převod, tj. převod ze souřadnic kartézských do sférických vyplývá rovněž z obr. 9. Platí:  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Úhel  $\varphi$  z intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  lze určit na základě platnosti těchto dvou vztahů:

$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  a  $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . Konečně pro úhel  $\vartheta$  z intervalu  $\langle 0; \pi \rangle$  platí následující podmínky,

z nichž je možné úhel  $\vartheta$  určit:  $\sin \vartheta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ,  $\cos \vartheta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  a

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

V případě, že by kartézský systém byl levotočivý, zamění se  $x$ -ové a  $y$ -ové souřadnice.

## 2.6 Transformace kartézského systému souřadnic

Nejběžněji používaným systémem souřadnic a nejjednodušším na výpočty je kartézský systém souřadnic (viz odstavec 2.5.1). Někdy je též účelné systém souřadnic transformovat tak, aby lépe vyhovoval řešení dané úlohy. Výklad provedeme pouze pro kartézský systém souřadnic. Ten je možné transformovat:

1. **posunutím** - posunutím celého systému souřadnic tak, že počátek soustavy souřadnic přejde do bodu o souřadnicích  $[x_0; y_0]$
2. **otočením** - otočení kolem daného bodu (v nejjednodušším případě kolem počátku kartézského systému souřadnic) o úhel  $\alpha$

### 2.6.1 Kartézský systém souřadnic v rovině

Kartézský systém souřadnic v rovině je dán dvěma navzájem kolmými osami  $x$  a  $y$  a počátkem  $O$ : hovoříme o kartézském systému souřadnic  $Oxy$ .

#### 2.6.1.1 Posunutí

Při posunutí přechází kartézský systém souřadnic  $Oxy$  na systém souřadnic  $Ox'y'$  jak je ukázáno na obr. 10.

Při přechodu od kartézského systému  $Ox'y'$  ke kartézskému systému  $Oxy$  platí následující transformační vztahy:  $x = x' + x_0$  a  $y = y' + y_0$ .

Při přechodu od nečárkovaného systému k čárkovanému systému platí vztahy, které z předchozích získáme jednoduchou matematickou úpravou:  $x' = x - x_0$  a  $y' = y - y_0$ .

Bod o souřadnicích  $[x_0; y_0]$  (v nečárkovaném systému souřadnic) určuje bod, do kterého se posunul počátek čárkovaného systému souřadnic.

S využitím maticového počtu (viz odstavec 2.3) je možné výše uvedené transformační vztahy vyjádřit takto:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  resp.  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

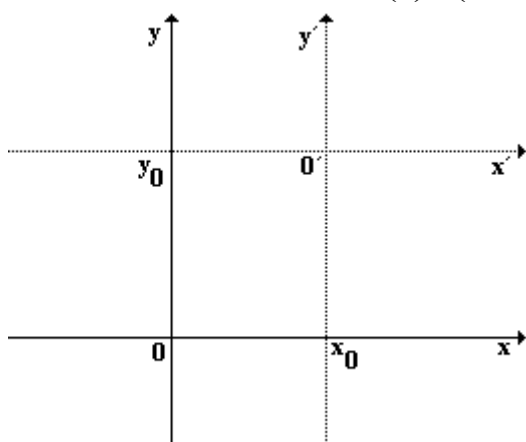
#### 2.6.1.2 Otočení

Otočení kartézského systému souřadnic kolem daného bodu je operace složitější. Nicméně i zde platí relativně jednoduché vztahy, které je možné odvodit z obr. 11.

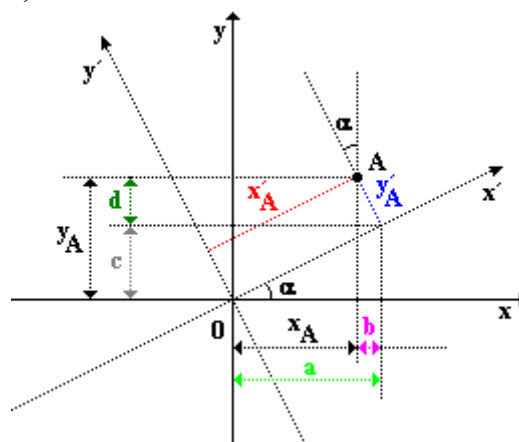
Bod  $A$  má v čárkované soustavě souřadnic (tj. v té, která byla oproti nečárkované soustavě otočena o úhel  $\alpha$  v kladném smyslu) souřadnice  $A = [x'_A; y'_A]$ , Tentýž bod má v nečárkované (původní) soustavě souřadnic souřadnice  $A = [x_A; y_A]$ . Z obr. 11 je vidět, že pro  $x$ -ové souřadnice platí:  $x_A = a - b = x'_A \cos \alpha - y'_A \sin \alpha$ . Analogicky pro  $y$ -ové souřadnice lze psát:  $y_A = c + d = x'_A \sin \alpha + y'_A \cos \alpha$ .

Je tedy možné napsat transformační rovnice při přechodu od čárkované soustavě souřadnic k nečárkované:  $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$  a  $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$ . Tyto transformační rovnice je možné zapsat

s využitím matic (viz odstavec 2.3):  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .



obr. 10



obr. 11

Matrice, která vystupuje v právě zformulovaném zápisu, tj. matice  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  bývá v algebře

nazývána **matice přechodu** od jedné soustavy souřadnic k jiné. Ve skutečnosti se jedná o matici přechodu od jedné báze k bázi druhé, ale v tomto speciálním případě je možné hovořit jen o souřadnicích. Není to zcela přesné, ale postačující. Podrobněji je o bázích pojednáno v odstavci 2.2.2.

Při hledání inverzní transformace (tedy transformaci, která odpovídá přechodu od nečárkovaných k čárkovaným souřadnicím) je možné postupovat trojím způsobem:

1. zopakovat právě provedené odvození s drobnějšími úpravami
2. využít maticového zápisu transformačního vztahu a k matici přechodu najít matici inverzní
3. při záměně souřadnic  $x$  a  $y$  za souřadnice  $x'$  a  $y'$  nahradit úhel  $\alpha$  úhlem  $-\alpha$  a uvědomit si, že funkce sinus je lichá, zatímco funkce kosinus sudá

Vzhledem k tomu, že odvozování z obrázku by bylo hodně podobné, jako odvození ukázané, a záměna úhlu za úhel opačný je velmi triviální, použijeme druhý způsob: najdeme inverzní matici k matici  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  s využitím znalostí z odstavce 2.3.1. Tento způsob volíme proto, abychom si uvědomili použitelnost inverzních matic a zopakovali si jejich výpočet.

**Příklad:** Najděte inverzní matici k matici  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .

**Řešení:** Použijeme metodu pomocí jednotkové matice:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|cc} \cos \alpha & -\sin \alpha & 1 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 1 \end{array} \right) &\approx \left( \begin{array}{cc|cc} \cos \alpha & -\sin \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{cc|cc} \cos \alpha & -\sin \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right) \approx \\ &\approx \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -\sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 1 & 0 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -\sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 0 & 1 - \sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -\sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 0 & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \end{array} \right) \approx \\ &\approx \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -\sin \alpha & \cos \alpha \\ 1 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 1 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right). \text{ Tedy inverzní matice k matici } \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ je matice} \\ &\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní je možné napsat transformační rovnici pro přechod od nečárkovaných souřadnic k čárkovaným:  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Zjistit, jak budou vypadat rovnice pro  $x'$  a  $y'$  je již triviální - stačí provést naznačené násobení dvou matic a dostaneme:  $x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$  a  $y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$ .

Následující příklad ukazuje, kde je možné se s tímto typem transformace soustavy souřadnic setkat.

**Příklad:** Napište obecnou rovnici elipsy, která má tyto vlastnosti: střed elipsy je v počátku soustavy souřadnic, její hlavní osa svírá s osou  $x$  úhel  $30^\circ$ , délka hlavní poloosy je 5 a délka vedlejší poloosy je 3.

**Řešení:** Než napíšeme obecnou rovnici elipsy v souřadnicích  $x$  a  $y$ , nejprve vyřešíme jednodušší úlohu: napíšeme rovnici elipsy v souřadnicích  $x'$  a  $y'$ , přičemž osa  $x'$  svírá s osou  $x$  požadovaný úhel  $30^\circ$ . Jinými slovy: v soustavě souřadnic  $Ox'y'$  leží hlavní poloosa v ose  $x'$ . Takovou elipsu ale není problém popsat obecnou rovnicí. Vyjdeme z rovnice středové, kterou pak upravíme na obecný tvar:  $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ . Tuto rovnici upravíme na tvar  $b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2$  a všechny členy převedeme na levou stranu rovnice  $b^2 x'^2 + a^2 y'^2 - a^2 b^2 = 0$ . Po dosazení:  $9x'^2 + 25y'^2 - 225 = 0$ .

Nyní chceme napsat rovnici této elipsy v soustavě  $Oxy$ . K tomu budeme potřebovat transformační vztahy  $x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$  a  $y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$ . Ty nyní dosadíme do odvozené rovnice elipsy:

$$b^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + a^2 (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 - a^2 b^2 = 0 \text{ a postupnými úpravami získáme:}$$

$$b^2 x^2 \cos^2 \alpha + 2b^2 xy \sin \alpha \cos \alpha + b^2 y^2 \sin^2 \alpha + a^2 x^2 \sin^2 \alpha - 2a^2 xy \sin \alpha \cos \alpha + a^2 y^2 \cos^2 \alpha - a^2 b^2 = 0$$

$$x^2 (b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha) + y^2 (b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha) + 2xy (b^2 - a^2) \sin \alpha \cos \alpha - a^2 b^2 = 0.$$

Už nyní je vidět, že v obecné rovnici elipsy přibyl navíc člen, který obsahuje součin  $xy$ . Po dosazení hodnot ze zadání dostaneme:

$$x^2 (9 \cos^2 30^\circ + 25 \sin^2 30^\circ) + y^2 (9 \sin^2 30^\circ + 25 \cos^2 30^\circ) + 2xy (9 - 25) \sin 30^\circ \cos 30^\circ - 225 = 0$$

$$x^2 \left( 9 \cdot \frac{3}{4} + 25 \cdot \frac{1}{4} \right) + y^2 \left( 9 \cdot \frac{1}{4} + 25 \cdot \frac{3}{4} \right) + 2xy (9 - 25) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 225 = 0$$

$$52x^2 + 84y^2 - 32\sqrt{3}xy - 900 = 0$$

$$13x^2 + 21y^2 - 8\sqrt{3}xy - 225 = 0.$$

Obecná rovnice elipsy, která vyhovuje zadání, má tedy tvar  $13x^2 + 21y^2 - 8\sqrt{3}xy - 225 = 0$ .

**2.6.1.3 Posunutí a otočení**

Transformace uvedené v odstavcích 2.6.1.1 a 2.6.1.2 je možné kombinovat. Složená transformace nemusí být obecně komutativní, nicméně je možné odvodit transformační vztahy v konkrétním případě na základě pořadí skládání transformací.

V případě použití maticového zápisu pro otočení, je možné vztahy odvozovat velice lehce. Je třeba jen dávat pozor na prováděné matematické operace a na pořadí jednotlivých transformací:

$$1. \text{ posunutí a pak otočení: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \text{resp.}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ otočení a pak posunutí: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' + x_0 \\ y' + y_0 \end{pmatrix} \quad \text{resp.}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

**2.6.2 Kartézský systém souřadnic v 3D prostoru**

Kartézský systém souřadnic v prostoru je dán třemi navzájem kolmými osami  $x$ ,  $y$  a  $z$ , které se protínají v jednom bodě - tzv. počátku  $O$ : hovoříme o kartézském systému souřadnic  $Oxyz$ .

**2.6.2.1 Posunutí**

Při posunutí přechází kartézský systém souřadnic  $Oxyz$  na systém souřadnic  $Ox'y'z'$ . Situace je analogická jako při posunutí kartézského systému souřadnic v rovině (viz odstavec 2.6.1.1).

Při přechodu od kartézského systému  $Ox'y'z'$  ke kartézskému systému  $Oxyz$  platí následující transformační vztahy:  $x = x' + x_0$ ,  $y = y' + y_0$  a  $z = z' + z_0$ .

Při přechodu od nečárkovaného systému k čárkovanému systému platí vztahy, které z předchozích získáme jednoduchou matematickou úpravou:  $x' = x - x_0$ ,  $y' = y - y_0$  a  $z' = z - z_0$ .

Bod o souřadnicích  $[x_0; y_0; z_0]$  (v nečárkovaném systému souřadnic) určuje bod, do kterého se posunul počátek čárkovaného systému souřadnic.

S využitím matic (podrobněji o maticích je pojednáno v odstavci 2.3) je možné právě uvedené transformační vztahy vyjádřit takto:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  resp.  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ .

**2.6.2.2 Otočení**

Otočení kartézské soustavy  $Oxyz$ , při kterém přejde na soustavu  $Ox'y'z'$ , je náročné na představu i na správné zakreslení. Proto vztahy, které toto otočení popisují nebudeme odvozovat, ale pouze napíšeme jejich výslednou podobu.

Při přechodu od kartézského systému  $Ox'y'z'$  ke kartézskému systému  $Oxyz$  resp. od kartézského systému  $Oxyz$  ke kartézskému systému  $Ox'y'z'$ , platí následující transformační vztahy:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 & \text{resp.} & & x' &= x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 \\ y &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3 & & & y' &= x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 \\ z &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3 & & & z' &= x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3, \end{aligned}$$

kde

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  jsou velikosti úhlů, které svírá kladná poloosa  $x'$  s kladnými poloosami  $x, y, z$ ;

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  jsou velikosti úhlů, které svírá kladná poloosa  $y'$  s kladnými poloosami  $x, y, z$ ;

$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  jsou velikosti úhlů, které svírá kladná poloosa  $z'$  s kladnými poloosami  $x, y, z$ .

Hodnoty uvedených devíti úhlů nejsou samozřejmě nezávislé. Platí následující vztahy (další je možné získat cyklickou záměnou):

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 &= 1 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 &= 0 \\ \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 &= 1 & \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 &= 0 \end{aligned}$$

S využitím maticového počtu (o kterém je detailně pojednáno v odstavci 2.3) je možné právě uvedené transformační vztahy přepsat ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Tato transformace je nesmírně důležitá pro zavedení tenzorů.

## 2.7 Matematické vyjadřování a zanedbávání

### 2.7.1 Matematické vyjádření slovního projevu

Ve fyzice se většina zákonů, které popisují určité jevy, vyjadřuje pomocí matematického zápisu (vztahu). U některých zákonů nebude třeba důležité přesné znění vztahu (nebo přesné znění je natolik matematicky komplikované a náročné na složitější partie matematiky, že není možné je zde uvést), ale bude zajímavé uvědomit si, na čem zkoumaná veličina závisí. Proto je dobré seznámit se s následujícími formulacemi:

1. veličina  $a$  závisí přímo úměrně na veličině  $b$  ( $a$  je přímo úměrné  $b$ ) - znamená, že s tím, jak roste (lineárně) veličina  $b$ , roste také lineárně  $a$ . Skutečnost, že veličina  $a$  je přímo úměrná veličině  $b$ , je možné zapsat tímto zápisem:  $a \approx b$  (např. obvod čtverce je přímo úměrný délce jeho strany - čím delší je strana čtverce, tím je větší i jeho obvod; ...).
2. veličina  $a$  je nepřímo úměrná veličině  $b$  - znamená, že s rostoucím  $b$   $a$  klesá (nebo naopak), čili čím větší  $b$ , tím menší  $a$ . Jako příklad lze uvést skupinu dělníků, kteří mají postavit dům: čím více bude dělníků, tím menší čas budou potřebovat na stavbu domu.
3. konstantou úměrnosti mezi veličinou  $a$  a  $b$  je  $k$  - znamená, že veličinu  $a$  lze zapsat takto:  $a = kb$  (např. konstantou úměrnosti mezi obvodem kruhu a jeho průměrem je  $\pi$ , ...).
4. veličina  $a$  je úměrná čtverci (druhé mocnině) veličiny  $b$  - znamená, že roste-li veličina  $b$  lineárně, roste veličina  $a$  jako druhá mocnina. Veličinu  $a$  lze v tomto případě zapsat zápisem:  $a = kb^2$  (např. obsah kruhu je úměrný druhé mocnině poloměru s konstantou úměrnosti  $\pi$ , ...).
5. veličina  $a$  je úměrná  $n$ -té mocnině veličiny  $b$  - lze chápat tak, že roste-li veličina  $b$  lineárně, roste veličina  $a$  jako  $n$ -tá mocnina. Zápis veličiny  $a$ :  $a \approx b^n$  nebo  $a = kb^n$ . Přírodní zákony světa, v němž žijeme, jsou takové, že jen malá část veličin závisí na větší mocnině než 2 resp. 3.

### 2.7.2 Přibližné vztahy aneb co lze zanedbat

Ve fyzice se často postupuje tak, že z jednoho vztahu (který je matematickým vyjádřením určitého fyzikálního zákona) se na základě dalšího zkoumání příslušného jevu odvozují vztahy, které popisují složitější vlastnosti daného jevu. Při odvozování některých závislostí se občas stane, že některé veličiny jsou natolik malé, že výsledek ovlivní velice nepatrně. Takové veličiny pak můžeme zanedbat a výpočet (i příslušný vzorec) si tak zjednodušit. Je ovšem nutno přihlížet, ne k tomu, jak je zanedbávaná veličina velká (resp. malá), ale k tomu, jak je velká (resp. malá) **vzhledem** k jiné veličině (konstantě).

Přibližné vztahy, které mnohdy usnadní výpočet, uvádíme spolu s jejich odvozením. Všechny uvedené vztahy platí pro  $|\varepsilon| \ll 1$ :

$$\begin{aligned} (1 \pm \varepsilon)^2 &= 1 \pm 2\varepsilon + \varepsilon^2 \doteq 1 \pm 2\varepsilon \\ \frac{1}{1 \pm \varepsilon} &= \frac{1}{1 \pm \varepsilon} \cdot \frac{1 \mp \varepsilon}{1 \mp \varepsilon} = \frac{1 \mp \varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \doteq \frac{1 \mp \varepsilon}{1} = 1 \mp \varepsilon \\ \sqrt{1 \pm \varepsilon} &\doteq \sqrt{1 \pm \varepsilon + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(1 \pm \frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \left|1 \pm \frac{\varepsilon}{2}\right| \end{aligned}$$

### 2.7.3 Zjednodušení matematických výrazů

V matematice (a hlavně pak v jejích aplikacích jako je fyzika, elektrotechnika, ...) se často používají následující zjednodušení matematických zápisů.

#### 2.7.3.1 Kroneckerův symbol

Pro zkrácení některých typů zápisů se používá tzv. Kroneckerův symbol  $\delta_{ij}$ , který je definován takto:

1.  $\delta_{ij} = 0$ , jestliže  $i \neq j$
2.  $\delta_{ij} = 1$ , jestliže  $i = j$

**Příklad:** V kartézské soustavě souřadnic jsou dány tři vektory:  $\vec{e}_1 = (1; 0; 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0; 1; 0)$  a  $\vec{e}_3 = (0; 0; 1)$ . Určete skalární součin libovolných dvou těchto vektorů.

**Řešení:** Podle zadání vektorů je zřejmé, že se jedná o vektory, které leží postupně na osách  $x$ ,  $y$  a  $z$  kartézského systému souřadnic a jejichž velikost je 1. Uvažované vektory jsou tedy vzájemně kolmé (a tím pádem lineárně nezávislé), takže tvoří bázi kartézské soustavy souřadnic (o bázi podrobněji v odstavci 2.2.2). Pro jejich skalární součin bude platit: skalární součin dvou stejných vektorů (podle definice z odstavce 2.8.1) bude 1, zatímco skalární součin dvou různých vektorů bude nulový (vektory jsou vzájemně kolmé). To je možné pomocí právě zavedeného symbolu zapsat takto:  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ .

Právě uvedený příklad byl poměrně jednoduchý, nicméně v řadě situací Kroneckerův symbol značně ulehčí zápis.

Kroneckerův symbol je vlastně jednotkový tenzor druhého řádu (viz detailně odstavec 6.3.3).

### 2.7.3.2 Levi-Civítův symbol

Jedná se o další symbol, který (stejně jako Kroneckerovo delta - viz odstavec 2.7.3.1) může řadu příkladů zjednodušit. Vzhledem k tomu, že se opět (jako u Kroneckerova delta) jedná o tenzor, je tento symbol (tenzor) vysvětlen až v odstavci 6.4.

### 2.7.3.3 Einsteinovo sumační pravidlo

Dříve než přistoupíme k vysvětlení Einsteinova sumačního pravidla, je třeba se zmínit o sumě a vysvětlit její matematické použití.

Pojem „suma“ (jak nabízí i praktické používání tohoto slova - zejména ve spojení s financemi) se týká součtu. Konkrétně pomocí sumy je možné zkrátit zápis některých výrazů:

1. Součet všech přirozených čísel od jedné do sta. Místo standardního zápisu  $1+2+3+\dots+100$

můžeme použít zápis pomocí sumy:  $\sum_{i=1}^{100} i$ , který čteme „suma  $i$  pro  $i$  od jedné do sta“.

2. Definice skalárního součinu dvou vektorů  $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$  a  $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$  lze místo zápisu

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$  zjednodušit zápisem  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$ , který se čte: „suma  $u_i v_i$  pro  $i$  od jedné do tří“.

...

Už samo použití sumačního znaménka je výrazným zkráceným zápisu daného matematického výrazu. Albert Einstein přišel s dalším zjednodušením. Ve fyzice se většinou pracuje v třírozměrném kartézském systému souřadnic a proto se tedy často vyskytuje zápis, v němž vystupují výrazy  $\sum_{i=1}^3 x_{ii}$ ,  $\vec{e}_i$  pro  $i = 1, 2, 3, \dots$

Proto zavedl Einstein následující pravidla, která se souhrnně označují jako Einsteinovo sumační pravidlo:

1. každý index, který se v jednočlenu příslušného výrazu vyskytuje pouze **jednou**, může nabývat hodnot 1, 2, 3; př. výrazem  $x_i$  se rozumí trojice  $x_1, x_2, x_3$ ; zápisem  $x_{ij}$  se rozumí skupina veličin  $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}; \dots$
2. vyskytne-li se v jednočlenu výrazu týž index **dvakrát**, rozumí se tím sčítání od 1 do 3; př.

výrazem  $x_{ii}$  se rozumí zápis  $\sum_{i=1}^3 x_{ii} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$ ; zápisem  $x_i y^i z_k$  se rozumí výraz

$$\sum_{i=1}^3 x_i y^i z_k = z_k \sum_{i=1}^3 x_i y^i = z_k (x_1 y^1 + x_2 y^2 + x_3 y^3); \dots$$

## 2.8 Součiny s vektory; pravidlo pravé ruky

Ve fyzice se používají i vektorové fyzikální veličiny. V rámci běžného studia fyziky se skutečnost, že daná fyzikální veličina je vektorová, projeví v jejím zobrazení („úsečka se šipkou“), v možnosti získání záporného výsledku při počítání (to pak znamená, že byla nakreslena opačně, než vyžadovala situace), ... (Skoro) nikdy se ale nevyužívá tento vektor při odvozování dalších různých vztahů. Důvodem je, že fyzika (i v tomto ohledu) předbíhá matematiku. Takže ve fyzice „se to okecá“ a teprve až průhled do matematiky ukáže zajímavé souvislosti.

Nezbytným předpokladem práce s vektory kromě základních operací jako je součet, rozdíl, násobek skalárním číslem a rozklad do dvou daných směrů je i znalost skalárního a vektorového součinu.

### 2.8.1 Skalární součin

**SKALÁRNÍ SOUČIN  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  DVOU NENULOVÝCH VEKTORŮ  $\vec{u}$  A  $\vec{v}$  JE REÁLNÉ ČÍSLO  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \varphi$ , KDE  $\varphi$  JE ÚHEL SEVŘENÝ UVAŽOVANÝMI VEKTORY. JE-LI ALESPŇ JEDEN Z VEKTORŮ NULOVÝ, DEFINUJEME  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .**

Jsou-li vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  definované v rovině a mají-li souřadnice  $\vec{u} = (u_x; u_y)$  a  $\vec{v} = (v_x; v_y)$ , je možné skalární součin těchto dvou vektorů vyjádřit ve tvaru  $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$ .

Analogická je situace i pro dva vektory v prostoru - jen se přidá další souřadnice. Vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  pak mají souřadnice  $\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$  a  $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$  a jejich skalární součin je možné vyjádřit ve tvaru  $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$ .

Na základě definičního vztahu skalárního součinu je možné i určovat kolmost dvou nenulových vektorů. Skalární součin dvou vektorů je nulový v těchto případech:

1. alespoň jeden z vektorů je nulový (tj. alespoň jeden z vektorů má velikost 0)



2.  $\cos \varphi = 0$  - to ale znamená, že  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (vzhledem k tomu, že se jedná o úhel dvou vektorů nemá smysl uvažovat další řešení, protože úhel sevřený dvěma vektory leží v intervalu  $\langle 0; \pi \rangle$ )

Budou-li tedy dva vektory nenulové a přesto jejich skalární součin bude roven nule, znamená to jedno jedině: uvažované vektory svírají úhel  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , tj. jsou vzájemně kolmé.

## 2.8.2 Vektorový součin

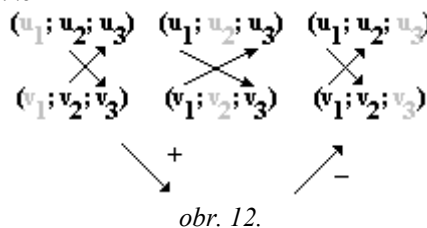
Nejen v analytické geometrii v prostoru, ale i ve fyzice je často potřeba najít vektor  $\vec{w}$ , který by byl kolmý ke dvěma vektorům  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  v prostoru, které neleží na jedné přímce (tj. jsou lineárně nezávislé). Přitom vektor  $\vec{u}$  má souřadnice  $\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$  a vektor  $\vec{v}$  souřadnice  $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$ . Vektor kolmý k oběma vektorům je možné určit pomocí skalárního součinu. Skalární součin vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{w}$  musí být v tom případě nulový, stejně tak skalární součin vektorů  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$ . Musí tedy platit:  $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$  a zároveň  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ . Má-li vektor  $\vec{w}$  souřadnice  $\vec{w} = (w_x; w_y; w_z)$ , je možné skalární součiny rozepsat takto:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = 0 \\ v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_x u_x w_x + v_x u_y w_y + v_x u_z w_z = 0 \\ -u_x v_x w_x - u_x v_y w_y - u_x v_z w_z = 0 \end{array} \right\} \oplus \Rightarrow w_y (u_y v_x - u_x v_y) + w_z (u_z v_x - u_x v_z) = 0.$$

Poslední rovnice (o dvou neznámých  $w_y$  a  $w_z$  je splněna, např. pokud  $w_y = u_z v_x - u_x v_z$  a  $w_z = -u_y v_x + u_x v_y$ . Dosazením do rovnice  $u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = 0$  je možné určit  $w_x$  takto:  $w_x = u_y v_z - u_z v_y$ .

Hledaný vektor  $\vec{w}$  má tedy souřadnice:  $\vec{w} = (u_y v_z - u_z v_y; u_z v_x - u_x v_z; u_x v_y - u_y v_x)$ .

**Poznámka:** Jak určit souřadnice vektorového součinu, je možné si pamatovat podle následující pomůcky dle obr. 12. První souřadnici získáme na základě druhých a třetích souřadnic vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ , druhou na základě prvních a třetích a třetí na základě prvních a druhých. Vynásobíme souřadnice, které jsou spojené šipkou zleva doprava a od tohoto součtu odečteme součin souřadnic spojených šipkou zprava doleva. Pouze u druhé souřadnice výsledného vektoru změním znaménko



obr. 12.

Vektorový součin dvou vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  neležících na přímce je vektor  $\vec{w}$ , který má tyto vlastnosti:

1. vektor  $\vec{w}$  je kolmý k oběma vektorům  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$
2. směr vektoru  $\vec{w}$  je možné určit podle **pravidla pravé ruky**: Položíme-li pravou ruku do roviny, v níž leží vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  tak, že pokrčené prsty této ruky ukazují směr otáčení, které převede vektor  $\vec{u}$  na vektor  $\vec{v}$  (v nejkratším směru, tj. vnitřkem konvexního úhlu, který vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  svírají), ukáže vztyčený palec směr výsledného vektoru  $\vec{w}$ . Další podrobnosti o pravidlu pravé ruky viz odstavec 2.8.3.
3. pro velikost vektoru  $\vec{w}$  platí:  $|\vec{w}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \alpha$ , kde  $\alpha$  je úhel vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$
4. velikost vektorového součinu dvou vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  je číselně rovna obsahu rovnoběžníka určeného vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ . Pokud totiž bude jedna strana rovnoběžníka dána např. vektorem  $\vec{u}$ , pak výraz  $|\vec{v}| \sin \alpha$  udává délku výšky na stranu  $\vec{u}$ . (Analogické je vysvětlení i pro případ záměny vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ .)

Vektorový součin  $\vec{w}$  vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  se značí  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ .

Při zjišťování vektorového součinu dvou vektorů (jak souřadnic, tak směru pomocí pravidla pravé ruky), je třeba dávat pozor na pořadí vektorů. Vektorový součin totiž **není komutativní**. Platí:  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ .

Vektorový součin  $\vec{w}$  dvou vektorů  $\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$  a  $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$  lze vyjádřit též pomocí

determinantu matice (viz odstavec 2.4):  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$ , kde  $\vec{i}$  je jednotkový vektor ve směru osy  $x$ ,  $\vec{j}$

je jednotkový vektor ve směru osy  $y$  a  $\vec{k}$  je jednotkový vektor ve směru osy  $z$ .

### 2.8.3 Pravidlo pravé ruky

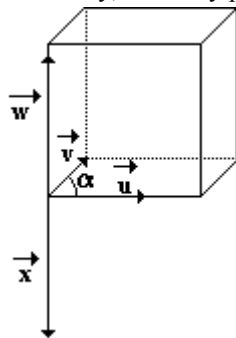
Fyzikální veličiny, u nichž potřebujeme znát kromě číselné hodnoty příslušné veličiny i jejich směr, jsou reprezentovány vektory. Vystupuje-li v jednom zákonu (rovnici) více vektorových veličin, pak se může (a nemusí) stát, že výsledná veličina bude opět vektor, a v tom případě je nutno určit její směr. U veličin (vektorů), které jsou vyjádřeny pomocí vektorového součinu (viz odstavec 2.8.2) dvou jiných vektorových fyzikálních veličin, postupujeme při určování směru veličiny výsledné podle pravidla **pravé ruky** (pravotočivého šroubu):

Naznačíme-li uchopení obou vektorů do pravé ruky tak, jako bychom prsty pravé ruky chtěli dva zadané vektory „zmáčknout“ k sobě, ukáže odtažený palec směr výsledného vektoru. (Pro správnou představu „zmáčknutí“ vektorů, je nutno si tyto vektory pomyslně posunout tak, aby měli společný počátek.)

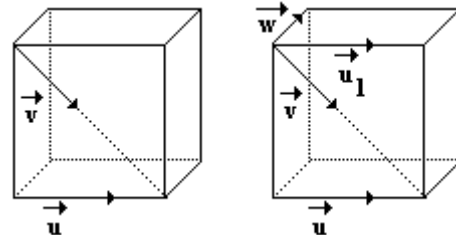
Uvažujme dva vektory (resp. dvě vektorové fyzikální veličiny)  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  z obr. 13, které definují vektor  $\vec{w}$  tímto způsobem:  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ . Provést u nich pomyslné zmáčknutí nebude těžké, neboť vektory mají společný počátek. Dostáváme tedy směr vektoru  $\vec{w}$  svisle vzhůru. V případě, že bychom uvažovali vektor  $\vec{x}$  ve tvaru  $\vec{x} = \vec{v} \times \vec{u}$ , dostaneme vektor  $\vec{x}$  v opačném směru, než je směr vektoru  $\vec{w}$  (což je v pořádku - viz vlastnosti vektorového součinu v odstavci 2.8.2).

Nyní budeme uvažovat vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  takové, které nemají společný počátek (situaci lze sledovat na obr. 14). A opět chceme určit směr vektoru  $\vec{w}$  definovaného vztahem  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ . Abychom mohli lépe aplikovat pravidlo pravé ruky, přeneseme si vektor  $\vec{u}$  do stejného počátku jako má vektor  $\vec{v}$ . Nyní již určíme opět jednoduše směr vektoru  $\vec{w}$  - pomocí pravidla pravé ruky aplikovaného na vektory  $\vec{u}_1$  a  $\vec{v}$ .

Ve fyzice se vyskytuje celá řada fyzikálních veličin, jejichž směr se určuje právě na základě pravidla pravé ruky - moment síly, směr síly působící na vodič s proudem, ...



obr. 13



obr. 14

V matematice je možné vektory libovolně posouvat jednak po vektorových přímkách, na nichž leží, ale také je přenášet na libovolné rovnoběžky. Tato druhá pomocná konstrukce má však ve fyzice jisté omezení: budeme-li chtít například vektorově sčítat dvě různoběžné síly, které nemají společné působíště, změníme posunutím jedné síly na rovnoběžku procházející počátkem druhé síly moment této síly. Pro získání směru vektoru, který je výsledkem vektorového součinu dvou vektorů, lze tuto konstrukci pomyslně provést s tím, že počátek vektoru určíme správně na základě fyzikálních znalostí s ohledem na to, o jakou fyzikální veličinu se bude konkrétně jednat.

### 2.8.4 Smíšený součin

SMÍŠENÝM SOUČINEM TŘÍ VEKTORŮ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  A  $\vec{c}$  SE ROZUMÍ SE ROZUMÍ ČÍSLO  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ .

Smíšený součin tří vektorů, které mají souřadnice  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  a  $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$ , je

možné vyjádřit takto:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ . O platnosti tohoto tvrzení je možné se přesvědčit „odzadu“, tj.

začít upravovat výsledný determinant - a to rozvojem dle prvního řádku (viz odstavec 2.4.2.2), čímž dostaneme:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$  (nyní jsme použili vlastnost determinantu, kdy při záměně dvou sloupců se mění znaménko determinantu). V úpravách pokračujeme určením determinantů druhých stupňů (viz podrobněji odstavec 2.4.1):  $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$ .

Srovnáme-li nyní výrazy v závorkách se souřadnicemi vektorového součinu vektorů  $\vec{b}$  a  $\vec{c}$  (podle definice vektorového součinu v odstavci 2.8.2) a uvědomíme si, jak je definovaný skalární součin dvou vektorů (viz odstavec 2.8.1), je jasné, že poslední výraz je možné přepsat ve tvaru  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ .

Geometrická interpretace smíšeného součinu je následující: absolutní hodnota smíšeného součinu tří vektorů  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  a  $\vec{c}$  je rovna objemu rovnoběžnostěnu, jehož tři hrany, vycházející z téhož vrcholu, jsou určeny danými vektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  a  $\vec{c}$ . Vyplývá to z geometrické interpretace vektorového součinu (viz odstavec 2.8.2): platí  $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b} \times \vec{c}| \cos \varphi$  (kde  $\varphi$  je úhel, který svírá vektor  $\vec{a}$  s vektorem  $\vec{b} \times \vec{c}$ ) a přitom  $|\vec{b} \times \vec{c}|$  je roven obsahu základny rovnoběžnostěnu a  $|\vec{a}| \cos \varphi$  je výška daného rovnoběžnostěnu.

### 2.8.5 Výrazy obsahující směsici součinů

Vzhledem k tomu, že už byl definován skalární, vektorový i smíšený součin, je možné si říci některé dodatky, které budou využity zejména v odstavci 6.6.2, v němž budou zavedeny lineární diferenciální operátory.

Nechť  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  a  $\vec{c}$  jsou tři vektory. Pro jejich „dvojitý vektorový součin“ platí:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ . Toto je ovšem jen jedna z možných variant zápisu, neboť je třeba si uvědomit, že:

1. skalární součin je komutativní - tj. kolem „tečky“ je možné libovolně prohazovat vektory
2. vektorový součin není komutativní - tj. prohození dvou vektorů kolem „křížku“ způsobí změnu znaménka daného vektorového součinu
3. násobek vektoru skalárem je komutativní - tj. prohození skaláru a vektoru kolem „ničeho“ (násobek skaláru a vektoru se píše bez tečky) je seriózní matematická operace, při níž se výsledek nezmění

Právě popsané prohazování může velmi zjednodušit složitější zápisy - zejména u lineárních diferenciálních operátorů (viz odstavec 6.6.2).

### 3. KOMPLEXNÍ ČÍSLA A KVATERNIONY

#### 3.1 Komplexní čísla

##### 3.1.1 Zavedení komplexních čísel

Komplexní čísla se pokusíme zavést tak, aby přirozeným způsobem završila vývoj číselných soustav. Jedná se vývoj číselných soustav, který je spjatý s vývojem lidské společnosti. První lidské společnosti vystačily se znalostí **čísel přirozených**, protože jediné, co potřebovaly bylo počítat dobytek, počítat úrodu (např. pomocí košů, nádob, ...). S růstem majetkových rozdílů jednotlivých jedinců lidské společnosti došlo k tomu, že někteří měli větší majetek než druzí. Ti bohatší začali ostatním půjčovat - no a pro vyjádření dluhu zcela nutně vyvstala potřeba záporných čísel - vznikla **čísla celá**. S dalším vývojem společnosti bylo zapotřebí zavést i **čísla racionální** (výpočet obsahů pozemků, výpočet daní, ...). S vývojem matematiky přišla potřeba mít čísla, která nešla vyjádřit pomocí zlomku (hodnoty goniometrických funkcí, hodnoty logaritmů, ...), a tak byla zavedena **čísla reálná**.

Shrnuto: umíme najít takový čísel obor, v němž je možné (aniž bychom se s výsledkem dostali do nějakých potíží) sčítat (čísla přirozená), odčítat (čísla celá), dělit (čísla racionální), ale zatím ne všechna čísla umíme odmocňovat (v reálných číslech umíme odmocňovat jen čísla nezáporná).

Už z právě popsaného historického vývoje je zřejmé, že „složitější“ číselný obor je vždy jakousi „nadstavbou“ oboru předešlého, tj. ve „složitějším“ číselném oboru jsou definovány všechny operace, které byly definovány v oboru „jednodušším“, ale zde jsou ještě nějaké operace navíc (viz schématicky obr. 15).



obr. 15

V algebře se všechny číselné obory zavádějí pomocí definic, ale drží se právě zmíněného pravidla - tj. nový („složitější“) číselný obor se definuje vždy na základě oboru předchozího (např. čísla racionální jako podíl dvou nesoudělných čísel celých, z nichž číslo ve jmenovateli je nenulové).

Podobným způsobem se definují i čísla komplexní, tj. pomocí čísel reálných.

**KOMPLEXNÍM ČÍSLEM SE NAZÝVÁ VÝRAZ TVARU  $a+bi$ , KDE  $a, b \in \mathbb{R}$  A  $i$  JE ČÍSLO, PRO KTERÉ PLATÍ  $i^2 = -1$ . V KOMPLEXNÍM ČÍSLE  $a+bi$  SE ČÍSLO  $a$  NAZÝVÁ REÁLNÁ ČÁST, ČÍSLO  $b$  IMAGINÁRNÍ ČÁST A ČÍSLO  $i$  IMAGINÁRNÍ JEDNOTKA.**

**ZÁPIS KOMPLEXNÍHO ČÍSLA  $z$  VE TVARU  $a+bi$  SE NAZÝVÁ ALGEBRAICKÝ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA  $z$ .**

Speciální případ nastává pro čísla  $a+bi$ , pro které je  $b \neq 0$  - ta se nazývají **imaginární**, je-li navíc ještě  $a = 0$  nazývají se **ryze imaginární**. Čísla  $a+bi$ , pro které je  $b = 0$ , jsou čísla reálná (ale je možné je řadit i mezi čísla komplexní).

##### 3.1.2 Početní operace s komplexními čísly

V množině komplexních čísel jsou definovány početní operace podobně jako v množině čísel reálných:

1. sčítání - pro každá dvě komplexní čísla  $z_1 = a+bi$  a  $z_2 = c+di$  platí:

$$z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

2. násobení - pro každá dvě komplexní čísla  $z_1 = a+bi$  a  $z_2 = c+di$  platí:

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Poznámka: Sčítání a násobení komplexních čísel se tedy provádí analogicky jako sčítání a násobení polynomů.

3. opačné číslo - ke každému komplexnímu číslu  $z = a+bi$  existuje číslo  $z'$  tak, že platí:  $z + z' = 0$ ; číslo  $z' = -a-bi$  je číslo opačné k číslu  $z$ .
4. rozdíl  $z_1 - z_2$  komplexních čísel  $z_1, z_2$  je součet čísla  $z_1$  a čísla opačného ke komplexnímu číslu  $z_2$ :  $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$
5. rovnost dvou komplexních čísel  $a+bi$  a  $c+di$  nastává právě tehdy, když  $a = c \wedge b = d$
6. číslo komplexně sdružené (komplexní číslo sdružené) s číslem  $z = a+bi$  je číslo  $\bar{z} = a-bi$
7. podíl  $\frac{z_1}{z_2}$  komplexních čísel  $z_1$  a  $z_2 \neq 0$  je součin čísla  $z_1$  a čísla převráceného k číslu  $z_2$ .

Výsledkem je opět komplexní číslo, tj. číslo ve tvaru  $a+bi$ . Abychom se k tomuto tvaru dostali,

je doporučeno dělení provádět následujícím postupem:  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$ , tj. rozšířit zlomek

komplexně sdruženým číslem  $\bar{z}_2$  k číslu  $z_2$ .

Podíl dvou komplexních čísel je založen na následující vlastnosti komplexních čísel: Součin komplexního čísla  $z$  a čísla  $\bar{z}$  s ním sdruženého je reálné nezáporné číslo, přičemž rovnost  $z \cdot \bar{z} = 0$  nastává pouze pro případ  $z = 0$ .

### 3.1.3 Absolutní hodnota a grafické znázornění komplexních čísel

Další „operaci“, kterou známe z čísel reálných je absolutní hodnota. Absolutní hodnota reálného čísla je pojem dobře známý - jedná se vždy o reálné nezáporné číslo. Pojem absolutní hodnoty lze rozšířit i na čísla komplexní. Zatím jediná operace, aplikovaná na komplexní číslo  $z$ , která dává jako výsledek nezáporné reálné číslo, je součin daného komplexního čísla  $z$  a čísla  $\bar{z}$  s ním komplexně sdruženého. Tento součin dává:  $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ . Reálná čísla jsou ale zvláštním případem čísel komplexních ( $b = 0$ ), proto by v tomto případě měla být absolutní hodnota čísla komplexního totožná s absolutní hodnotou čísla reálného. Z toho důvodu je třeba ještě „přidat“ odmocninu.

**ABSOLUTNÍ HODNOTA KOMPLEXNÍHO ČÍSLA  $z$  JE ČÍSLO  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ .**

Vlastnosti absolutní hodnoty komplexního čísla:

1. Pro  $z \neq 0$  je  $|z| > 0$ , pro  $z = 0$  je  $|z| = 0$ . Pro  $z = a + bi$  je  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .
2. Pro libovolná komplexní čísla  $z_1, z_2$  platí:  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ . Je-li navíc  $z_2 \neq 0$ , pak platí:

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right|.$$

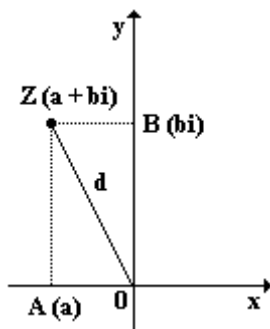
**KOMPLEXNÍ JEDNOTKA JE KOMPLEXNÍ ČÍSLO, JEHOŽ ABSOLUTNÍ HODNOTA JE ROVNA JEDNĚ.**

Je důležité si uvědomit, že určité operace mají v komplexních číslech (na rozdíl od reálných) jistá omezení:

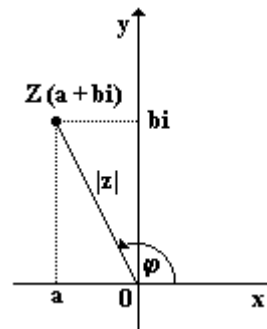
1. Množinu komplexních čísel  $\mathbb{C}$  nelze na rozdíl od množiny reálných čísel  $\mathbb{R}$  uspořádat podle velikosti, tj. pro komplexní čísla nelze zavést vztah nerovnosti tak, aby splňoval všechny vlastnosti jako u čísel reálných.
2.  $\forall a \in \mathbb{R} : a^2 = |a|^2$ , v oboru komplexních čísel tato rovnost obecně neplatí.  $\forall z \in \mathbb{C} : z^2 = z \cdot \bar{z}$  a rovnost  $z^2 = |z|^2$  platí jen pro ta komplexní čísla, pro které  $z = \bar{z}$ , tj. čísla reálná. Např. pro  $z = 1 + i$  je  $|z|^2 = 2$ , ale  $z^2 = 2i$ .
3. V reálných číslech je možné rozložit dvojčlen  $x^2 - y^2$ , ale již ne dvojčlen  $x^2 + y^2$ . V oboru komplexních čísel je ale možné rozložit i tento dvojčlen:  $x^2 + y^2 = x^2 - i^2 y^2 = (x + yi)(x - yi)$ .

Reálná čísla je možné znázornit na přímce, tj. existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny  $\mathbb{R}$  na množinu bodů přímky. Analogicky existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  na množinu všech bodů roviny, tj. všechny uspořádané dvojice reálných čísel je možné znázornit v rovině. Čísla komplexní lze chápat jako uspořádanou dvojici reálných čísel:  $[a; b] \approx a + bi$ . Komplexní čísla je tedy možné znázornit v rovině.

**ROVINA KOMPLEXNÍCH ČÍSEL (GAUSSOVA ROVINA) JE ROVINA, JEJÍŽ BODY POVAŽUJEME ZA OBRAZY KOMPLEXNÍCH ČÍSEL.**



obr. 16



obr. 17

Vzájemné přiřazení komplexních čísel a bodů Gaussovy roviny je zprostředkováno pomocí kartézské soustavy souřadnic  $Oxy$ , na jejíž ose  $x$  jsou zobrazena reálná čísla a na ose  $y$  čísla ryze imaginární. Osa  $x$  se proto nazývá **reálná osa**, osa  $y$  pak **imaginární osa**.

Absolutní hodnota reálného čísla je rovna vzdálenosti jeho obrazu od počátku na číselné ose. Otázkou je, zda tuto vlastnost má také absolutní hodnota čísel komplexních. Uvažujme proto v Gaussově rovině bod  $Z$ , který

je obrazem komplexního čísla  $z = a + bi$  a určíme vzdálenost  $d$  tohoto bodu od počátku  $O$  kartézského systému souřadnic. Podle obr. 16 platí:  $d = |OZ| = \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ .

Z právě uvedeného vyplývá, že všechna komplexní čísla  $z$ , která mají tutéž absolutní hodnotu, leží v Gaussově rovině na kružnici se středem v počátku a s poloměrem rovným  $|z|$ .

Absolutní hodnota rozdílu dvou komplexních čísel určuje jejich vzdálenost v Gaussově rovině.

### 3.1.4 Goniometrický tvar komplexních čísel

V Gaussově rovině je možné určit obraz  $Z$  libovolného komplexního čísla  $z = a + bi$  pomocí kartézské soustavy souřadnic dvojím způsobem:

1. pomocí souřadnic  $x$  a  $y$  tak, že za  $x$ -ovou souřadnici vezmeme reálnou část komplexního čísla  $z$  a za  $y$ -ovou souřadnici jeho část imaginární;
2. pomocí vzdálenosti obrazu  $Z$  od počátku soustavy souřadnic a pomocí velikosti orientovaného úhlu  $\varphi$ , jehož počáteční rameno je kladná poloosa  $x$  a koncové rameno polopřímka  $OZ$ .

Tyto způsoby znázornění komplexních čísel v Gaussově rovině tak připomínají kartézský systém souřadnic a polární souřadnice - viz odstavce 2.5.1 a 2.5.2.

Reálné číslo určující velikost tohoto orientovaného úhlu se nazývá **argument komplexního čísla**  $z$ . Z vlastností orientovaného úhlu plyne: má-li komplexní číslo  $z \neq 0$  argument  $\varphi$ , má též argument  $\varphi + 2k\pi$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ . Onou zmíněnou vzdáleností obrazu  $Z$  od počátku soustavy souřadnic je absolutní hodnota komplexního čísla  $z$ .

Podle obr. 17 je vidět, že platí:  $\sin \varphi = \frac{b}{|z|} \wedge \cos \varphi = \frac{a}{|z|}$ . Pro komplexní číslo  $z$  pak dostáváme:

$$z = a + bi = |z| \cos \varphi + (|z| \sin \varphi)i = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

**GONIOMETRICKÝ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA  $z \neq 0$  JE JEHO VYJÁDŘENÍ VE TVARU:**  
 $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , KDE  $\varphi$  JE ARGUMENT KOMPLEXNÍHO ČÍSLA  $z$ .

Goniometrický tvar komplexních čísel umožňuje jejich snadné násobení a dělení:

1. Součin libovolných nenulových komplexních čísel  $z_1, z_2$  v goniometrickém tvaru  $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  a  $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  je roven komplexnímu číslu  $z = |z_1||z_2|[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ .
2. Podíl libovolných nenulových komplexních čísel  $z_1, z_2$  v goniometrickém tvaru  $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  a  $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  je roven komplexnímu číslu  $z = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$ .

Zobecněním opakovaného násobení tímž číslem (jak v reálných číslech, tak v komplexních) je umocňování. V oboru komplexních čísel dává návod, jakým způsobem umocňovat komplexní čísla zapsaná v goniometrickém tvaru, Moivreova věta:

**Moivreova věta:** Pro každé celé  $n$  a libovolný argument  $\varphi$  platí:  $[|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ .

Je-li třeba umocnit komplexní číslo v algebraickém tvaru, nejprve jej převedeme na tvar goniometrický, protože umocňovat komplexní čísla v goniometrickém tvaru je díky Moivreově větě snadné.

### 3.1.5 Exponenciální tvar komplexních čísel

Ve fyzice, elektrotechnice a dalších oborech, které pracují s komplexními čísly, je důležité znát další tvar komplexního čísla - exponenciální tvar komplexního čísla. Při jeho odvozování vyjdeme z tzv. **Eulerových vzorců**, které lze odvodit s použitím vyšší matematiky (matematická analýza v komplexním oboru, ...). Eulerovy vzorce vyjadřují vztah mezi eulerovým číslem  $e$  ( $e = 2,7182818 \dots$ ) a argumentem komplexního čísla:

1.  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$
2.  $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$

Odtud je možné jednoduše vyjádřit  $\sin \varphi$  a  $\cos \varphi$  takto:  $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$  a  $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ .

Komplexní číslo v goniometrickém tvaru je možné psát ve tvaru  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Po dosazení z právě vyjádřených goniometrických funkcí z Eulerových vzorců dostáváme:

$$z = |z| \left( \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} + i \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right) = |z| \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} + e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = |z| e^{i\varphi}$$

**EXPONENCIÁLNÍ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA  $z \neq 0$  JE JEHO VYJÁDRĚNÍ VE TVARU:**

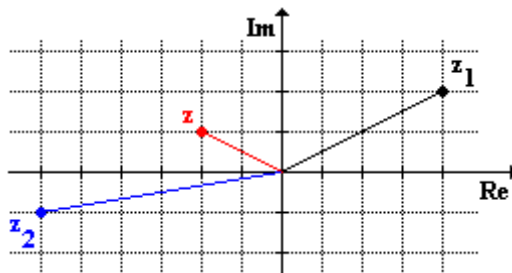
$z = |z|e^{i\varphi}$ , KDE  $\varphi$  JE ARGUMENT KOMPLEXNÍHO ČÍSLA  $z$ .

**3.1.6 Grafická interpretace početních operací**

Početní operace prováděné s komplexními čísly (popsané v odstavcích 3.1.2 a 3.1.3) lze interpretovat i graficky pomocí zobrazení komplexních čísel v Gaussově rovině.

Sčítání a odčítání lze v Gaussově rovině chápat jako sčítání dvou vektorů, jejichž počáteční bod leží v počátku Gaussovy roviny a koncový bod splývá s obrazem daného komplexního čísla. Pro dvě komplexní čísla  $z_1 = a_1 + b_1i$  a  $z_2 = a_2 + b_2i$  totiž platí:  $z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + i(b_1 \pm b_2)$ . Tento zápis je analogický sčítání (odčítání) dvou vektorů po složkách; reálná část komplexního čísla odpovídá  $x$ -ové souřadnici vektoru, imaginární část pak  $y$ -ové souřadnici.

Na obr. 18 je tato operace zobrazena pro komplexní čísla  $z_1 = 4 + 2i$  a  $z_2 = -6 - i$ .



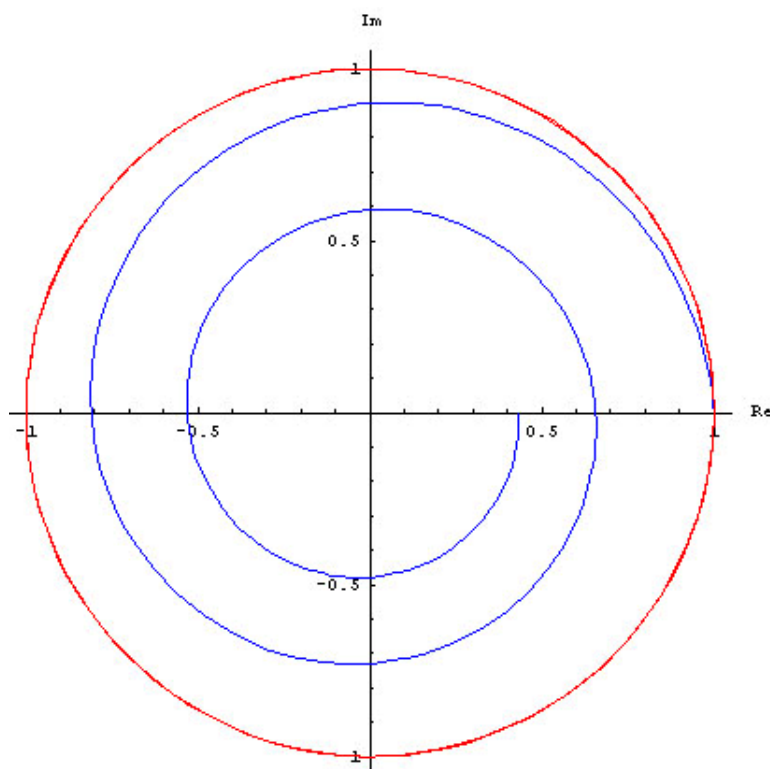
obr. 18

Obraz opačného čísla  $z'$  ke komplexnímu číslu  $z$  vznikne v Gaussově rovině jako obraz obrazu komplexního čísla  $z$  vytvořený ve středové souměrnosti se středem v počátku Gaussovy roviny.

Obraz čísla  $\bar{z}$  komplexně sdruženého ke komplexnímu číslu  $z$  vznikne v Gaussově rovině jako obraz obrazu komplexního čísla  $z$  vytvořený v osové souměrnosti s imaginární osou.

Násobení komplexních čísel v Gaussově rovině odpovídá v podstatě otočení. Vyplývá to ze vztahu pro násobení dvou komplexních čísel v goniometrickém tvaru (viz odstavec 0). Obraz komplexního čísla, které je součinem dvou zadaných komplexních čísel, získáme tak, že jedno ze zadaných komplexních čísel otočíme kolem počátku Gaussovy roviny o argument druhého komplexního čísla. Poté vynásobíme absolutní hodnoty obou zadaných čísel a získáme absolutní hodnotu hledaného součinu.

Při dělení komplexních čísel postupujeme analogicky. V obou případech je nutné brát v úvahu zaměněno argumentu komplexních čísel.

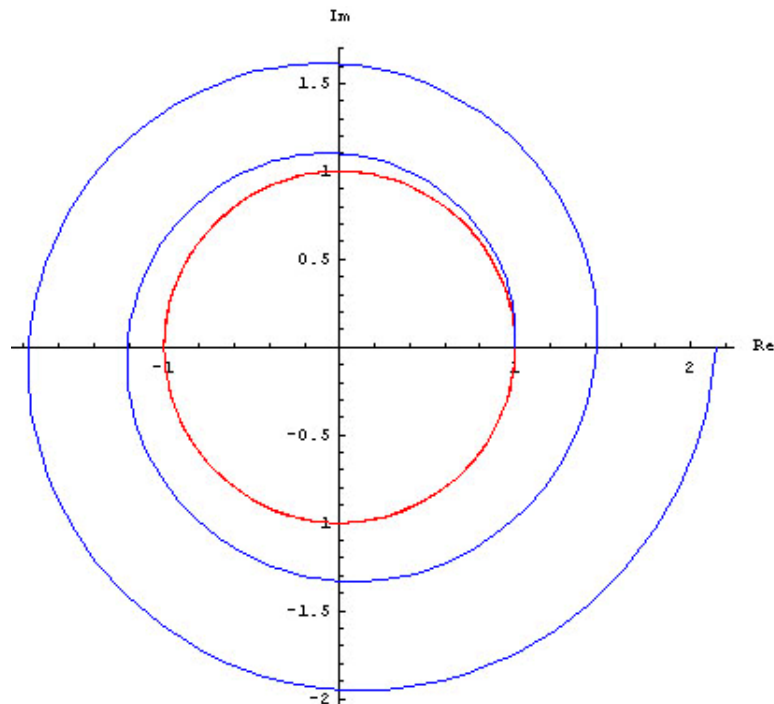


obr. 19

Umocňování komplexního čísla znamená otáčet jeho obraz v Gaussově rovině v kladném smyslu. Každé umocnění znamená pootočení obrazu původního komplexního čísla o jeho argument a umocnění jeho absolutní hodnoty. Obraz komplexního čísla se tak bude postupně v Gaussově rovině „pohybovat“:

1. po kružnici - komplexní čísla  $z$ , pro něž je  $|z| = 1$

2. po zmenšující se spirále - komplexní čísla, pro něž je  $|z| < 1$  (viz obr. 19)
3. po zvětšující se spirále - komplexní čísla, pro něž je  $|z| > 1$  (viz obr. 20)



obr. 20

Umocníme-li komplexní číslo  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$  na  $\frac{2k\pi}{\varphi}$  (argument  $\varphi$  je vyjádřen v radiánech a  $k \in \mathbb{Z}$ ), získáme totéž komplexní číslo  $z$ . Umocníme-li na tento exponent komplexní číslo  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , získáme komplexní číslo, které bude mít tentýž argument jako zadané komplexní číslo  $z$ , ale bude mít jinou absolutní hodnotu; jeho obraz tedy bude ležet na stejné polopřímce vycházející z počátku Gaussovy roviny jako komplexní číslo  $z$ .

### 3.1.7 Kvadratické rovnice řešené v oboru komplexních čísel

Komplexní čísla (jak bylo zmíněno na začátku odstavce o komplexních číslech) jsou čísla, v nichž je možné sčítat, odčítat, násobit, dělit, umocňovat, ale i odmocňovat, aniž bychom museli mít obavu, že se dostaneme k neřešitelnému problému. To znamená, že v oboru komplexních čísel mají řešení všechny kvadratické rovnice. A to i ty, jejichž diskriminant je záporný. Je možné dokázat, že pokud má kvadratická rovnice komplexní kořeny, pak se jedná o komplexní čísla vzájemně komplexně sdružená.

### 3.1.8 Binomické rovnice

Završením povídání o komplexních číslech jsou tzv. binomické rovnice.

**BINOMICKOU ROVNICÍ SE NAZÝVÁ ROVNICE TVARU  $x^n - a = 0$ , KDE  $a$  JE DANÉ KOMPLEXNÍ ČÍSLO,  $x$  NEZNÁMÁ A  $n > 1$  JE ČÍSLO PŘIROZENÉ.**

Při řešení této rovnice, tj. při hledání komplexního čísla  $x$  splňující binomickou rovnici, je možné předpokládat, že  $a \neq 0$ . Je totiž zřejmé, že v případě  $a = 0$  má příslušná binomická rovnice pouze jedno řešení, a to  $x = 0$ . Předpoklad nenulovosti  $a$  navíc umožní vyjádřit číslo  $a$  v goniometrickém tvaru:  $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ . Řešením binomické rovnice je komplexní číslo  $x$ , které je možné vyjádřit též v goniometrickém tvaru:  $x = |x|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

Binomickou rovnici tedy můžeme psát ve tvaru:  $[|x|(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n - |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 0$ . Pomocí Moivreovy věty jí přepíšeme do tvaru  $|x|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ . Odtud je zřejmé, že daná rovnost platí, pokud  $|x|^n = |a|$  a zároveň  $n\varphi = \alpha + 2k\pi$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ . Odtud již pro neznámé  $|x|$  a  $\varphi$  dostáváme:

$|x| = \sqrt[n]{|a|}$  a  $\varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$ , takže komplexní číslo  $x$  je možné psát ve tvaru:

$$x = \sqrt[n]{|a|} \left( \cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), \text{ kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Na první pohled to vypadá, že právě vyřešená goniometrická rovnice má nekonečně mnoho řešení, neboť  $k \in \mathbb{Z}$ . Vzhledem k periodicitě funkcí sinus a kosinus tomu tak ale není. Všechny různé kořeny binomické rovnice  $x^n - a = 0$  lze získat dosazením za  $k$  pouze čísel  $0, 1, 2, \dots, n-1$ . Při zakreslení kořenů binomické



rovnice do Gaussovy roviny zjistíme, že tyto body tvoří vrcholy pravidelného  $n$ -úhelníku vepsaného do kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a s poloměrem  $\sqrt[n]{|a|}$ .

Kořeny binomické rovnice  $x^n - 1 = 0$  mají tyto vlastnosti:

1. kořeny jsou komplexní jednotky
2. součin libovolných dvou kořenů je opět kořenem této rovnice
3. pro všechna  $k$  platí:  $x_k = x_1^k$

Binomická rovnice je poměrně slušný a přitom jednoduchý nástroj pro vyšetřování pravidelných  $n$ -úhelníků.

### 3.2 \*\*\*Kvaterniony

*Poznámka: Tento odstavec má pouze informativní charakter, protože není možné v tomto textu postihnout všechny vlastnosti kvaternionů. Navíc kvaterniony nepatří mezi běžnou náplň přednášek na vysokých školách.*

Kromě komplexních čísel (viz odstavec 3), která lze chápat jako uspořádané dvojice reálných čísel, začali fyzikové rozvíjet i další číselné struktury, které měly být ještě obecnější než čísla komplexní. Logickým rozšířením množiny komplexních čísel by se zdálo zavést takovou strukturu, která by byla tvořena trojicemi reálných čísel. Práci na této struktuře se věnoval irský matematik a fyzik William Rowan Hamilton (1805 - 1865), který se podílel i na vybudování komplexních čísel.

Bohužel struktura, která by byla jakousi „nadstavbou“ komplexních čísel a jejíž prvky by byly tvořeny trojicemi reálných čísel, se ukázala pro další použití v matematice nepoužitelná. Problém nastával při násobení resp. dělení. Při násobení některých dvou nenulových prvků vyšel nulový součin. To znamená, že v této struktuře existují netriviální dělitelé nuly a není možné obecně definovat operaci dělení, aniž bychom měli záruku, že se nebude dělit nulou.

Nicméně čtveřice reálných čísel už tento problém nevykazovaly. A tak se kvaterniony začaly v matematice používat.

**KVATERNION  $q$  JE ČÍSLO VE TVARU  $q = w + xi + yj + zk$ , KDE  $x, y$  A  $z$  JSOU REÁLNÁ ČÍSLA A  $i, j$  A  $k$  JSOU KVATERNIONOVÉ JEDNOTKY ( $i$  ODPOVÍDÁ IMAGINÁRNÍ JEDNOTCE), PRO KTERÉ PLATÍ:  $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$  A  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ .**

Všechny uvedené vztahy mezi kvaternionovými jednotkami jsou nadbytečné. K plnému určení jejich vlastností jich postačuje méně.

Sčítání a násobení dvou kvaternionů se provádí po složkách, tj. pro kvaterniony  $q_1 = w_1 + x_1i + y_1j + z_1k$  a  $q_2 = w_2 + x_2i + y_2j + z_2k$  platí:  $q = q_1 \pm q_2 = w_1 \pm w_2 + (x_1 \pm x_2)i + (y_1 \pm y_2)j + (z_1 \pm z_2)k$ .

Součin dvou kvaternionů získáme analogicky jako součin dvou polynomů. Lze tedy psát:  $q = q_1 q_2 = (w_1 + x_1i + y_1j + z_1k)(w_2 + x_2i + y_2j + z_2k) = w_1w_2 + w_1x_2i + w_1y_2j + w_1z_2k + x_1w_2i + x_1x_2i^2 + x_1y_2ij + x_1z_2ik + y_1w_2j + y_1x_2ji + y_1y_2j^2 + y_1z_2jk + z_1w_2k + z_1x_2ki + z_1y_2kj + z_1z_2k^2 =$   
 $= w_1w_2 + w_1x_2i + w_1y_2j + w_1z_2k + x_1w_2i - x_1x_2 + x_1y_2k - x_1z_2j + y_1w_2j - y_1x_2k - y_1y_2 + y_1z_2i + z_1w_2k + z_1x_2j - z_1y_2i - z_1z_2 =$   
 $= (w_1w_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2) + (w_1x_2 + x_1w_2 + y_1z_2 - z_1y_2)i + (w_1y_2 - x_1z_2 + y_1w_2 + z_1x_2)j + (w_1z_2 + x_1y_2 - y_1x_2 + z_1w_2)k$

Kvaterniony lze také chápat tak, že jsou složeny ze skalární části  $s$  a vektorové části  $\vec{v}$ . Kvaternion  $q = w + xi + yj + zk$  lze tedy zapsat ve tvaru  $q = (s, \vec{v})$ , kde  $s = w$  a  $\vec{v} = (x, y, z)$ . Pro násobení dvou kvaternionů  $q_1 = (s_1, \vec{v}_1)$  a  $q_2 = (s_2, \vec{v}_2)$  lze odvodit  $q_1 q_2 = (s_1 s_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2, s_1 \vec{v}_2 + s_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$ .

Lze definovat i skalární součin dvou kvaternionů  $q_1 = (s_1, \vec{v}_1)$  a  $q_2 = (s_2, \vec{v}_2)$ , pro který platí  $q_1 \cdot q_2 = w_1 w_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ .

Kvaternion sdružený ke kvaternionu  $q = w + xi + yj + zk$  je kvaternion  $\bar{q} = w - xi - yj - zk$ . Pro velikost kvaternionu pak lze psát:  $|q| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{q \bar{q}}$ .

Pro dva kvaterniony  $p$  a  $q$  platí:

1.  $\overline{pq} = \bar{q} \bar{p}$
2.  $|pq| = |p| \cdot |q|$

**KVATERNION, JEHOŽ VELIKOST JE JEDNA, SE NAZÝVÁ JEDNOTKOVÝ KVATERNION.**

Pro jednotkový kvaternion platí:  $q \bar{q} = \bar{q} q = 1$ .

Stejně tak, jako lze na komplexní čísla nahlížet jako na uspořádané dvojice reálných čísel, lze chápat kvaterniony jako uspořádané dvojice čísel komplexních.

## 4. DIFERENCIÁLNÍ POČET

Základy diferenciálního a integrálního počtu, který bývá též nazýván počet infinitezimální (latinsky *infinitesimalis* znamená nekonečně malý), vytvořili anglický matematik, fyzik a astronom Isaac Newton (1642 - 1727) a německý matematik, fyzik, filosof, právník a diplomat Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Tato matematická disciplína, která je založena „na nekonečně malých veličinách“, našla rychle uplatnění v nastupujícím 18. století, protože měla použití nejen v samotné matematice, ale i v přírodních vědách a technice.

### 4.1 Elementární funkce

Vzhledem k tomu, že problematika diferenciálního a integrálního počtu je založena na pojmu funkce, je třeba bezpodmínečně ovládat základní (tzv. elementární) funkce a jejich vlastnosti (graf, transformace grafu v soustavě souřadnic, definiční obor a obor hodnot, monotonie, ryzí monotonie, omezenost, inverzní funkce, periodická funkce, ...).

Při výpočtu limit, derivací a integrálů se často využívá rovnost funkcí a navíc většina z vyšetřovaných funkcí budou funkce složené, je třeba tyto pojmy upřesnit.

**FUNKCE  $f$  A  $g$  SE ROVNAJÍ NA MNOŽINĚ  $M = D(f) \cap D(g)$ , PLATÍ-LI PRO KAŽDÉ  $x \in M$  :  $f(x) = g(x)$ .**

**ŘEKNEME, ŽE FUNKCE  $h$  JE SLOŽENA ( $h$  JE SLOŽENÁ FUNKCE) Z FUNKCÍ  $f$  A  $g$ , PŘÁVĚ TEHDY KDYŽ PLATÍ:  $D(h) = \{x \in D(f); f(x) \in D(g)\}$  A  $\forall x \in D(h) : h(x) = g(f(x))$ . FUNKCE  $h$  SE ZNAČÍ SYMBOLEM:  $h = g \circ f$ . SKLÁDÁNÍ FUNKCÍ NENÍ OBECNĚ KOMUTATIVNÍ.**

Mějme např. funkce  $f : y = x^2$  a  $g : y = \sin x$ . Dvě funkce můžeme složit dvojím způsobem. Funkce  $h = g \circ f$  je funkce, kterou získáme tak, že funkci  $g$  aplikujeme na funkci  $f$ . Tedy nejdříve zpracujeme funkci  $f$  a poté až funkci  $g$ , tj.  $h = g \circ f = \sin x^2$ . Funkci  $j = f \circ g$  získáme tak, že na funkci  $g$  aplikujeme funkci  $f$ , tj.  $j = f \circ g = (\sin x)^2 = \sin^2 x$ .

Spolu se základními funkcemi (elementárními funkcemi), které jsou známé ze středoškolské matematiky, je třeba znát i jejich grafy (včetně transformace grafu - posunutí po jednotlivých osách kartézského systému, násobky, ...). Přehled základních (elementárních) funkcí:

- polynomická:**  $f : y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ , kde  $n \in \mathbb{Z}_0^+$ ,  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$  a  $D(f) = \mathbb{R}$  (jejími zvláštními případy jsou funkce konstantní, lineární a kvadratická);
- racionální:**  $f : y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0}$ , jejímž definičním oborem jsou reálná čísla vyjma všech nulových bodů polynomu  $Q_m(x)$  (jejími zvláštními případy jsou nepřímá úměrnost a lineární lomená funkce);
- mocninná:**  $f : y = x^n$ , kde:
  - $n \in \mathbb{N}$  a  $D(f) = \mathbb{R}$ ;
  - $n \in \mathbb{Z}^-$  a  $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ ;
  - $n \in \mathbb{Q}$  a  $D(f) = \mathbb{R}^+$ ;
- exponenciální:**  $f : y = a^x$ , kde  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  a  $D(f) = \mathbb{R}$ ;
- logaritmická:**  $f : y = \log_a x$ , kde  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  a  $D(f) = \mathbb{R}^+$ ;
- goniometrické:**
  - $f : y = \sin x$ , kde  $D(f) = \mathbb{R}$ ;
  - $f : y = \cos x$ , kde  $D(f) = \mathbb{R}$ ;
  - $f : y = \operatorname{tg} x$ , kde  $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ ;
  - $f : y = \operatorname{cotg} x$ , kde  $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ ;  
-1 pro  $x < 0$
- funkce signum:**  $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0 \end{cases}$ , kde  $D(f) = \mathbb{R}$ .

## 4.2 Limita funkce

### 4.2.1 Základní pojmy, zavedení pojmu limita

Pojem limita funkce je důležitým pojmem nejen v oblasti diferenciálního a integrálního počtu, ale v celé matematice vůbec. Na základě limit je možné přesně popsat řadu pojmů a vypočítat řadu údajů, které by zůstaly bez použití limit skryty.

Při vyšetřování limit funkce (a následně i spjitosti funkce - viz odstavec 4.3) budeme vyšetřovat vlastnosti funkce  $f$  v určitém konkrétním bodě  $a$  z definičního oboru dané funkce, tj.  $a \in D(f)$ . To ale neznamená jen vypočítat funkční hodnotu v daném bodě (pokud funkční hodnota existuje), ale hlavně zjišťovat, jak se mění funkční hodnoty  $f(x)$  v okolí daného bodu  $a$ .

Tj. jak moc se mění funkční hodnoty, když se budeme k danému bodu blížit zleva a zprava.

Před vyslovením definice prozkoumáme limity intuitivně na konkrétním příkladu.

Je dána funkce  $f : y = \frac{1}{x+3} + 2$ . Z grafu funkce  $f$ , který je zobrazen na obr. 21, vyplývá, že:

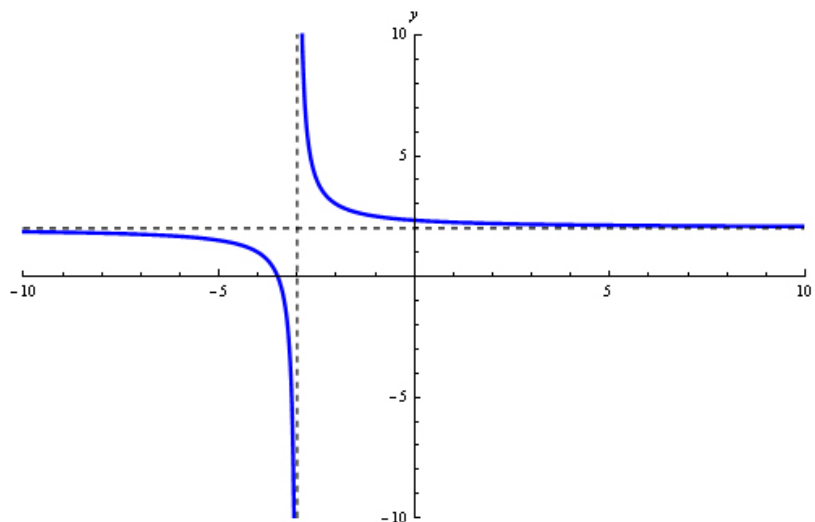
1. pro velká  $x$  (patřící do definičního oboru) se funkční hodnoty blíží stále více k hodnotě  $y = 2$ , ale nikdy jí nedosáhnou (tj. rovnice  $\frac{1}{x+3} + 2 = 2$  nemá řešení). Proto se říká, že funkční hodnoty se pro velká  $x$  blíží k číslu 2. Pro velká  $x$  tedy existuje limita (viz odstavec 4.2.1.4):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x+3} + 2 \right) = 2.$$

2. pro čísla v okolí bodu  $x = -3$ , který nepatří do definičního oboru funkce, ale už nedostaneme jednu hodnotu, k níž se blíží funkční hodnoty dané funkce. Budeme-li vyšetřovat ta  $x$  v okolí bodu  $-3$ , která jsou větší než  $-3$ , budou funkční hodnoty velká kladná čísla. Podíváme-li se ale na čísla v blízkosti bodu  $x = -3$ , která jsou menší než  $-3$ , budou funkční hodnoty záporné a jejich absolutní hodnoty budou velké. Tj. pro bod  $x = -3$  se nepodaří nalézt jednu funkční hodnotu:

existují tedy tzv. dvě jednostranné limity (viz odstavec 4.2.1.1.0)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \left( \frac{1}{x+3} + 2 \right) = \infty$  a

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \left( \frac{1}{x+3} + 2 \right) = -\infty, \text{ ale neexistuje limita oboustranná.}$$



obr. 21

**Ilustrační příklad:** Je dána funkce  $f : y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ . Určete její definiční obor, načrtněte její graf a pokuste se jí „přirozeným způsobem“ dodefinovat v bodech, v nichž není definovaná.

**Řešení:** Definiční obor funkce je  $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ . Na definičním oboru dané funkce je možné předpis funkce  $f$  upravit takto:  $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$  a získáme tak funkci  $g : y = x+2$ . Krácení výrazem  $x-2$  je matematicky v pořádku - na základě definičního oboru funkce  $f$  totiž víme, že výraz  $x-2$  nemůže nikdy nabývat nulové hodnoty.

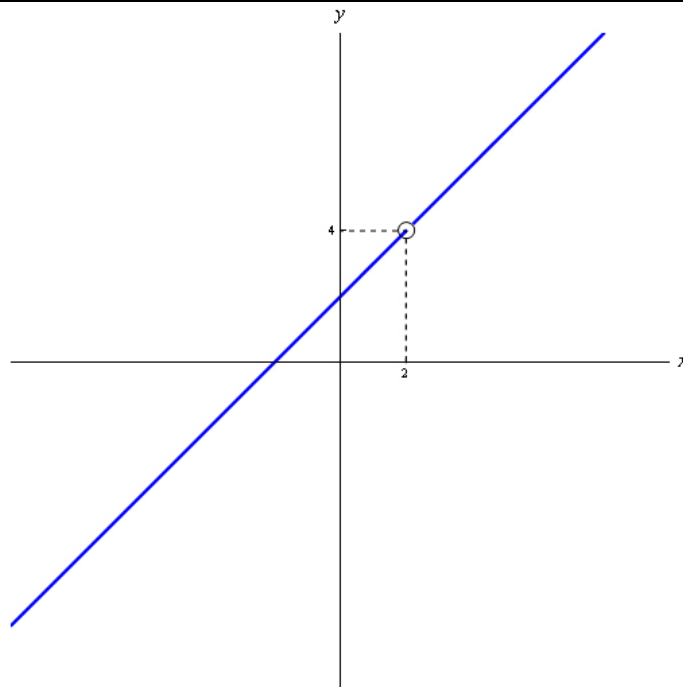
Funkce  $g$ , která vznikla úpravou výrazu z funkce  $f$ , má stejný definiční obor jako funkce  $f$ , tj.  $D(g) = D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ . Její graf je znázorněn na obr. 22. Jediným bodem, kde není funkce  $g$  definovaná je bod 2. Kdybychom ale nevěděli, že funkce  $g$  vznikla úpravou funkce  $f$ , mohli bychom jí v bodě  $x = 2$

dodefinovat velice snadno - prostým dosazením bodu  $x=2$  do předpisu funkce  $g$ :  $g(2)=2+2=4$ . Bod o souřadnicích  $[2; 4]$  skutečně leží na grafu funkce  $g$  i  $f$ , ačkoliv v bodě 2 není funkce  $f$  definovaná.

Touto úpravou jsme tedy dodefinovali „přirozeným způsobem“ i funkci  $f$  v bodě 2.

Dodefinovat funkci „přirozeným způsobem“ znamená dodefinovat jí tak, pokud je to možné, abychom získali spojitou funkci (viz odstavec 4.3).

Limitu je třeba chápat jako jakousi „náhražku“ funkční hodnoty v daném bodě: nejde-li funkční hodnota spočítat přímo, podíváme se, jak se chovají funkční hodnoty v okolí „problematického bodu“, a dodefinujeme funkční hodnotu tak, aby dodefinovaný bod na grafu funkce „nevyčuhoval“.



obr. 22

#### 4.2.1.1 Limita v bodě

Nyní následuje několik definic, které jsou nezbytné pro matematické zavedení pojmu limita. Na úrovni střední školy nejsou zdaleka všechny potřeba, jsou zde uvedeny pouze pro úplnost.

**OKOLÍ BODU  $a$  SE NAZÝVÁ OTEVŘENÝ INTERVAL  $(a-\delta; a+\delta)$ , KDE  $\delta$  JE Kladné reálné číslo. Číslo  $a$  se nazývá střed okolí, číslo  $\delta$  poloměr okolí. Okolí bodu  $a$  o poloměru  $\delta$  se značí  $U(a, \delta)$ .**

Někdy se též používá název  $\delta$ -okolí bodu  $a$ . Do množiny  $U(a, \delta)$  patří všechna reálná čísla  $x$ , která vyhovují nerovností  $a-\delta < x < a+\delta$ , tj.  $|x-a| < \delta$ .

Do množiny  $U(a, \delta)$  tedy patří všechny body  $x$  na reálné ose, jejichž vzdálenost od daného bodu  $a$  je menší než  $\delta$ .

**LEVÉ OKOLÍ BODU  $a$  SE NAZÝVÁ POLOUZAVŘENÝ INTERVAL  $(a-\delta; a]$ , KDE  $\delta$  JE Kladné reálné číslo.**

Levé okolí bodu  $a$  tvoří tedy všechna reálná čísla  $x$ , která vyhovují nerovností  $a-\delta < x \leq a$ .

Jsou to tedy všechna reálná čísla  $x$ , která leží na reálné ose vlevo od bodu  $a$  ve vzdálenosti nejvýše  $\delta$ .

**PRAVÉ OKOLÍ BODU  $a$  SE NAZÝVÁ POLOUZAVŘENÝ INTERVAL  $[a; a+\delta)$ , KDE  $\delta$  JE Kladné reálné číslo.**

Pravé okolí bodu  $a$  tvoří tedy všechna reálná čísla  $x$ , která vyhovují nerovností  $a \leq x < a+\delta$ .

Do pravého okolí bodu  $a$  tedy patří všechna reálná  $x$  ležící vpravo od bodu  $a$  ve vzdálenosti nejvýše  $\delta$ .

**PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU  $a$  SE NAZÝVÁ MNOŽINA  $(a-\delta; a) \cup (a; a+\delta)$ , TJ. MNOŽINA  $U(a, \delta) - \{a\}$ .**

Tuto množinu tvoří všechna reálná čísla  $x$ , která vyhovují nerovnostem  $a-\delta < x < a$  nebo  $a < x < a+\delta$ , tj.  $0 < |x-a| < \delta$ .

Prstencové okolí daného bodu  $a$  je tedy „normální“ okolí bodu  $a$ , ze kterého vynecháme bod  $a$ .

Nyní můžeme definovat limitu funkce v bodě  $a$ .

**FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  LIMITU  $L$ , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU OKOLÍ BODU  $L$  EXISTUJE PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO PRSTENCOVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  NÁLEŽÍ FUNKČNÍ HODNOTY  $f(x)$  ZVOLENÉMU OKOLÍ BODU  $L$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME VÝRAZEM  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .**

S využitím matematické symboliky je možné definici přepsat ve tvaru: Funkce  $f$  má v bodě  $a$  limitu  $L$ , právě tehdy když  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U(a, \delta) - \{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

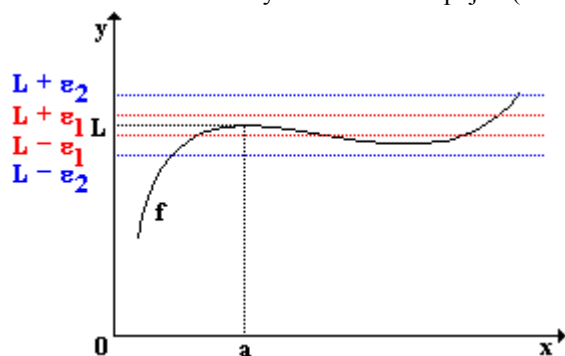
Zápis  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se čte: „limita funkce  $f(x)$  pro  $x$  blížíící se k  $a$  je rovna  $L$ “.

Obsah právě uvedené definice je možné vysvětlit následujícím způsobem. Pokud se podaří uzavřít kolem bodu  $L$  takový interval (pás), že pro každou jeho šířku najdeme na ose  $x$  takové okolí bodu  $a$ , že pro všechny body z tohoto okolí budou jejich funkční hodnoty ležet v intervalu kolem bodu  $L$ , pak má daná funkce v bodě  $a$  limitu  $L$ . Cílem není najít široký pás kolem bodu  $L$ . Naopak: snahou je pokusit se najít pás co možná nejužší, aby bylo hledání intervalu na ose  $x$  namáhavější. Je-li možné najít libovolně malý pás kolem bodu  $L$  (jeho šířka je  $2\varepsilon$ ), k němuž lze najít na ose  $x$  interval kolem bodu  $a$  (šířka toho intervalu je  $2\delta$ ), pak daná funkce má limitu  $L$  v bodě  $a$ . Pokud není možné obecně takový pás najít, funkce v daném bodě limitu nemá.

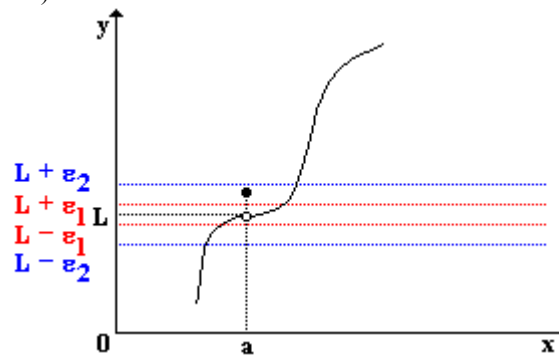
Snaha najít libovolný interval (tedy co nejužší interval, neboť pro široké intervaly jsou podmínky splněné snáze) odpovídá v definici limity předpokladu „k libovolně zvolenému okolí bodu  $L$ “ resp. „pro každé kladné  $\varepsilon$ “.

Jako příklad funkce, která má v bodě  $a$  limitu  $L$ , je možné uvést funkci na obr. 23. Pro jakkoliv široký pás v okolí bodu  $L$  (pro všechna kladná  $\varepsilon$ ) jsme schopni najít interval na ose  $x$  (existuje kladné číslo  $\delta$ ) takový, že funkční hodnoty všech bodů z okolí bodu  $a$  (všechna  $x$  z množiny  $(a - \delta; a + \delta) - \{a\}$ ) leží v předem daném pásu kolem bodu  $L$  (v intervalu  $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ ).

Na obr. 24 je příklad funkce, která v bodě  $a$  sice má limitu, ale ta není rovna funkční hodnotě dané funkce. Tato funkce tedy není v bodě  $a$  spojitá (viz odstavec 4.3).



obr. 23



obr. 24

Základní vlastnosti limity funkce:

1. Funkce  $f$  má v bodě  $a$  nejvýše jednu limitu.
2.  $\forall x \in U(a, \delta) - \{a\} : f(x) = g(x) \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

(Rovnájí-li se dvě funkce v prstencovém okolí bodu  $a$ , v němž má navíc jedna z funkcí limitu, má limitu i druhá funkce a obě limity se rovnají.)

3. Jestliže pro všechna  $x$  z množiny  $U(a, \delta) - \{a\}$  platí  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  a současně  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ , potom existuje také limita funkce  $g$  v bodě  $a$  a platí  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ .

Je to tzv. věta o dvou policajtech - funkce  $f$  a  $h$  „svírají“ funkci  $g$  jako dva policajti - viz obr. 25.

4. Limita součtu dvou funkcí  $f(x)$  a  $g(x)$  je rovna součtu limit daných funkcí, tj. platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

5. Limita součinu dvou funkcí  $f(x)$  a  $g(x)$  je rovna součinu limit daných funkcí, tj. platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

6. Limita podílu dvou funkcí  $f(x)$  a  $g(x)$ , přičemž  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ , je rovna podílu limit daných

funkcí, tj. platí: 
$$\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

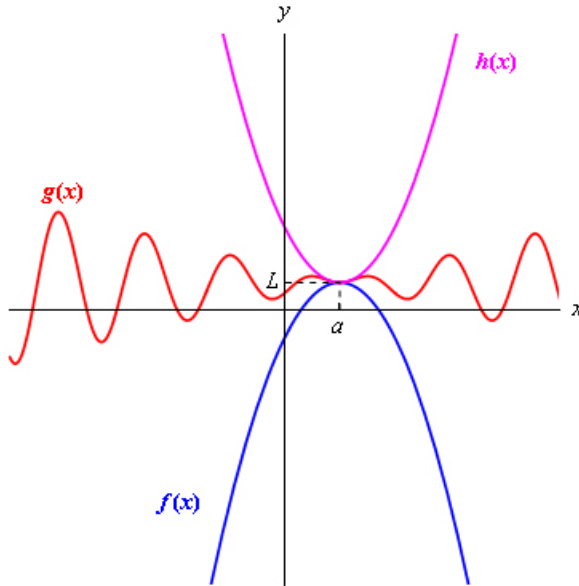
Pro řadu matematických úloh, ale i fyzikálních aplikací, je dobré znát hodnotu této limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

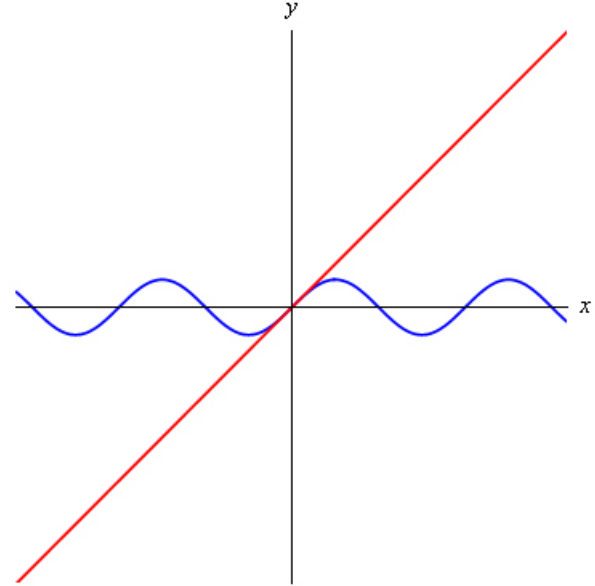
Vztah  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$  lze interpretovat graficky. Do téhož grafu sestrojíme graf funkce

$f: y = \sin x$  a graf funkce  $g: y = x$ . Z grafu na obr. 26 je zřejmé, že pro  $x$  v okolí bodu  $x = 0$  nabývají obě funkce téměř stejných hodnot.

To znamená, že podíl těchto funkcí v limitě pro  $x$  jdoucí k nule je roven jedné.



obr. 25



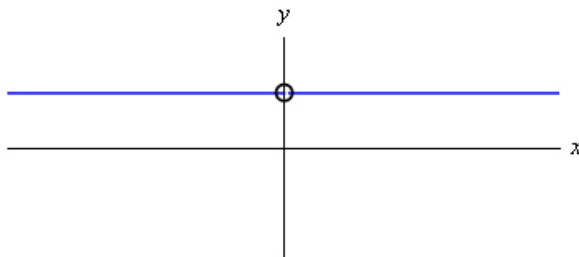
obr. 26

#### 4.2.1.2 Jednostranná limita

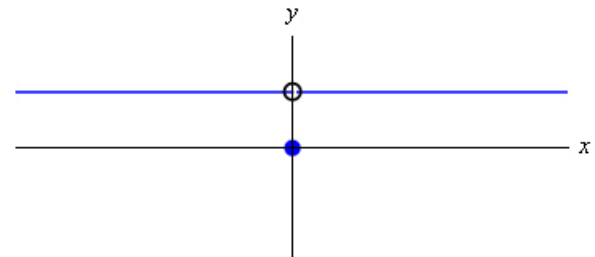
Uvažme grafy následujících funkcí:  $f: y = \frac{x}{x}$ ,  $g: y = |\operatorname{sgn} x|$ ,  $h: y = \frac{|x|}{x}$  a  $k: y = \operatorname{sgn} x$ . Jejich definiční obory jsou  $D(f) = D(h) = \mathbb{R} - \{0\}$  a  $D(g) = D(k) = \mathbb{R}$ . Jejich grafy jsou zobrazeny na obr. 27 až obr. 30. Tyto grafy jsou velmi podobné, ale liší se definicí a průběhem funkce v bodě  $x = 0$ . Platí  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$ , zatímco  $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow 0^-} k(x)$  neexistují. Nicméně z obrázků je vidět, že i funkce  $h$  a  $k$  se v bodě 0 přibližují k nějaké hodnotě - závisí ovšem na tom, z jaké strany se k nule budeme přibližovat: zda zleva nebo zprava.

Na základě toho je potom možné mluvit o jednostranné limitě:

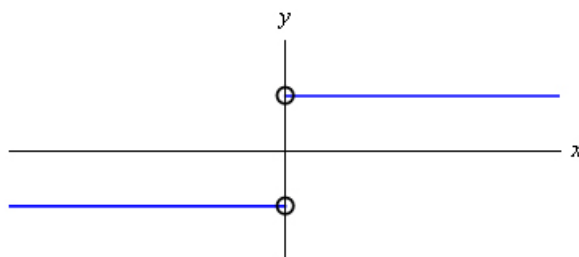
1. funkce  $h$  (resp.  $k$ ) mají v bodě nule **zleva** jednostrannou limitu, která je rovna -1;
2. funkce  $h$  (resp.  $k$ ) mají v bodě nule **zprava** jednostrannou limitu, která je rovna 1.



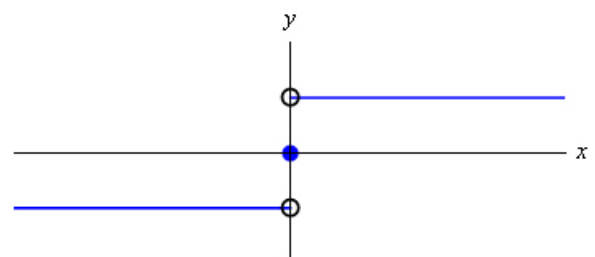
obr. 27



obr. 28



obr. 29



obr. 30

Nyní vyslovíme definice jednostranných limit.

**FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  LIMITU  $L$  ZLEVA, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU OKOLÍ BODU  $L$  EXISTUJE LEVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO**

**LEVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  NÁLEŽÍ HODNOTY  $f(x)$  ZVOLENÉMU OKOLÍ BODU  $L$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ .**

S využitím matematické symboliky je možné právě uvedenou definici přepsat ve tvaru:  
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

Jedná se tedy o analogii oboustranné limity (viz odstavec 4.2.1.1), ale v tomto případě se zajímáme pouze o body od bodu  $a$  vlevo. To znamená, že k bodu  $a$  se blížíme z oblasti čísel, která jsou menší než bod  $a$ .

**FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  LIMITU  $L$  ZPRAVA, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU OKOLÍ BODU  $L$  EXISTUJE PRAVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO PRAVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  NÁLEŽÍ HODNOTY  $f(x)$  ZVOLENÉMU OKOLÍ BODU  $L$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ .**

S využitím matematické symboliky je možné právě uvedenou definici přepsat ve tvaru:  
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

V tomto případě se tedy k bodu  $a$  blížíme zprava, tj. z oblasti čísel, která jsou větší než bod  $a$ .

Na základě právě uvedených definic je možné určit podmínku pro existenci limity funkce v zadaném bodě:

**LIMITA FUNKCE  $f$  V BODĚ  $a$  EXISTUJE PŘÁVĚ TEHDY, KDYŽ EXISTUJÍ V BODĚ  $a$  LIMITA ZPRAVA A LIMITA ZLEVA A TYTO LIMITY JSOU SI ROVNY. POTOM SE LIMITA FUNKCE  $f$  V BODĚ  $a$  ROVNÁ SPOLEČNĚ HODNOTĚ LIMIT ZLEVA A ZPRAVA.**

Pokud jedna z jednostranných limit zleva nebo zprava neexistuje nebo tyto jednostranné limity jsou navzájem různé, oboustranná limita (tj. „normální limita“) v daném bodě neexistuje.

#### 4.2.1.3 Nevlastní limity funkce v bodě

Až dosud bylo výsledkem počítání limity vždy reálné číslo, tj. číslo z intervalu  $(-\infty; \infty)$ . Jsou ale funkce, které dosahují v absolutní hodnotě velkých funkčních hodnot a tedy limity v daných bodech budou růst nade všechny meze. Takovým limitám se říká **nevlastní limity**.

**FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  NEVLASTNÍ LIMITU  $\infty$ , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU ČÍSLU  $K$  EXISTUJE PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO PRSTENCOVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  JE  $f(x) > K$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ .**

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in U(a, \delta) - \{a\} \Rightarrow f(x) > K$ .

Příklad: Nevlastní limitu  $\infty$  mají např. funkce:  $f: y = \frac{1}{(x-3)^2}$  v bodě 3,  $g: y = \frac{1}{(x+5)^4}$  v bodě -5, ...

Funkce tedy v daném bodě „uteče“ do nekonečna - funkční hodnoty budou při přibližování se k danému bodu stále růst.

**FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  NEVLASTNÍ LIMITU  $-\infty$ , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU ČÍSLU  $K$  EXISTUJE PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO PRSTENCOVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  JE  $f(x) < K$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .**

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in U(a, \delta) - \{a\} \Rightarrow f(x) < K$ .

Příklad: Nevlastní limitu  $-\infty$  mají např. funkce:  $f: y = -\frac{1}{(x+1)^2}$  v bodě -1,  $g: y = -\frac{1}{x^8}$  v bodě 0,  $h: y = \ln|x|$  v bodě 0, ...

Funkční hodnoty budou při přibližování se k danému bodu tentokrát „utíkat“ do velmi malých hodnot (tj. do záporných hodnot, jejichž absolutní hodnota je velká).

**FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  NEVLASTNÍ LIMITU  $\infty$  ZLEVA, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU ČÍSLU  $K$  EXISTUJE LEVÉ PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO**

VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO LEVÉHO PRSTENCOVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  JE  $f(x) > K$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) > K$ .

Příklad: Nevlastní limitu  $\infty$  v daném bodě zleva mají např. funkce:  $f: y = -\frac{1}{x+4}$  v bodě  $-4$ ,  $g: y = -\log(-x)$  v bodě  $0$ ,  $h: y = \operatorname{tg} x$  v bodě  $\frac{\pi}{2}$ , ...

FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  NEVLASTNÍ LIMITU  $\infty$  ZPRAVA, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU ČÍSLU  $K$  EXISTUJE PRAVÉ PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO PRAVÉHO PRSTENCOVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  JE  $f(x) > K$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) > K$ .

Příklad: Nevlastní limitu  $\infty$  v daném bodě zprava mají např. funkce:  $f: y = \frac{1}{x+4}$  v bodě  $-4$ ,  $f: y = -\log(x-2)$  v bodě  $2$ ,  $h: y = \operatorname{cotg} x$  v bodě  $0$ , ...

FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  NEVLASTNÍ LIMITU  $-\infty$  ZLEVA, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU ČÍSLU  $K$  EXISTUJE LEVÉ PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO LEVÉHO PRSTENCOVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  JE  $f(x) < K$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) < K$ .

Příklad: Nevlastní limitu  $-\infty$  v daném bodě zleva mají např. funkce:  $f: y = \frac{1}{x+4}$  v bodě  $-4$ ,  $g: y = \log(-x+1)$  v bodě  $1$ ,  $h: y = \operatorname{cotg} x$  v bodě  $\pi$ , ...

FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  NEVLASTNÍ LIMITU  $-\infty$  ZPRAVA, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU ČÍSLU  $K$  EXISTUJE PRAVÉ PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO PRAVÉHO PRSTENCOVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  JE  $f(x) < K$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) < K$ .

Příklad: Nevlastní limitu  $-\infty$  v daném bodě zprava mají např. funkce:  $f: y = -\frac{1}{x+4}$  v bodě  $-4$ ,  $g: y = \log(x+3)$  v bodě  $-3$ ,  $h: y = \operatorname{tg} x$  v bodě  $\frac{3}{2}\pi$ , ...

#### 4.2.1.4 Limita funkce v nevlastním bodě

Zatím jsme definovali vlastní i nevlastní limity v libovolném bodě  $a$  z intervalu  $(-\infty; \infty)$ . Je možné ale vyšetřovat funkční hodnoty funkce v krajích bodech uvedeného intervalu  $(-\infty; \infty)$ .

Tj. je možné vyšetřovat i limity v bodech  $\infty$  a  $-\infty$ .

Takovým limitám říkáme **limita v nevlastním bodě**. Limita v nevlastním bodě přitom může být vlastní i nevlastní.

FUNKCE  $f$  MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ  $\infty$  VLASTNÍ LIMITU  $L$ , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU Kladnému ČÍSLU  $\varepsilon$  EXISTUJE TAKOVÝ BOD  $x_0$ , ŽE PRO VŠECHNA  $x > x_0$  PATŘÍ FUNKČNÍ HODNOTY  $f(x)$  DO INTERVALU  $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 : \forall x > x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .



**Příklad:** Vlastní limitu v nevlastním bodě  $\infty$  mají např. funkce:  $f: y = \frac{1}{x}$  a  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,  $g: y = 2^{-x} + 3$  a  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 3, \dots$

**FUNKCE  $f$  MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ  $-\infty$  VLASTNÍ LIMITU  $L$ , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU Kladnému ČÍSLU  $\varepsilon$  EXISTUJE TAKOVÝ BOD  $x_0$ , ŽE PRO VŠECHNA  $x < x_0$  PATŘÍ FUNKČNÍ HODNOTY  $f(x)$  DO INTERVALU  $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ .**

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 : \forall x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

**Příklad:** Vlastní limitu v nevlastním bodě  $-\infty$  mají např. funkce:  $f: y = 2^x - 1$  a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ,  $g: y = -\frac{1}{x^4}$  a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0, \dots$

**FUNKCE  $f$  MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ  $\infty$  NEVLASTNÍ LIMITU  $\infty$ , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU Kladnému ČÍSLU  $K$  EXISTUJE TAKOVÝ BOD  $x_0$ , ŽE PRO VŠECHNA  $x > x_0$  PLATÍ  $f(x) > K$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .**

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists x_0 : \forall x > x_0 \Rightarrow f(x) > K$ .

**Příklad:** Nevlastní limitu  $\infty$  v nevlastním bodě  $\infty$  mají např. funkce:  $f: y = \ln x$ ,  $g: y = 3x + 1, \dots$

**FUNKCE  $f$  MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ  $\infty$  NEVLASTNÍ LIMITU  $-\infty$ , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU Kladnému ČÍSLU  $K$  EXISTUJE TAKOVÝ BOD  $x_0$ , ŽE PRO VŠECHNA  $x > x_0$  PLATÍ  $f(x) < K$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ .**

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists x_0 : \forall x > x_0 \Rightarrow f(x) < K$ .

**Příklad:** Nevlastní limitu  $-\infty$  v nevlastním bodě  $\infty$  mají např. funkce:  $f: y = -x^3$ ,  $g: y = -2x + 3, \dots$

**FUNKCE  $f$  MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ  $-\infty$  NEVLASTNÍ LIMITU  $\infty$ , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU Kladnému ČÍSLU  $K$  EXISTUJE TAKOVÝ BOD  $x_0$ , ŽE PRO VŠECHNA  $x < x_0$  PLATÍ  $f(x) > K$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ .**

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists x_0 : \forall x < x_0 \Rightarrow f(x) > K$ .

**Příklad:** Nevlastní limitu  $\infty$  v nevlastním bodě  $-\infty$  mají např. funkce:  $f: y = x^2$ ,  $g: y = -x^3, \dots$

**FUNKCE  $f$  MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ  $-\infty$  NEVLASTNÍ LIMITU  $-\infty$ , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU Kladnému ČÍSLU  $K$  EXISTUJE TAKOVÝ BOD  $x_0$ , ŽE PRO VŠECHNA  $x < x_0$  PLATÍ  $f(x) < K$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .**

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists x_0 : \forall x < x_0 \Rightarrow f(x) < K$ .

**Příklad:** Nevlastní limitu  $-\infty$  v nevlastním bodě  $-\infty$  mají např. funkce:  $f: y = -x^2$ ,  $g: y = x + 5, \dots$

#### 4.2.2 Neurčité výrazy

Při výpočtu limit se můžeme často setkat s tzv. **neurčitými výrazy**. Název *neurčitý výraz* zde není zcela přesně na místě, protože limita je definována přesně a korektně a není na ní nic neurčitého. Název je ale natolik zžitý, že nemá smysl ho měnit. Neurčité výrazy, tedy výrazy, které není možné počítat přímým výpočtem, jsou tyto výrazy:  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$ .

Limity, v nichž se vyskytnou neurčité výrazy, je nutné počítat s využitím nějaké finty (rozšířením, zkrácením problematického členu, ...).

Vlastnosti limit - např. počítání s limitami (limita součtu, limita rozdílu, ...), které byly uvedeny pro vlastní limity ve vlastních bodech v odstavci 4.2.1.1, platí i pro nevlastní limity v nevlastních bodech, pouze s výjimkou neurčitých výrazů.

### 4.2.3 Důležité limity

Některé limity se vyskytují při výpočtu složitějších úloh velmi často a proto je vhodné je umět rychle a správně aplikovat. Hodnoty těchto limit je v některých případech také vyčíst z grafu dané funkce.

Hodnoty limit v nevlastních bodech (tj. limity pro  $x$  blíží se k  $\pm\infty$ ) je možné intuitivně uhadnout, pokud dobře známe průběh grafu dané funkce. Místo „ $x$  se blíží k  $\pm\infty$ “ si lze říct „pro hodně velká  $x$ “ resp. „hodně velká záporná  $x$ “. Analogicky lze u limit pro  $x$  blíží se k nule používat zjednodušení „pro maličká  $x$ “.

Důležité limity tedy jsou:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0; n \in \mathbb{N}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ neexistuje
--	---	--	---	---

pro  $a \in (0; 1)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty$
---	---------------------------------------	--	--

pro  $a \in (1; \infty)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$
--	--	---	---

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ neexistuje	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ neexistuje	$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ neexistuje	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$ neexistuje
$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \operatorname{tg} x = \infty$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{cotg} x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cotg} x = \infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Při výpočtu limit je vždy doporučeno postupovat dle následujícího postupu:

1. limita ve vlastním bodě  $a$  - vede-li výpočet po dosazení příslušného  $a$  k neurčitému výrazu  $\frac{0}{0}$ , je

nutné pomocí algebraických úprav výraz v čitateli i ve jmenovateli vyjádřit jako součin několika činitelů, z nichž jeden je ten, který způsobuje výsledný součin nulový - tj. činitel  $x - a$ . Krácením zlomku tímto činitelem, obejdeme neurčitý výraz. Skutečnost, že krátit jde, nás nemusí překvapovat. V definici limit se vždy objevuje prstencové okolí příslušného bodu  $a$ . **Pozor!** I limita ve vlastním bodě může být nevlastní, tj. může vyjít  $\pm\infty$ .

Prstencové okolí bodu  $a$  znamená, že jsme „strašlivě blízko bodu  $a$ , ale nikdy ne přímo v něm“. Proto můžeme činitelem  $x - a$  celý zlomek dělit.

2. limita v nevlastním bodě - neobsahuje-li zadání úlohy zlomek, je možné přímo dopočítat danou limitu. Je-li zadání ve formě zlomku, pak se doporučuje v čitateli i jmenovateli vytknout nejvyšší mocninu neznámé (v čitateli a jmenovateli přitom není nutné vytýkat tutéž mocninu). Po vytknutí je možné ve zlomku krátit a poté již opět limitu dopočítat.

V případě výpočtu limit v nevlastním bodě není možné dosazovat přímo znak pro nekonečno, ale je možné dosazovat pouze v hlavě „strašně velká čísla“.

**Příklad:** Vypočtete  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + x - 6)(x^4 - 16)}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 9)}$ .

**Řešení:** Zadaná limita je typu  $\frac{0}{0}$ , tedy jeden z neurčitých výrazů. Postupnými algebraickými úpravami proto upravíme zadanou limitu do tvaru, do kterého je možné dosadit:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + x - 6)(x^4 - 16)}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 9)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)(x^2-4)(x^2+4)}{(x-2)^2(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x-2)^2(x-3)(x+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x^2+4)}{(x-3)} = \frac{(2+2)(2^2+4)}{(2-3)} = \frac{4 \cdot 8}{-1} = -32. \end{aligned}$$

Dosazovat do zadané funkce konkrétní bod, ve kterém limitu počítáme, je možné až poté, co jsme odstranili neurčité výrazy. Jakmile dosadíme konkrétní bod, nepíšeme již před funkcí  $\lim$ .

**Příklad:** Vypočtete  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 6}{x^4 + 5x^2 + 4}$ .

**Řešení:** Přesně podle výše uvedeného návodu dostaneme:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 6}{x^4 + 5x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{6}{x}\right)}{x^4 \left(1 + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{6}{x}}{x \left(1 + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}\right)} = \frac{1+0-0-0}{\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot (1+0+0)} = 0$$

Z tohoto příkladu je vidět, že u výpočtu limity podílu dvou polynomů v nevlastním bodě závisí výsledek pouze na stupni polynomu v čitateli a stupni polynomu ve jmenovateli.

## 4.2.4 Užití limity funkce

### 4.2.4.1 Asymptoty grafu funkce

Pojem asymptota byl uveden při probírání učiva o hyperbole, jakožto zvláštní případ přímky, která nemá s hyperbolou žádný společný žádný bod. S asymptotami se ale setkáváme v matematice nejen u hyperbol (což obecně nemusí být funkce), ale i u funkcí: lineárně lomená (rovnoosá hyperbola), exponenciální, logaritmická, funkce tangens a kotangens, ... Později uvidíme, že znalost asymptoty funkce je velmi důležitá pro správné sestavení grafu funkce: vlastnosti funkce v nevlastních bodech a v okolí bodů, v nichž funkce není definovaná, velmi úzce souvisí s asymptotami funkce. Jsou pochopitelně i funkce, které asymptoty nemají (sinus, kosinus, kvadratická funkce, ...).

Existují dva druhy asymptot:

1. asymptoty se směrnicí - jsou to přímky, které mají rovnici  $y = ax + b$ , kde  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , a jsou to asymptoty funkce v nevlastních bodech;
2. asymptoty bez směrnice - jsou přímky ve tvaru  $x = c$ , kde  $c \in \mathbb{R}$ , a jsou to asymptoty funkce v takových bodech  $c$ , v nichž není funkce definována.

#### 4.2.4.1.1 ASYMPTOTY SE SMĚRNICÍ

Ilustrační příklad: V analytické geometrii kvadratických útvarů v rovině byla probána hyperbola. Uvažme nyní hyperbolu  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ . Jedná se hyperbolu, která má střed v počátku soustavy souřadnic a jejíž hlavní osa je totožná s osou  $y$  (viz obr. 31). Na základě znalosti z analytické geometrie víme, že tato hyperbola má dvě asymptoty dané rovnicemi:  $y = \pm \frac{4}{3}x$ .

Jde tedy o příklad asymptot se směrnicí, přestože UVEDENÁ HYPERBOLA NENÍ FUNKCE.

**PŘÍMKA  $y = ax + b$  SE NAZÝVÁ ASYMPTOTA SE SMĚRNICÍ GRAFU FUNKCE  $f$ , JESTLIŽE**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad (1)$$

**RESP.**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0. \quad (2)$$

Definice plně odpovídá intuitivní představě, že asymptota je přímka, která nemá s grafem funkce společný žádný bod, pouze se ke grafu „přimykává a dotkne se ho až v nekonečnu“.

Představíme-li si pohyb dvou mravenců, z nichž jeden půjde do nekonečna po hyperbole zobrazené na obr. 31 a druhý půjde do nekonečna po její asymptotě, půjdou od jistého bodu téměř po stejné čáře - po asymptotě.

Výpočet koeficientů  $a$  a  $b$ , které určují příslušnou asymptotu, je možné provést na základě definice asymptoty a úpravou definičního vztahu např. (1). Pokud totiž platí vztah (1), tím spíše bude platit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} = 0. \quad (3)$$

Vydělíme-li velkým číslem výraz, který se rovnal nule, bude výsledek opět nulový.

$$\text{Vztah (3) je možné dále upravit: } 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - a - 0.$$

Odtud snadnou algebraickou úpravou získáme

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (4)$$

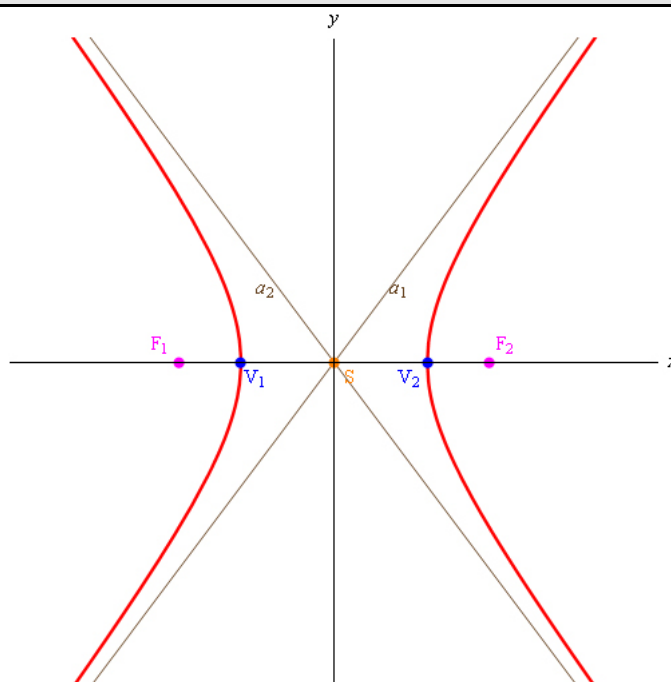
Podobným způsobem je možné nyní odvodit ze vztahu (1) vztah pro výpočet koeficientu  $b$ :

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax). \quad (5)$$

Analogicky lze odvodit příslušné vztahy pro koeficienty  $a$  a  $b$  asymptoty z definičního vztahu (2) asymptoty.

Vyjdou analogické vztahy jen místo limity v nevlastním bodě  $\infty$  budeme počítat tytéž vztahy v nevlastním bodě  $-\infty$ .

Asymptota vycházející z definičního vztahu (1) a asymptota vycházející z definičního vztahu (2) nejsou obecně stejné asymptoty.



obr. 31

**VĚTA: PŘÍMKA POPSANÁ ROVNICÍ  $y = ax + b$  JE ASYMPTOTOU SE SMĚRNICÍ GRAFU FUNKCE  $f$  PŘÁVĚ TEHDY, KDYŽ EXISTUJÍ LIMITY  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  A  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$  RESP.**

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{A} \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax).$$

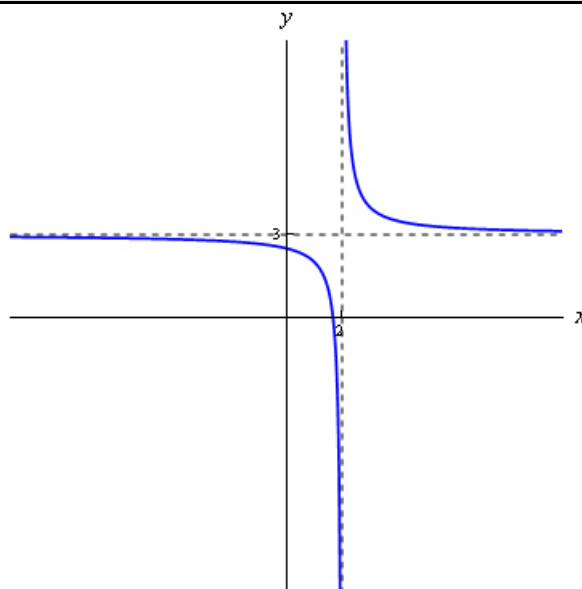
Asymptota není obecně přímka, která se pouze „přibližuje“ ke grafu funkce, ale nikde jí neprotne. Asymptota může graf funkce protnout ve vlastním bodě - pro asymptotu je důležité, jak „se chová“ v nevlastních bodech.

#### 4.2.4.1.2 ASYMPTOTY BEZ SMĚRNICE

Asymptoty bez směrnice jsou přímky rovnoběžné s osou  $y$ , které neprotínají graf funkce.

Pokud by asymptota bez směrnice protínala křivku v grafu, pak by tato křivka nebyla grafickým vyjádřením funkce.

Asymptota bez směrnice **NESMÍ PROTNOUT GRAF FUNKCE V ŽÁDNÉM BODĚ**. Asymptota se směrnici (viz odstavec 4.2.4.1.1) může graf funkce protnout ve vlastním bodě - v nevlastním bodě  $\pm\infty$  se k němu pak jen přibližuje.



obr. 32

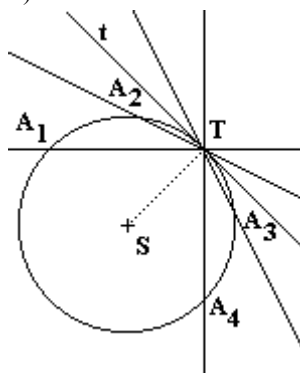
NECHŤ JE FUNKCE  $f$  DEFINOVÁNA V PRSTENCOVÉM OKOLÍ BODU  $c$  (TJ. V MNOŽINĚ  $U(c, \delta) - \{c\}$ ). PŘÍMKA DANÁ ROVNICÍ  $x=c$  SE NAZÝVÁ ASYMPTOTA BEZ SMĚRNICE GRAFU FUNKCE  $f$ , PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ MÁ FUNKCE  $f$  V BODĚ  $c$  ASPOŇ JEDNU JEDNOSTRANNOU NEVLASTNÍ LIMITU.

Ve shodě s definicí hledáme asymptoty bez směrnice u funkcí, u kterých existují body, v nichž není daná funkce definována. V jiných bodech asymptota bez směrnice neexistuje. Proto stačí vyšetřovat jednostranné limity pouze v bodech, v nichž není daná funkce definována.

Asymptotu bez směrnice má např. funkce  $f: y = \frac{1}{x-2} + 3$  v bodě  $x = 2$ . Asymptotou se směrnicí (která je v tomto případě rovna nule) je přímka  $y = 3$  - viz obr. 32.

#### 4.2.4.2 Tečna grafu funkce

V analytické geometrii byla probrána kružnice a její vzájemná poloha s přímkou. Jednou z možných poloh přímky a kružnice byla tečna ke kružnici, která byla definována jako přímka, která má s kružnicí společný právě jeden bod (bod dotyku  $T$ ) a která je kolmá na spojnici středu a tohoto dotykového bodu  $T$ . Prochází-li přímka dvěma různými body  $T$  a  $A$  kružnice, jedná se o sečnu. Čím blíže zvolíme bod  $A$  k bodu  $T$ , tím méně se liší poloha sečny  $TA$  od tečny  $t$  kružnice v bodě  $T$ . Říkáme, že tečna  $t$  je mezní (limitní) polohou sečny  $TA$ , blíží-li se bod  $A$  po kružnici k bodu  $T$  (viz obr. 33).



obr. 33

Při hledání tečny v daném bodě funkce  $f$  bude postup analogický s tím, že využijeme znalost limit pro nalezení mezního případu sečny grafu funkce, tj. nalezení tečny.

Vyšetřování tečny k dané křivce (resp. ke grafu funkce  $f$ ) má velké použití v aplikačních předmětech (fyzika, mechanika, elektrotechnika, ...): pomocí tečny lze linearizovat takové průběhy závislosti fyzikálních veličin, které podle teorie lineární být mají. Při měření pak vznikají vždy různé chyby, které linearitu závislosti porušují. Přesto je ale vhodné nalézt lineární průběh takových závislostí. A při hledání této linearizované závislosti je občas výše uvedený postup vhodný.

Pokud chceme napsat rovnici tečny  $t$  ve tvaru

$$y = kx + q \quad (6)$$

v bodě  $T = [x_0; y_0]$  funkce  $f$ , zvolíme na grafu funkce  $f$  ještě jeden bod  $A = [x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y]$  (viz obr. 34).

Body  $A$  a  $T$  je určena přímka  $p$ , která je sečnou grafu funkce  $f$ . Chceme-li napsat tečnu grafu funkce v bodě  $T$ , stačí si uvědomit, že pro zmenšující se přírůstek  $x$ -ové souřadnice  $\Delta x$  (tj. pro případ  $\Delta x \rightarrow 0$ ) se bod  $A$  přibližuje k bodu  $T$  a tudíž se sečna  $p$  blíží tečně  $t$ .

Při výkladu směrnice přímky (analytická geometrie lineárních útvarů v rovině), jsme zjistili, že směrnici  $k$  přímky lze vypočítat na základě následující úvahy: Nechť dva různé body  $A = [x_A; y_A]$  a  $B = [x_B; y_B]$  leží na přímce  $p$ , jejíž rovnice má směrnicový tvar (6) (viz obr. 35). Pro souřadnice uvedených bodů podle rovnice (6) platí:  $y_A = kx_A + q$  a  $y_B = kx_B + q$ . Dostáváme tedy soustavu dvou rovnic pro neznámé  $k$  a  $q$ . Po provedených úpravách pro směrnici  $k$  dostáváme:

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (7)$$

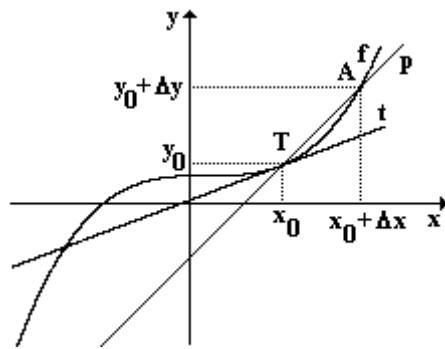
Směrnici  $k$  jsme tedy vyjádřili pomocí rozdílu souřadnic dvou bodů, které na dané přímce leží.

Analogicky je možné postupovat v případě, že chceme nalézt směrnici tečny grafu funkce na obr. 34. Směrnici  $k_t$  tečny  $t$  tedy můžeme určit jako limitní případ směrnice  $k_s$  sečny (přímka  $p$ ), tj. musí platit:

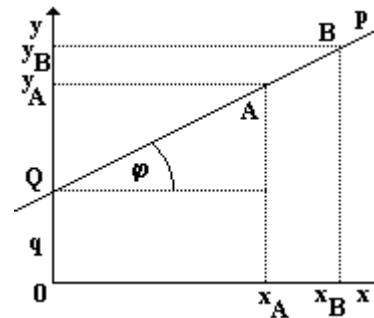
$$k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_s. \quad (8)$$

Přitom na základě právě připomenuté znalosti o směrnici přímky je možné směrnici  $k_s$  psát ve tvaru podle vztahu (7):  $k_s = \frac{y_0 + \Delta y - y_0}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Dostaneme tedy:

$$k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (9)$$



obr. 34



obr. 35

Přeznačíme-li souřadnice bodů  $T$  a  $A$  z obr. 34 na souřadnice  $T = [x_0; f(x_0)]$  a  $A = [x; f(x)]$ , je možné psát vztah (9) ve tvaru

$$k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (10)$$

Nyní je už možné napsat rovnici tečny v bodě  $T = [x_0; y_0]$ , neboť máme k dispozici její směrnici  $k_t$  a víme, že na této tečně leží kromě bodu  $T$  ještě libovolný bod  $X = [x; y]$ , jehož souřadnice musí splňovat vztah

$$k_t = \frac{y - y_0}{x - x_0}. \quad (11)$$

Rovnici tečny  $t$  tedy můžeme psát ve tvaru  $y - y_0 = k_t(x - x_0)$  a tedy

$$y = k_t(x - x_0) + y_0. \quad (12)$$

Je-li křivka grafem funkce  $y = f(x)$  a existuje-li v bodě  $x_0$  vlastní limita (10), pak tečna křivky v bodě  $T = [x_0; y_0]$  je přímka daná rovnicí (12).

S využitím derivace funkce lze napsat rovnici tečny ke grafu dané funkce pohodlněji (viz odstavec 4.4.2).

### 4.3 Spojitost funkce

Mezi všemi funkcemi, s nimiž se postupně seznamujeme, mají velký význam funkce spojité. Zhruba řečeno, spojitá funkce je funkce, jejíž graf lze nakreslit jedním tahem.

Při kreslení dané funkce na jejím definičním oboru tedy nesmíme zvednout tužku od papíru (křídla resp. fixu od tabule, ...) - musíme graf nakreslit jedním tahem.

Toto intuitivní tvrzení se ale opírá o geometrickou představu, která není u všech funkcí přístupná resp. použitelná. Proto je třeba tento intuitivní náhled zpřesnit tak, jak se o to snažili matematikové během historického vývoje matematiky.

#### 4.3.1 Spojitost v bodě a v intervalu

**FUNKCE  $f$  SE NAZÝVÁ SPOJITÁ V BODĚ  $a$ , JESTLIŽE JSOU SOUČASNĚ SPLNĚNY TYTO PODMÍNKY:**

1. FUNKCE  $f$  JE V BODĚ  $a$  DEFINOVANÁ;
2. EXISTUJE VLASTNÍ LIMITA  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ;
3. FUNKČNÍ HODNOTA V BODĚ  $a$  JE ROVNA VLASTNÍ LIMITĚ V TOMTO BODĚ, TJ.  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

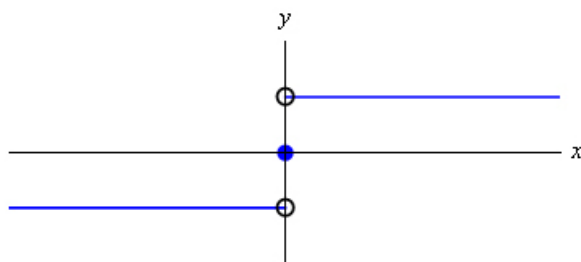
Bod 2 v uvedené definici mluví o existenci limity, tedy v daném bodě  $a$  musí existovat oboustranná vlastní limita.

Tak jako jednostranné limity (viz odstavec 4.2.1.2) překračují většinou běžné učivo středoškolské matematiky, tak i následující definice spojitosti funkce v daném bodě zprava resp. zleva nejsou předmětem běžného středoškolského kurzu matematiky.

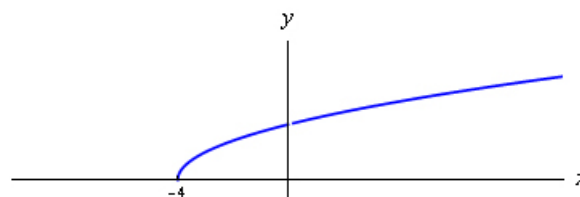
**FUNKCE  $f$  SE NAZÝVÁ SPOJITÁ ZPRAVA (RESP. ZLEVA) V BODĚ  $a$ , JESTLIŽE JSOU SOUČASNĚ SPLNĚNY TYTO PODMÍNKY:**

1. FUNKCE  $f$  JE V BODĚ  $a$  DEFINOVANÁ;
2. EXISTUJE VLASTNÍ JEDNOSTRANNÁ LIMITA  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  (RESP.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ );

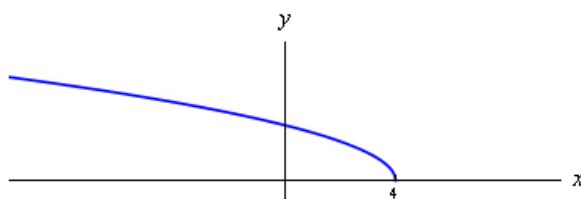
**3. FUNKČNÍ HODNOTA V BODĚ  $a$  JE ROVNA VLASTNÍ JEDNOSTRANNÉ LIMITĚ V TOMTO BODĚ, T.J.  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  (RESP.  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ).**



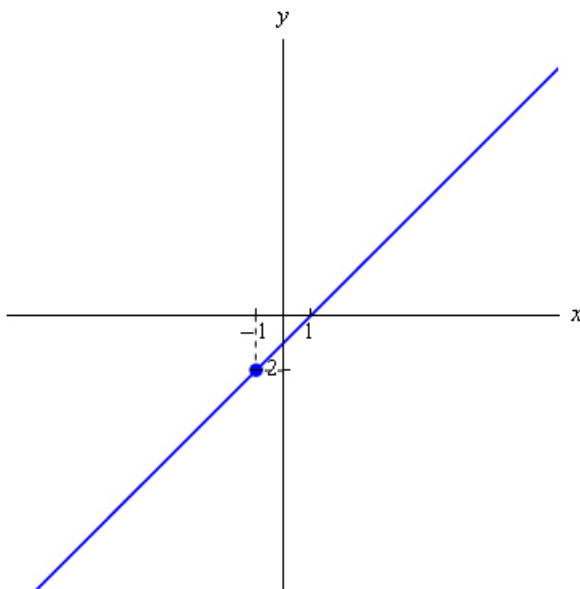
obr. 36



obr. 37



obr. 38



obr. 39

Máme-li nedefinovanou spojitost funkce v bodě, můžeme definici rozšířit na otevřený interval.

**FUNKCE  $f$  JE SPOJITÁ V OTEVŘENÉM INTERVALU  $(a; b)$ , JE-LI SPOJITÁ V KAŽDÉM BODĚ TOHOTO INTERVALU.**

V uzavřeném intervalu lze spojitost funkce definovat také.

**FUNKCE  $f$  JE SPOJITÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU  $\langle a; b \rangle$ , JE-LI SPOJITÁ V OTEVŘENÉM INTERVALU  $(a; b)$  A V BODĚ  $a$  JE SPOJITÁ ZPRAVA A V BODĚ  $b$  JE SPOJITÁ ZLEVA.**

Na obr. 36 je znázorněn graf funkce  $f: y = \operatorname{sgn} x$ , která je příkladem funkce nespojitě v jednom bodě - v bodě  $x = 0$ . Funkce  $g: y = \sqrt{x+4}$ , jejíž graf je zobrazen na obr. 37, má definiční obor  $D(g) = \langle -4; \infty \rangle$  a je tedy spojitá ve všech bodech otevřeného intervalu  $(-4; \infty)$ . V bodě  $x = -4$  je spojitá pouze zprava, neboť v levém okolí bodu  $x = -4$  není funkce  $g$  definována. Analogická je situace u funkce  $h: y = \sqrt{-x+4}$ , jejíž definiční obor je  $D(h) = (-\infty; 4)$  a jejíž graf je zobrazen na obr. 38. Tato funkce je spojitá ve všech bodech otevřeného intervalu  $(-\infty; 4)$  a v bodě  $x = 4$  je spojitá jen zleva.

Funkce, které nejsou spojitě, nemají ale body nespojitosti vždy stejného druhu. Existují funkce, které nejsou v určitém bodě spojitě (protože v daném bodě např. nejsou definovány), ale které je možné dodefinovat tak, aby v daném bodě a tedy i na svém definičním oboru (resp. na množině reálných čísel) spojitě byly.

Takovou funkcí je např. funkce  $m: y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ , jejíž definiční obor je  $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ . Na tomto definičním

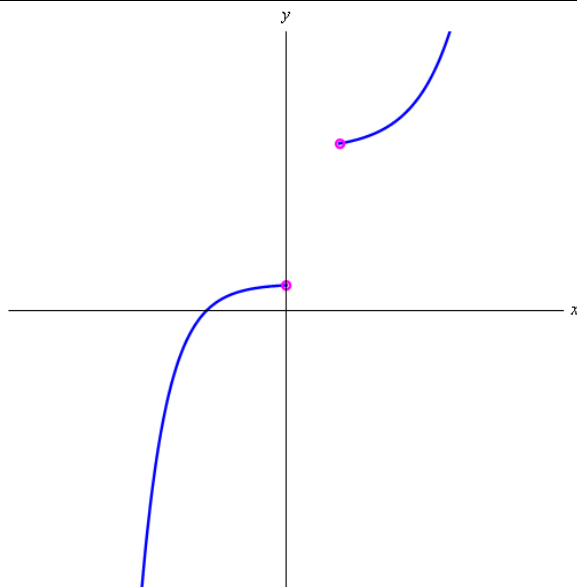
oboru je možné ale předpis funkce  $m$  upravit do tvaru:  $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$ . Získaná funkce  $n: y = x-1$  má sice stejný definiční obor jako funkce  $m$ , ale je možné ji v kritickém bodě  $x = -1$  dodefinovat přirozeným způsobem:  $n(-1) = -1-1 = -2$ . Získali jsme tak spojitou funkci, jejíž graf je na obr. 39.

Na rozdíl od toho např. funkci  $f: y = \operatorname{sgn} x$  (jejíž graf je na obr. 36) nelze žádným způsobem dodefinovat tak, aby byla spojitá.

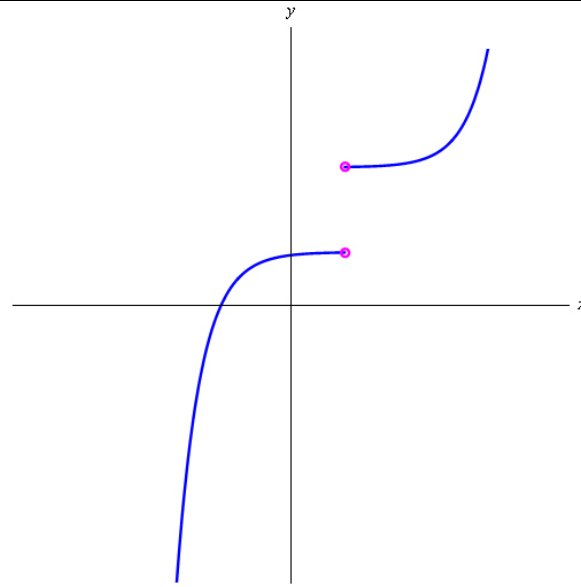
Další příklady funkcí, které nelze dodefinovat v bodech nespojitosti tak, aby byly v těchto bodech spojitě, jsou zobrazeny na obr. 40 a obr. 41.

**VĚTA: VŠECHNY ELEMENTÁRNÍ FUNKCE JSOU SPOJITÉ VE SVÝCH DEFINIČNÍCH OBORECH.**

To znamená, že jsou spojité polynomicke funkce, goniometrické funkce, exponenciální funkce, mocninné funkce, logaritmické funkce, ... (viz odstavec 4.1).



obr. 40



obr. 41

### 4.3.2 Spojité funkce na uzavřených intervalech

Zvláštní pozornost je věnována v matematické analýze spojitém funkcím na uzavřených intervalech. Spojité funkce totiž mají takové vlastnosti, na základě kterých se s nimi snáze pracuje. Pokud se omezíme na uzavřený interval, mají spojité funkce na tomto intervalu maximum a minimum, což je výhodné zejména pro aplikace matematiky.

**WEIERSTRASSOVA VĚTA: JE-LI FUNKCE  $f$  SPOJITÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU  $\langle a; b \rangle$ , EXISTUJE ALESPŇ JEDEN TAKOVÝ BOD  $x_1 \in \langle a; b \rangle$ , ŽE  $\forall x \in \langle a; b \rangle: f(x) \leq f(x_1)$ , A ALESPŇ JEDEN TAKOVÝ BOD  $x_2 \in \langle a; b \rangle$ , ŽE  $\forall x \in \langle a; b \rangle: f(x) \geq f(x_2)$ .**

Uvedenou větu lze formulovat také tak, že funkce spojitá v uzavřeném intervalu  $\langle a; b \rangle$  nabývá v tomto intervalu alespoň v jednom bodě svého maxima a alespoň v jednom bodě minima.

I kdyby se jednalo např. o lineární funkci, která na svém definičním oboru (reálná čísla) nemá maximum ani minimum, na uzavřeném intervalu extrémů má. V tomto případě by maximum a minimum funkce bylo v krajních bodech uvažovaného intervalu. Proto je důležité, aby se jednalo o **UZAVŘENÝ** interval, do nějž krajní body patří. Pro otevřený interval uvedená věta neplatí.

Stejně tak je důležitý předpoklad o spojitosti funkce. Maximum a minimum např. funkce  $f: y = \frac{1}{x}$  na intervalu  $\langle -1; 1 \rangle$  neexistuje, protože v bodě 0 má funkce  $f$  jednostranné nevlastní limity (viz odstavec 4.2.1.3) - tj. funkční hodnoty „utíkají do nekonečna“ a neexistuje tedy nejvyšší resp. nejnižší funkční hodnota.

**VĚTA: FUNKCE SPOJITÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU  $\langle a; b \rangle$  JE V TOMTO INTERVALU OMEZENÁ.**

**Příklad:** Omezené funkce jsou např. funkce:  $f: y = \cos x$  v intervalu  $\langle -\frac{3}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi \rangle$ ,  $g: y = x^2$  v intervalu  $\langle -3; 2 \rangle$ , ...

Ačkoliv je funkce  $g$  omezená jen zdola, pokud omezíme její vyšetřování na uzavřený interval, omezíme tím i její průběh. Proto je funkce  $g$  na uzavřeném intervalu omezená - přes nejvyšší funkční hodnotu na daném intervalu (v tomto případě přes hodnotu  $g(-3) = 9$ ) nás chování funkce prostě nezajímá.

**BOLZANOVA - WEIERSTRASSOVA VĚTA: JE-LI FUNKCE  $f$  SPOJITÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU  $\langle a; b \rangle$  A JE-LI  $f(a) \neq f(b)$ , POTOM KE KAŽDÉMU ČÍSLU  $K$ , KTERÉ LEŽÍ MEZI ČÍSLY  $f(a)$  A  $f(b)$ , EXISTUJE ALESPŇ JEDEN TAKOVÝ BOD  $c \in \langle a; b \rangle$ , ŽE PLATÍ  $f(c) = K$ .**

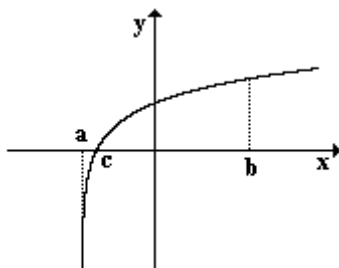
Uvedené větě se někdy též říká věta o nabývání mezihodnot, protože podle ní funkce  $f$  nabývá všech hodnot mezi funkčními hodnotami  $f(a)$  a  $f(b)$ . **Pozor!** Tato věta platí pouze pro spojité funkce.



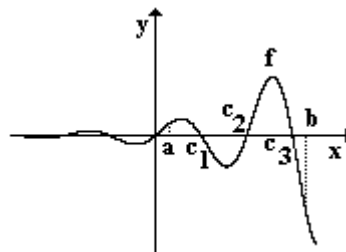
Pro praktické použití je ale důležitý důsledek právě uvedené věty, na základě něhož je možné řešit řadu problémů z oblasti rovnic a nerovnic.

**DŮSLEDEK BOLZANOVY - WEIERSTRASSOVY VĚTY: JE-LI FUNKCE  $f$  SPOJITÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU  $\langle a; b \rangle$  A MAJÍ-LI ČÍSLA  $f(a)$  A  $f(b)$  RŮZNÁ ZNAMÉNKA (TJ. PLATÍ-LI  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ), POTOM EXISTUJE ALESPŇ JEDEN TAKOVÝ BOD  $c \in (a; b)$ , PRO KTERÝ PLATÍ  $f(c) = 0$ .**

Věta hovoří o existenci alespoň jednoho bodu, který má dané vlastnosti. To znamená, že tento bod může být jeden (viz obr. 42) nebo takových bodů může být více (viz obr. 43). Z obrázků (i z uvedené věty) je patrné, že funkce  $f$  mění v okolí bodu  $c$  znaménko, čehož se využívá při přibližném řešení rovnic a nerovnic.



obr. 42



obr. 43

#### 4.4 Derivace funkce

Derivace funkce patří spolu s limitami k nejdůležitějším závěrům infinitezimálního počtu. Na základě derivace funkce je možné vyšetřovat nejen průběh funkcí v matematice (viz odstavec 4.7), ale i řešit řadu příkladů z technické praxe. Derivace totiž umožňuje popsat průběh veličin, které se mění v závislosti na jiných veličinách (např. uražená dráha v závislosti na čase - viz odstavec 4.4.1).

##### 4.4.1 Fyzikální význam derivace

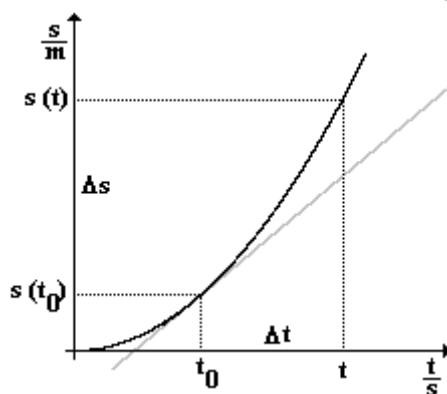
V odstavci 4.2.4.2 jsme v souvislosti s určením rovnice tečny grafu funkce v jejím bodě  $T = [x_0; y_0]$  vyšetřovali limitu (10). Tuto limitu jsme psali ve tvaru

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (13)$$

Tato limita má geometrickou interpretaci: udává směrnici tečny grafu funkce v jejím bodě  $T = [x_0; y_0]$ .

S limitou ve tvaru (13) je možné se setkat nejen v matematice, ale i ve fyzice. Uvažujme pohyb hmotného bodu, u kterého budeme měřit čas  $t$  jeho pohybu a zároveň sledovat závislost  $s(t)$  uražené dráhy od okamžiku začátku měření, tj. od okamžiku  $t = 0$  s. Graf závislosti uražené dráhy na čase je zobrazen na obr. 44. Za čas  $\Delta t = t - t_0$  urazil hmotný bod dráhu délky  $\Delta s = s(t) - s(t_0)$ . Na základě těchto údajů je možné určit **velikost průměrné rychlosti**  $v_p$  v uvažovaném časovém intervalu  $\langle t_0; t_0 + \Delta t \rangle$ . Dostaneme

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}. \quad (14)$$



obr. 44

Velikost průměrné rychlosti bude vypovídat o velikosti rychlosti v čase  $t_0$  tím přesněji, čím menší bude přírůstek času  $\Delta t$ , na kterém pohyb hmotného bodu vyšetřujeme. Na základě znalostí limit tedy můžeme **velikost okamžité rychlosti**  $v$  v čase  $t_0$  definovat vztahem

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}. \quad (15)$$

Velikost okamžité rychlosti, kterou udává např. tachometr v automobilu nebo cyklocomputer při jízdě na kole, je vlastně velikost průměrné rychlosti měřené na velmi malém časovém (a tedy i dráhovém) intervalu. U cyklocomputeru je to přímo vidět: velikost okamžité rychlosti je velikost průměrné rychlosti na dráze rovné obvodu předního kola, v jehož výpletu je umístěn snímač měřící velikost rychlosti.

Ve shodě s odstavcem 4.2.4.2 tedy můžeme říci, že velikost okamžité rychlosti pohybu hmotného bodu v daném čase  $t_0$  získáme jako směrnicí tečny, kterou bychom v příslušném bodě vedli ke grafu závislosti uražené dráhy na čase.

Srovnáme-li totiž vztahy (13) a (15), je zřejmé, že jsou formálně stejné - liší se jen v názvech použitých funkcí a proměnných.

Jak je vidět, v právě uvedeném příkladu jsme pracovali s limitou typu  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , tj. s limitou podílu přírůstku funkce a přírůstku nezávislé proměnné. Tato limita a postup z právě uvedeného příkladu o pohybu hmotného bodu mají v matematice zásadní význam. Proto má limita  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  své vlastní označení a název: derivace funkce (viz odstavce 4.4.2).

#### 4.4.2 Definice derivace

**NECHŤ FUNKCE  $f$  JE DEFINOVANÁ V JISTÉM OKOLÍ BODU  $x_0$ . EXISTUJE-LI LIMITA  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ , NAZÝVÁME JI DERIVACÍ FUNKCE  $f$  V BODĚ  $x_0$ . ZNAČÍ SE  $f'(x_0)$ .**

V definici se nemluví o tom, jestli musí existovat vlastní nebo nevlastní limita. Důležité je, aby limita vůbec existovala. Derivace pak může být vlastní i nevlastní, i když s nevlastní derivací se příliš často ve středoškolské matematice nesetkáme.

Vzhledem k tomu, že  $\Delta x = x - x_0$  je možné derivaci funkce  $f$  psát ve tvaru

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (16)$$

Symbolem  $f'(x_0)$  resp. symbolem  $y'(x_0)$  se značí derivace funkce  $f$  podle proměnné  $x$ .

Vzhledem k tomu, že teorie funkcí v matematice pracuje téměř výhradně s proměnnou  $x$ , nebylo by nutné další značení zavádět. Ale protože derivace je velmi důležitá operace s funkcemi pro aplikační předměty, je nutné si uvědomit, znát a chápat další způsoby značení derivace funkce. Naprosto exaktně správně by se měla derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  podle proměnné  $x$  značit symbolem  $\frac{df}{dx}(x_0)$  (resp.  $\frac{dy}{dx}$ ), který připomíná souvislost derivace s podílem  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  podle vztahu (16).

Podrobnější vysvětlení je uvedeno v odstavci 4.5, v němž je definován diferenciál funkce.

Ve fyzice a dalších aplikačních předmětech se velmi často vyšetřují průběhy fyzikálních veličin v závislosti na čase (viz motivační příklad v odstavci 4.4.1). Proto se používá pro derivaci dané fyzikální závislosti  $y$  podle času  $t$  zvláštní označení:  $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$  (nad příslušnou funkcí se dělá tečka).

Shrnutí: čárkou nad názvem funkce se značí vždy derivace podle proměnné  $x$ , tečkou nad názvem funkce se značí vždy derivace podle času  $t$ . V ostatních případech (derivace funkce  $f$  podle náboje  $Q$ , podle elektrického proudu  $I$ , ...) je nutné použít značení pomocí „zlomku“ (tj.  $\frac{df}{dQ}$ ,  $\frac{df}{dI}$ , ...).

Srovnáme-li definiční vztah derivace, tj. vztah (16), se vztahem (10) pro směrnicí tečny grafu funkce v jejím bodě  $T = [x_0; y_0]$  z odstavce 4.2.4.2, zjistíme, že oba výrazy jsou totožné. Na základě toho je tedy možné říci, že **derivace funkce v bodě  $T = [x_0; y_0]$  je směrnicí tečny grafu funkce v uvedeném bodě**. Rovnici tečny grafu funkce v jejím bodě  $T = [x_0; y_0]$  je možné na základě právě uvedeného psát ve tvaru

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0), \quad (17)$$

který je totožný se vztahem (12). Vztah (17) je ale pro praktické použití výhodnější, neboť dává návod na výpočet směrnic tečny.

Směrnicí tečny v daném bodě určíme tak, že zadanou funkci zderivujeme a do zderivovaného vztahu dosadíme za  $x$  konkrétní bod  $x_0$ , v němž tečnu máme nalézt.

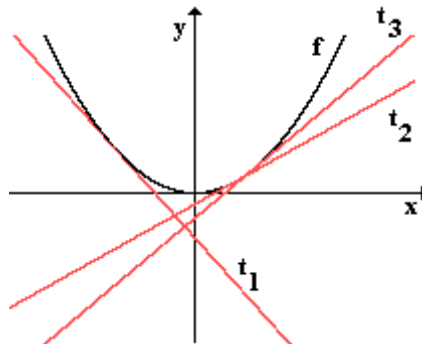
Výpočet derivace lze provádět přímo s využitím definice derivace, tj. s využitím vztahu (16).

**Příklad:** Vypočítejte derivaci funkce  $f: y = x^2$  v bodě  $x_0 \in D(f)$ .

**Řešení:** Vzhledem k tomu, že  $D(f) = \mathbb{R}$ , budeme hledat derivaci v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Na základě definice derivace (vztah (16)) je možné psát:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Za  $x_0$  je možné volit libovolný bod z definičního oboru, čímž dostaneme hodnoty derivace v různých bodech. To znamená, že tečny sestrojené v různých bodech grafu funkce  $f: y = x^2$  mají různou směrnici (viz obr. 45).



obr. 45

Podobným způsobem je možné odvodit ze znalostí výpočtu limit derivace libovolné funkce. V rámci urychlení a přehlednosti výpočtů ale existuje tabulka předem vypočítaných derivací elementárních funkcí (viz odstavec 4.4.5).

#### 4.4.3 Derivace vyšších řádů

V příkladu na konci odstavce 4.4.2 byla vypočtena na základě definice derivace funkce (šlo o funkci  $f: y = x^2$ ) v bodě  $x_0 \in D(f) = \mathbb{R}$ . Pokud ale nemáme na mysli konkrétní bod, v němž derivaci vyšetřujeme, je možné vyjádřit derivaci v libovolném bodě  $x \in D(f)$  a psát (v tomto konkrétním případě)  $f'(x) = 2x$ . Na derivaci funkce v tomto tvaru lze tedy nahlížet jako na funkci proměnné  $x$ . Bude-li mít funkce  $y' = f'(x)$  opět derivaci (viz definice v odstavci 4.4.2), označíme ji  $y''$  (resp.  $y''(x)$  resp.  $f''(x)$  resp.  $\frac{d^2y}{dx^2}$ ) a nazýváme ji

**druhou derivací funkce**  $y = f(x)$ .

Pozor! Symbol  $\frac{d^2y}{dx^2}$  je skutečně napsán dobře a dvojky jsou „umístěné“ na správných místech.

Analogicky lze zavést třetí derivaci funkce, čtvrtou derivaci funkce, pátou derivaci funkce, ... Pro praktické účely (vyšetřování průběhů funkcí, fyzikální a technické aplikace, ...) však většinou vystačíme se druhou derivací funkce.

#### 4.4.4 Vlastnosti derivace

Derivaci v bodě (viz odstavec ) lze rozšířit i na derivaci na otevřeném intervalu.

**FUNKCE  $f$  MÁ V OTEVŘENÉM INTERVALU  $(a; b)$  DERIVACI, JESTLIŽE MÁ DERIVACI V KAŽDÉM VNITŘNÍM BODĚ TOHOTO INTERVALU, TJ. V LIBOVOLNÉM BODĚ  $x \in (a; b)$ .**

Definovat derivaci v uzavřeném intervalu není nyní možné: v krajních bodech uzavřeného intervalu neexistuje limita (oboustranná limita), protože s bodem do daného intervalu nepatří i jeho okolí. Bylo by možné mluvit o pravém okolí počátečního bodu intervalu resp. levém okolí koncového bodu intervalu a v těchto bodech uvažovat jednostranné limity a jednostranné derivace.

Spojitosť funkce (viz odstavec 4.3) souvisí s limitou funkce (viz odstavec 4.2) a derivace byla definována pomocí limit, proto spolu souvisí derivace funkce a spojitost funkce. O tom mluví důležitá věta matematické analýzy.

**VĚTA: MÁ-LI FUNKCE  $f$  V BODĚ  $x_0 \in D(f)$  DERIVACI, JE V TOMTO BODĚ SPOJITÁ.**

**Pozor!!!** Obrácená věta neplatí. Tedy je-li funkce  $f$  v bodě  $x_0 \in D(f)$  spojitá, nemusí mít v bodě  $x_0$  derivaci. Jako příklad právě uvedeného tvrzení poslouží funkce  $f: y = |x|$ . Její definiční obor je  $D(f) = \mathbb{R}$  a tato funkce je ve svém definičním oboru spojitá. V bodě  $x_0 = 0$  ale nemá derivaci. Podle definice derivace pomocí vztahu (16) (viz odstavec 4.4.2) pro derivaci v bodě  $x_0 = 0$  platí

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Tato limita ale neexistuje, protože limita zleva

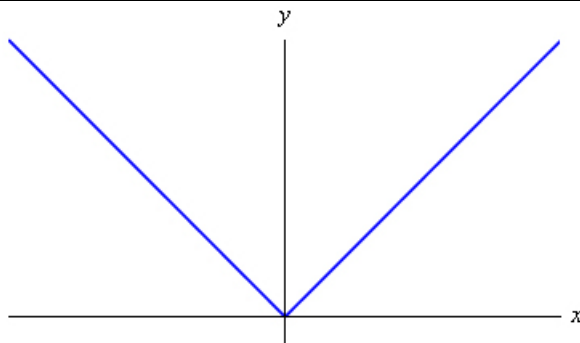
a limita zprava se nerovnájí. Pro limitu zleva totiž platí  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$  a pro limitu v tomtéž bodě

zprava platí  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$ .

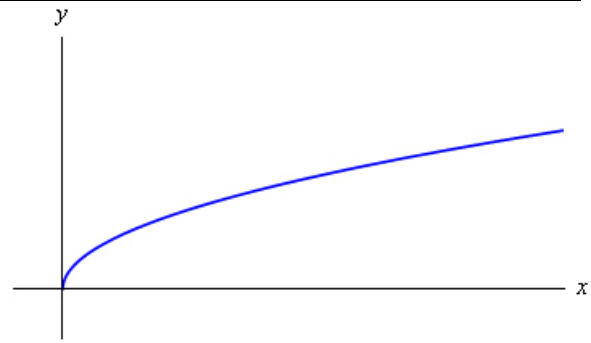
Neexistence derivace v daném bodě znamená i to, že v daném bodě nelze sestrojit tečnu k danému grafu funkce.

Tečna je přímka, která nahrazuje v okolí daného bodu graf funkce (tečna je přímka „přilepená v daném bodě ke grafu funkce“). V bodě 0 na grafu funkce  $f: y = |x|$  (viz obr. 46) je ale „špička“ a tudíž tečnu nelze „dobře přilepit“ (na grafu funkce „se viklá“). Obecně tedy tečna (a tedy i derivace) neexistuje v těch bodech grafu funkce  $f$ , v nichž je sice funkce spojitá, ale graf tvoří v daném bodě „špičku“. A to je případ hlavně nulových bodů absolutních hodnot, které se vyskytnou v předpisu konkrétní funkce.

Dále je nutné dávat pozor na nulové body argumentů odmocnin - v nich je derivace také „problematická“.



obr. 46



obr. 47

Proto se zavádí (analogicky jako u limit) jednostranné derivace.

**NECHŤ FUNKCE  $f$  JE DEFINOVANÁ V JISTÉM OKOLÍ BODU  $x_0$ . EXISTUJE-LI LIMITA**

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ , NAZÝVÁME JI DERIVACÍ FUNKCE  $f$  V BODĚ  $x_0$  ZLEVA. TATO

DERIVACE SE ZNAČÍ  $f'_-(x_0)$ .

**NECHŤ FUNKCE  $f$  JE DEFINOVANÁ V JISTÉM OKOLÍ BODU  $x_0$ . EXISTUJE-LI LIMITA**

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ , NAZÝVÁME JI DERIVACÍ FUNKCE  $f$  V BODĚ  $x_0$  ZPRAVA. TATO

DERIVACE SE ZNAČÍ  $f'_+(x_0)$ .

Definice jednostranných derivací (stejně jako definice derivace v odstavci 4.4.2) požaduje pouze existenci jednostranné limity. Nepožaduje, zda má být limita vlastní či nevlastní.

Podle toho pak bude i příslušná derivace funkce vlastní nebo nevlastní. Nevlastní jednostrannou derivaci má např. graf funkce  $g: y = \sqrt{x}$  v bodě  $x_0 = 0$  (viz obr. 47): tečna grafu v tomto bodě je kolmá na osu  $x$ . Její směrnice je tedy nekonečná.

Na základě jednostranných derivací je možné zavést derivaci v uzavřeném intervalu (resp. v polouzavřeném intervalu či v polootevřeném intervalu).

**FUNKCE  $f$  MÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU  $\langle a; b \rangle$  DERIVACI, JESTLIŽE MÁ DERIVACI V KAŽDÉM BODĚ  $x \in (a; b)$  A V BODĚ  $a$  MÁ DERIVACI ZPRAVA A V BODĚ  $b$  MÁ DERIVACI ZLEVA.**

#### 4.4.5 Derivace elementárních a složených funkcí

Jedním z předpokladů pro správné (a rychlé) využívání metod infinitezimálního počtu při řešení praktických úloh je dobrá znalost derivace elementárních funkcí a základní pravidla pro počítání derivací. K tomu slouží následující přehled funkcí a jejich derivací (viz tab. 1) a základních pravidel pro počítání s derivacemi, které je možné odvodit na základě definice derivace (viz vztah (16) v odstavci 4.4.2).

V tab. 1 jsou uvedeny elementární funkce, které mají derivace ve svých definičních oborech. V tabulce jsou též u daných funkcí uvedeny jejich primitivní funkce, které jsou zavedeny a vysvětleny v odstavci 5.2.

Hodnoty primitivních funkcí, které nejsou v tab. 1 uvedeny, lze dopočítat se znalostmi z integrálního počtu (viz odstavec 5.2.3) a je tedy zbytečné se je učit zpaměti.

Na základě jistých pravidel (která je možné odvodit pomocí definice derivace nebo pomocí vlastností limit) je možné též zavést derivaci součtu dvou funkcí, derivaci rozdílu dvou funkcí, derivaci součinu dvou funkcí a derivaci podílu dvou funkcí.

Funkce	Derivace funkce	Primitivní funkce
$y = k ; k \in \mathbb{R}$	$y' = 0$	$F(x) = kx + C ; C \in \mathbb{R}$
$y = x^n$ ( $x$ závisí na volbě $n$ )	$y' = nx^{n-1}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C ; n \neq -1 ; C \in \mathbb{R}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$F(x) = -\cos x + C ; C \in \mathbb{R}$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$F(x) = \sin x + C ; C \in \mathbb{R}$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	
$y = e^x$	$y' = e^x$	$F(x) = e^x + C ; C \in \mathbb{R}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C ; C \in \mathbb{R}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	

tab. 1

**VĚTA: JESTLIŽE FUNKCE  $u(x)$  A  $v(x)$  MAJÍ DERIVACI V BODĚ  $x_0$ , MÁ V BODĚ  $x_0$  DERIVACI I SOUČET, ROZDÍL A SOUČIN FUNKCÍ  $u(x)$ ,  $v(x)$  A PRO  $v(x) \neq 0$  TAKÉ PODÍL  $\frac{u(x)}{v(x)}$  A PLATÍ:**

$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x), \quad (18)$$

$$[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x), \quad (19)$$

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad (20)$$

A

$$\left[ \frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}. \quad (21)$$

Dále je možné zavést derivaci složené funkce (viz odstavec 4.1).

**VĚTA: JESTLIŽE FUNKCE  $z = g(x)$  MÁ DERIVACI V BODĚ  $x_0$  A JESTLIŽE FUNKCE  $y = f(z)$  MÁ DERIVACI V BODĚ  $z_0 = g(x_0)$ , MÁ SLOŽENÁ FUNKCE  $y = f(g(x))$  DERIVACI V BODĚ  $x_0$  A PLATÍ**

$$[f(g(x_0))]' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \quad (22)$$

Na první pohled vypadá návod na derivaci složené funkce nepřehledně a složitě, ale složená funkce se derivuje tak, že se zderivuje funkce vnitřní a násobí se derivací funkce vnější. Stejným způsobem se postupuje, je-li funkce složena z více funkcí.

Pro názornost konkrétní příklad.

**Příklad:** Určete derivaci funkce  $h : y = \sin^3 2x$ .

**Řešení:** Podle vztahu (22) můžeme psát:  $(\sin^3 2x)' = \underbrace{3 \sin^2 2x}_{\text{derivace } \alpha^3} \cdot \underbrace{\cos 2x}_{\text{derivace } \sin \beta} \cdot \underbrace{2}_{\text{derivace } 2x} = 6 \sin^2 2x \cdot \cos 2x$ .

#### 4.4.6 Funkce více proměnných

Až dosud byly rozebírány vlastnosti limit funkce, spojitosti funkce a derivace funkcí jedné reálné proměnné. Při žádném vyšetřování uvedených vlastností nebylo výslovně zdůrazňováno, že se jedná o funkce jedné reálné proměnné, neboť tento předpoklad byl jasný. Nicméně nejen v matematice, ale i v jejích technických aplikacích hrají podstatnou roli funkce více proměnných. To jsou funkce, které nejsou definované jen na množině reálných čísel, ale na kartézském součinu (kartézské mocnině) množiny reálných čísel (resp. její neprázdné podmnožině).

**4.4.6.1 Nástin definice funkce více proměnných**

**Příklad:** Ve středoškolské fyzice se zavádí minimálně jedna funkce více proměnných – např. rovnice postupného mechanického vlnění. Rovnice pro okamžitou výchylku  $y$  (se zanedbáním všech odporových sil) má tvar

$$y = y_m \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right),$$

kde  $y_m$  je amplituda kmitání zdroje vlnění (a tedy i amplituda vlnění),  $T$  je perioda kmitání zdroje vlnění (a tedy i perioda vlnění) a  $\lambda$  je vlnová délka vlnění.  $t$  a  $x$  jsou parametry, na kterých závisí okamžitá výchylka daného bodu. U vlnění se totiž nestačí ptát, jaká bude výchylka v určitém časovém okamžiku  $t$  (jako u kmitání), ale musíme se ptát i u jakého bodu danou výchylku vyšetřujeme, tj. v jaké vzdálenosti  $x$  od zdroje vlnění se tento bod nachází.

Z matematického hlediska je tedy rovnice popisující okamžitou výchylku daného bodu ve vlnícím se prostředí funkcí dvou proměnných - v tomto případě proměnných  $t$  a  $x$ .

Obecně tedy funkce více proměnných je funkce, která je definována na množině  $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ krát}} = \mathbb{R}^n$  a funkční závislost je možné vyjádřit předpisem

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (23)$$

Pokud budeme chtít sestrojit graf funkce dané předpisem (23), budeme potřebovat  $(n+1)$  rozměrný prostor se zavedeným systémem souřadnic.

Při sestrovování grafu funkce jedné proměnné potřebujeme dvourozměrnou rovinu se zavedeným systémem souřadnic. U funkce  $n$  proměnných potřebujeme  $n$  os ( $n$  souřadnic) pro těchto  $n$  nezávislých proměnných a jednu osu (souřadnici) pro závislou proměnnou (pro funkční hodnotu  $f$  vypočtenou pomocí vztahu (23)).

Představit si graf takové funkce obecně je obecně dost náročné. Přesto si můžeme rámcovou představu udělat alespoň pro funkci dvou proměnných. Vyjdeme opět z grafu funkce jedné proměnné, kterým je nějaká rovinná křivka. Grafem funkce dvou proměnných pak bude nějaká plocha, která se bude nacházet nad (nebo pod) rovinou  $x_1, x_2$  kartézského systému souřadnic  $0x_1x_2x_3$  (souřadnice  $x_3$  zde má význam roli souřadnice  $z$ , tj. přímo funkční hodnoty dané funkce).

Graf funkce jedné proměnné nakreslený v systému souřadnic v rovině si tedy můžeme představit jako kus ohnutého drátku. Graf funkce dvou proměnných, který kreslíme do trojrozměrného systému souřadnic, si pak lze představit jako plastickou mapu. Podobné mapy bývají k vidění zejména v horských informačních střediscích. Souřadnice  $x$  a  $y$  v tomto případě odpovídají zeměpisné šířce a zeměpisné délce, funkční hodnota funkce  $f$  pak odpovídá nadmořské výšce daného bodu.

Pro vyšetřování vlastností funkcí více proměnných (a to nejen z hlediska matematiky, ale i fyziky a dalších technických předmětů) je vhodné znát i derivaci těchto funkcí více proměnných. Z toho, co bylo zatím uvedeno (a ještě uvedeno bude) v odstavci 1.1.1, je zřejmé, že derivace funkce jedné proměnné, je poměrně mocný nástroj, s jehož pomocí můžeme o dané funkci zjistit řadu důležitých vlastností. Stejně tak mocným nástrojem je i derivace funkce více proměnných. U funkcí více proměnných je možné k derivaci přistupovat různým způsobem, v závislosti na tom, jaké informace chceme o funkci zjistit. Jednou z možností zavedení derivace funkce více proměnných, která je jen zobecněním postupu derivace funkce jedné proměnné (viz odstavce 4.4.2), je zavedení tzv. **parciálních derivací (částečných derivací)**, které jsou popsány v odstavci 4.4.6.2.

Použití parciálních derivací např. na vyšetřování průběhu funkcí, na hledání extrémů funkcí, ... je poněkud složitější, protože vyžaduje hlubší matematický aparát.

**4.4.6.2 Parciální derivace funkce více proměnných**

Parciální derivace (částečné derivace) funkce více proměnných jsou definovány podobně jako derivace funkce jedné proměnné, tj. pomocí limity (viz odstavce 4.4.2). Funkční hodnota funkce více proměnných daná vztahem (23) ovšem závisí na  $n$  proměnných. Proto je nutné při derivaci takové funkce postupovat opatrně. V dalším textu bude problematika vysvětlena bez použití přesných matematických definic.

V dalším výkladu se omezíme jen na funkce maximálně tří proměnných, protože ty se zejména ve fyzice vyskytují nejčastěji (řada fyzikálních veličin je totiž závislá na prostorových souřadnicích  $x$ ,  $y$ , a  $z$ ). Vyskytne-li se funkce čtyř proměnných tj. k prostorovým souřadnicím se přidá ještě čas (např. v elektromagnetismu, v kvantové fyzice, v teorii relativity, ...), bude situace analogická.

Parciální derivace, jak už vyplývá z názvu, se zabývá derivací dané funkce po částech. To znamená, že se budeme zajímat o derivaci ve směru osy  $x$ , osy  $y$ , ... Ostatní proměnné zůstanou při derivaci beze změny. Parciální derivace se značí podobně jako derivace funkce jedné proměnné. Nemůžeme ale použít značení pomocí čárky (např.  $f'$ ) jako u funkcí jedné proměnné, protože musíme zdůraznit, podle které proměnné se derivuje.

Pokud bude dána funkce  $f$  předpisem

$$f = f(x, y, z), \quad (24)$$

pak se zavádějí tři parciální derivace:

1. parciální derivace funkce  $f$  podle proměnné  $x$ :  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ;
2. parciální derivace funkce  $f$  podle proměnné  $y$ :  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ;
3. parciální derivace funkce  $f$  podle proměnné  $z$ :  $\frac{\partial f}{\partial z}$ .

Při vlastním derivování platí všechna pravidla uvedená v odstavcích 4.4.4 a 4.4.5, jen je třeba dát pozor na následující fakt. Derivujeme-li např. podle proměnné  $x$ , všechny ostatní proměnné ( $y, z, \dots$ ) jsou pro nás konstanty.

**Příklad:** Určete parciální derivace funkce  $f$ , která je dána takto:  $f(x, y, z) = \frac{3x^2y + 4y^2 \sin z - z^2}{y+2}$ .

**Řešení:** Podle pravidel z odstavců 4.4.4 a 4.4.5 budeme postupně určovat jednotlivé parciální derivace s tím, že proměnná, podle níž se nederivuje, je pro tu chvíli konstantou.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3 \cdot 2 \cdot xy + 0 + 0}{y+2} = \frac{6xy}{y+2}$  (výraz  $y+2$  ve jmenovateli zůstal, protože to byla „konstanta“, kterou byl vydělen výraz obsahující  $x$ )

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(3x^2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot y \sin z - 0)(y+2) - 1 \cdot (3x^2y + 4y^2 \sin z - z^2)}{(y+2)^2} = \frac{(3x^2 + 8y \sin z)(y+2) - (3x^2y + 4y^2 \sin z - z^2)}{(y+2)^2} =$

(vzhledem k zadání funkce bylo třeba použít ke správnému derivování vztah pro derivaci podílu)

$= \frac{3x^2y + 8y^2 \sin z + 6x^2 + 16y \sin z - 3x^2y - 4y^2 \sin z + z^2}{(y+2)^2} = \frac{4y^2 \sin z + 6x^2 + 16y \sin z + z^2}{(y+2)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{0 + 4y^2 \cos z - 2z}{y+2} = \frac{4y^2 \cos z - 2z}{y+2}$

Tak jako má první derivace funkce jedné proměnné geometrický význam ve směrnici tečny (viz odstavec 4.4.2), má podobný význam i parciální derivace. Pro lepší vysvětlení významu parciální derivace funkce více proměnných začneme s velmi jednoduchým vysvětlením významu derivace funkce jedné proměnné.

Představme si graf nějaké funkce jedné proměnné - např. funkce  $f: y = x^2$ . Derivace této funkce je  $f'(x) = 2x$ . Víme, že hodnota první derivace v daném bodě definičního oboru funkce  $f$  určuje v tomto bodě grafu funkce  $f$  směrnici tečny. Na základě toho pak můžeme rozhodnout o monotónnosti funkce (viz odstavec 4.7.2).

To znamená, že pro mravenec, který by lezl po drátku vytvarovaném do tvaru paraboly  $y = x^2$  a umístěném ve svislé rovině, by číslo  $f'(x)$  udávalo v každém bodě sklon této paraboly, tj. jak moc to má mravenec do kopce nebo z kopce. Jestli jde do kopce nebo z kopce by mravenec poznal podle znaménka čísla  $f'(x)$ : pro  $f'(x) < 0$  jde z kopce, pro  $f'(x) > 0$  jde do kopce a pro  $f'(x) = 0$  by šel po rovině.

Analogická je situace i pro funkce více proměnných. Z důvodů snadnějšího výkladu se omezíme na funkci  $f$  dvou proměnných  $x$  a  $y$ , která je dána předpisem

$$f = f(x, y). \quad (25)$$

Parciální derivace zadané funkce dané předpisem (25) určují v daném bodě o souřadnicích  $[x; y; f(x, y)]$  směrnici tečny ve směru dané osy, která je pojmenována stejným názvem, jako je název proměnné, podle níž se derivuje.

V analogii s mravencem se tedy mravenec tentokrát nepohybuje po drátku, ale po plastické mapě (viz analogie z odstavce 4.4.6.1). Podle parciální derivace  $\frac{\partial f}{\partial x}$  mravenec pozná, jak moc půjde do kopce (z kopce, po rovině), půjde-li ve směru osy  $x$ . Na základě parciální derivace  $\frac{\partial f}{\partial y}$  získá tutéž informaci pro chůzi ve směru osy  $y$ .

Vyšetřování monotónnosti funkce více proměnných v obecném směru je poněkud komplikovanější, ale i tento problém je schopna vyřešit vysokoškolská matematika.

#### 4.4.7 **Implicitně zadané funkce a jejich derivace**

V matematice, ale občas i v jejích technických aplikacích (fyzika, elektrotechnika, ...) se občas vyskytnou i funkce zadané jinak, než běžným způsobem. Jedním ze způsobů, jak zadat jinak funkce, je implicitní zadání funkce (funkce dané implicitně). Takto zadané funkce tedy nejsou vyjádřené předpisem pro výpočet jedné

proměnné (v matematice to bývá většinou proměnná  $y$ ) v závislosti na jiné proměnné (v matematice to bývá většinou proměnná  $x$ ), ale jsou zadány rovnicí, v níž obě neznámé vystupují.

**Příklad:** Rovnici kružnice v obecném tvaru  $x^2 + y^2 - 25 = 0$  lze považovat za implicitně zadanou funkci. Ačkoliv se o funkci v žádném případě nejedná, lze volbou vhodného omezení dosáhnout toho, že rovnice bude funkci skutečně popisovat (např. volbou  $x \in \langle -5; 5 \rangle$  a  $y \geq 0$ ).

Implicitně zadávané funkce se používají většinou v diferenciální geometrii, teorii křivek, v technických aplikacích, ..., protože popisují velmi dobře a relativně jednoduše různé křivky.

Implicitně zadanou funkci  $f(x, y(x))$  lze tedy chápat jako funkci  $g$ , která je definovaná jako složená funkce vztahem

$$g(x) = f(x, y(x)). \quad (26)$$

Najít derivaci funkce  $f$  znamená najít i derivaci funkce  $g$  definovanou vztahem (26).

Derivace funkce  $g$  bude totální derivace, neboť funkce  $g$  je funkcí jedné proměnné  $x$ , zatímco derivace funkce  $f$  bude muset být parciální derivace (viz odstavec 4.4.6.2), neboť se jedná o funkci dvou proměnných ( $x$  a  $y$ , přičemž proměnná  $y$  navíc závisí na proměnné  $x$ ).

Proto můžeme pro derivaci funkce  $g$  podle proměnné  $x$  psát:

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} \cdot \frac{dy(x)}{dx} \quad (27)$$

Proměnná  $y$  je závislá jen na  $x$  - proto je derivace proměnné (funkce)  $y$  podle proměnné  $x$  totální. Výraz  $\frac{dy(x)}{dx}$  tedy představuje derivaci vnitřní funkce funkce  $f$ .

Pokud bude zadána funkce  $f$  ve tvaru

$$f(x, y(x)) = 0, \quad (28)$$

pak bude i její derivace daná vztahem (27) nulová, tj. bude platit

$$\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} \cdot \frac{dy(x)}{dx} = 0 \quad (29)$$

a můžeme tedy psát

$$\frac{dy(x)}{dx} = - \frac{\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y}}. \quad (30)$$

Derivaci implicitní funkce lze získat i přímým derivováním bez užití vztahu (30). Oba způsoby ale vedou k témuž výsledku, jak je ukázáno na následujícím příkladu.

**Příklad:** Funkce  $f$  je dána implicitně  $f: y^2 \sin 2x - x^2 y^3 + \cos(2x + 3y) = 0$ . Určete její derivaci.

$$1. \text{ způsob s využitím vztahu (30): } y' = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = - \frac{y^2 \cdot 2 \cdot \cos 2x - 2xy^3 - 2 \cdot \sin(2x + 3y)}{2y \sin 2x - 3y^2 x^2 - 3 \cdot \sin(2x + 3y)}$$

2. způsob: funkci budeme derivovat bez použití vztahu (30). Přitom je důležité si uvědomit, že funkci chápeme tak, že proměnná  $y$  je závislá a proměnná  $x$  nezávislá (na základě hodnot proměnné  $x$  se určuje hodnota proměnné  $y$ ). Proto je nutné si při derivaci proměnné  $y$  uvědomit, že je závislá na proměnné  $x$  - tj. derivovat  $y$  vlastně jako složenou funkci.

$$f: y^2 \sin 2x - x^2 y^3 + \cos(2x + 3y) = 0$$

$$\underbrace{2y \cdot y' \cdot \sin 2x + y^2 \cdot 2 \cdot \cos 2x}_{\text{derivace součinu}} - \underbrace{(2xy^3 + 3y^2 \cdot y' \cdot x^2)}_{\text{derivace součinu}} + (2 + 3 \cdot y') \cdot (-\sin(2x + 3y)) = 0$$

$$2yy' \sin 2x + 2y^2 \cos 2x - 2xy^3 - 3y^2 y' x^2 - 2 \sin(2x + 3y) - 3y' \sin(2x + 3y) = 0$$

$$y' (2y \sin 2x - 3y^2 x^2 - 3 \sin(2x + 3y)) + 2y^2 \cos 2x - 2xy^3 - 2 \sin(2x + 3y) = 0$$



$$y'(2y \sin 2x - 3y^2 x^2 - 3 \sin(2x + 3y)) = -(2y^2 \cos 2x - 2xy^3 - 2 \sin(2x + 3y))$$

$$y' = -\frac{2y^2 \cos 2x - 2xy^3 - 2 \sin(2x + 3y)}{2y \sin 2x - 3y^2 x^2 - 3 \sin(2x + 3y)}$$

Oba způsoby určování derivace implicitně dané funkce dávají tedy stejný výsledek. Právě uvedený příklad ovšem neslouží jako důkaz - je to pouze ilustrace platnosti daného vztahu.

#### 4.5 \*\*\*Diferenciál funkce

Předpokládejme, že máme funkci  $f$ , jejíž graf je na obr. 48. Otázkou je, jak se změní hodnota funkce, přejdeme-li z bodu  $a$  do bodu  $a+h$ . Pokusíme se zjistit, zda přírůstek funkce  $f(a+h) - f(a)$  není pro malé hodnoty  $h$  přibližně úměrný číslu  $h$ . Jinými slovy, zda existuje číslo  $A$  (nezávislé na  $h$ ) takové, aby chyba, které se dopustíme, nahradíme-li rozdíl  $f(a+h) - f(a)$  číslem  $Ah$ , byla malá. Malá chyba přitom znamená, aby chyba byla pro malé hodnoty  $h$  (resp.  $|h|$ ) podstatně menší než  $h$  (resp.  $|h|$ ).

Pro přírůstek funkce  $f$  v bodech  $a$  a  $a+h$  má tedy platit  $f(a+h) - f(a) = Ah + \tau(h)$ , kde  $\tau(h)$  je chyba, které se při výpočtu dopouštíme.

To znamená, že funkční hodnotu v bodě  $a+h$  nahrazujeme hodnotou určenou pomocí tečny  $t$  sestrojené ke grafu funkce  $f$  v bodě  $a$  (viz obr. 48).

**ŘEKNEME, ŽE FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL, POKUD EXISTUJE  $A \in \mathbb{R}$  TAK, ŽE**

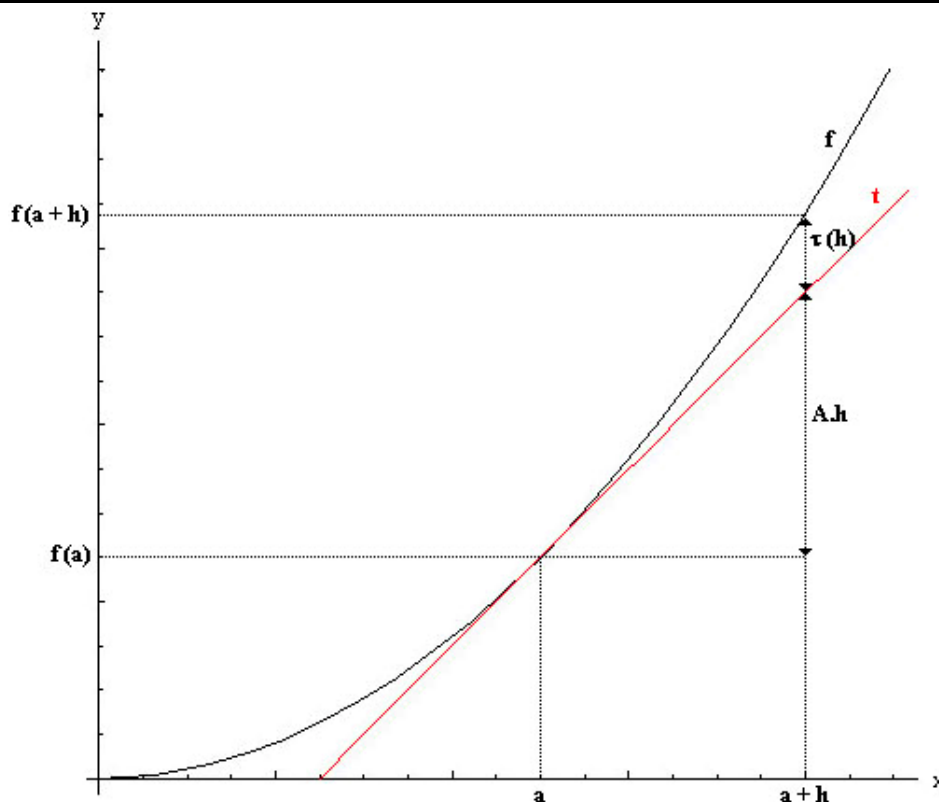
$$f(a+h) = f(a) + Ah + \tau(h) \quad (31)$$

**A PŘITOM**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0. \quad (32)$$

Pokud takové číslo  $A$  existuje, nazývá se výraz  $Ah$  **totální diferenciál**.

Limita  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0$  vyjadřuje fakt, že chyba určení funkční hodnoty v bodě  $a+h$  pomocí tečny  $t$  (viz obr. 48) je malá.



obr. 48

Je otázkou, kdy totální diferenciál ve zvoleném bodě  $a$  existuje. Lze vyjít z definice (31) a (32) totálního diferenciálu. Dosadíme-li do limity (32) z výrazu (31), dostaneme  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{h} = 0$  a po úpravě máme  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - A = 0$ . Odtud vyjádříme

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \quad (33)$$

Limita ve výrazu (33) je analogická jako limita ve výrazu (16), pomocí něhož je v odstavci 4.4.2 definována derivace funkce. Proto můžeme psát

$$A = f'(a). \quad (34)$$

Vzhledem k tomu, že  $A \in \mathbb{R}$ , musí být derivace funkce v daném bodě vlastní, aby v tomto bodě existoval diferenciál.

Do množiny reálných čísel totiž nevlastní čísla  $\pm\infty$  nepatří.

**VĚTA: FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL PŘÁVĚ TEHDY, KDYŽ MÁ FUNKCE  $f$  V BODĚ  $a$  VLASTNÍ DERIVACI.**

Diferenciál funkce  $f$  v bodě  $a$  je tedy výraz  $f'(a)h$ .

V libovolném bodě  $x$  funkce  $f$  bude diferenciál roven  $f'(x)h$  a značí se  $df(x)$ . Lze tedy psát

$$df(x) = f'(x)h, \quad (35)$$

má-li výraz na pravé straně smysl.

Výraz na pravé straně uvedené rovnosti nebude mít smysl, pokud bude derivace nevlastní nebo bude výpočet vycházet z neurčitých výrazů (viz odstavec 4.2.2).

Pro funkci  $f(x) = x$  je  $f'(x) = 1$  a proto  $df(x) = dx = 1 \cdot h = h$ . Výraz  $dx$  se nazývá **diferenciál nezávislé proměnné**. Pro diferenciál libovolné funkce tak lze psát  $df(x) = f'(x)dx$ . Odtud je zřejmé, že derivaci funkce lze chápat jako podíl diferenciálu funkce a diferenciálu nezávislé proměnné, tj.

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}. \quad (36)$$

Pojem diferenciál funkce hraje podstatnou roli zejména u funkcí více proměnných.

## 4.6 l'Hospitalovo pravidlo

Francouzský matematik G. F. A. l'Hospital (1661 - 1704) je autorem pravidla, které s využitím derivací funkcí umožňuje počítat některé limity, které běžným způsobem výpočtu vedou na některý z neurčitých výrazů (viz odstavec 4.2.2). Jeho závěry lze vyslovit v této větě.

**VĚTA: NECHĚT**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  **NEBO**  $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$  **A NECHĚT**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ , **KDE**

$A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . **POTOM**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ .

Číslo  $A$  tedy může být reálné a nebo to může být jedno z čísel  $\pm\infty$ .

**Pozor!** Funkce v čitateli i jmenovateli zlomku se v případě l'Hospitalova pravidla derivují každá zvlášť a ne podle pravidla pro derivaci podílu!

Jméno l'Hospital se čte *lopital*.

Lze dokázat (ale my to dělat nebudeme), že tento způsob výpočtu limit (jsou-li splněny předpoklady věty) lze použít i na výpočet jednostranných limit nebo limit v nevlastních bodech.

V následujících příkladech nebudeme zdůrazňovat, že jsou splněny počáteční předpoklady uvedené věty. Před každým výpočtem je ale nutné tyto předpoklady ověřit.

**Příklad:** Určete  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ .

**Řešení:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$

L'Hospitalovo pravidlo lze při řešení jednoho příkladu použít i několikrát. Musí být ale stále splněny předpoklady uvedené věty.

**Příklad:** Určete  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

$$\text{Řešení: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin' x}{x'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Další příklady již nebudeme tak podrobně rozepisovat.

$$\text{Příklad: Určete } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + x^3 - 12x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 2}.$$

$$\text{Řešení: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + x^3 - 12x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x^3 + 3x^2 - 24x}{8x^3 - 6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{72x^2 + 6x - 24}{24x^2 - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{144x + 6}{48x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{144}{48} = 3.$$

A ještě jeden příklad na použití l'Hospitalova pravidla:

$$\text{Příklad: Určete } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}.$$

$$\text{Řešení: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a \sin ax}{\cos ax}}{\frac{b \sin bx}{\cos bx}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \operatorname{tg} ax}{b \operatorname{tg} bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a^2}{\cos ax}}{\frac{b^2}{\cos bx}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \cos bx}{b^2 \cos ax} = \frac{a^2}{b^2}.$$

L'Hospitalovo pravidlo je užitečné, ale bohužel u zkoušek z matematiky na vysokých školách řada úloh na výpočet limit začíná slovy „Bez užití l'Hospitalova pravidla určete limitu ...“. Ale je alespoň šance si ověřit získaný výsledek.

## 4.7 Průběh funkce

Vyšetřování průběhu funkce patří k základním úlohám diferenciálního počtu a tyto úlohy mají i velmi mnoho praktických aplikací. Je pravda, že v současné době je možné s využitím řady počítačových programů (které lze instalovat i do kapesních kalkulátorů či mobilních telefonů) průběh funkce zobrazit velmi rychle. Nicméně rutinní výpočet bez užití právě zmíněných pomůcek je i zde velmi důležité zvládnout. U řady praktických úloh může počítačový program vykreslit velmi pochybné grafy, neuvědomí-li si uživatel, co vlastně od programu vykreslit chce.

Dříve než ale přistoupíme k vlastnímu vyšetřování průběhu funkce (viz odstavec 4.7.8), je třeba se seznámit s dalšími vlastnostmi funkcí, které jsou k vyšetřování jejich průběhu nezbytně nutné.

### 4.7.1 Věty o spojitosti

**ROLLEOVA VĚTA: NECHŤ JE DÁNA FUNKCE  $f$ , KTERÁ MÁ TYTO VLASTNOSTI:**

1. JE SPOJITÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU  $\langle a; b \rangle$ ;
2. V KAŽDÉM BODĚ OTEVŘENÉHO INTERVALU  $(a; b)$  MÁ DERIVACI;
3.  $f(a) = f(b)$ .

POTOM EXISTUJE V OTEVŘENÉM INTERVALU  $(a; b)$  ALESPŮŇ JEDEN BOD  $c$ , V NĚMŽ PLATÍ  $f'(c) = 0$ .

Větu přiblíží obr. 49, na němž je nakreslena funkce  $f$ , která je spojitá v intervalu  $\langle a; b \rangle$  a pro  $f(a)$  a  $f(b)$  platí  $f(a) = f(b)$ . Graf funkce  $f$  má v každém bodě tečnu, tj. ve všech bodech otevřeného intervalu  $(a; b)$  existuje derivace funkce  $f$ . Funkce tedy splňuje předpoklady Rolleovy věty, z níž vyplývá, že mezi všemi tečnami sestrojenými k dané funkci na uvažovaném intervalu bude alespoň jedna, která je rovnoběžná s osou  $x$  (tj. její směrnice je nulová).

Nejsou-li splněny všechny předpoklady Rolleovy věty, nemusí být její závěr platný. Takovým příkladem může být např. funkce  $f: y = |x|$  na intervalu  $\langle -4; 4 \rangle$ . Zde není splněn předpoklad o existenci derivace ve všech bodech intervalu  $(-4; 4)$ : v bodě  $x_0 = 0$  totiž neexistuje derivace (viz obr. 50). Proto neexistuje bod, v němž by byla tečna sestrojená k dané funkci rovnoběžná s osou  $x$ . Naproti tomu funkce  $f: y = x^2$  na intervalu  $\langle -1; 2 \rangle$  sice nesplňuje podmínku o rovnosti funkčních hodnot v koncových bodech uvažovaného intervalu, ale přesto existuje bod, v němž je tečna rovnoběžná s osou  $x$  (viz obr. 51).

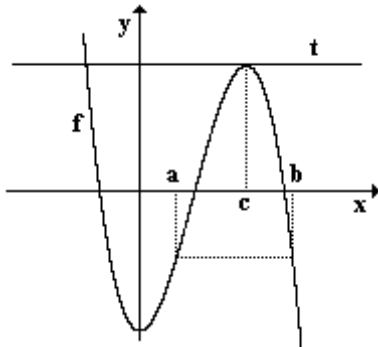
Významnou větou je Lagrangeova věta o střední hodnotě.

**LAGRANGEOVA VĚTA O STŘEDNÍ HODNOTĚ: NECHŤ JE DÁNA FUNKCE  $f$ , KTERÁ MÁ TYTO VLASTNOSTI:**

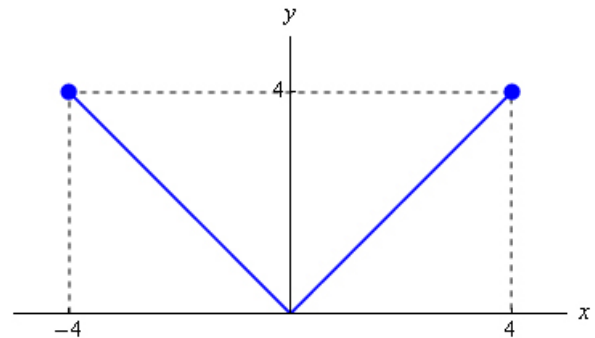
1. JE SPOJITÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU  $\langle a; b \rangle$ ;
2. V KAŽDÉM BODĚ OTEVŘENÉHO INTERVALU  $(a; b)$  MÁ DERIVACI.

**POTOM EXISTUJE V OTEVŘENÉM INTERVALU  $(a; b)$  ALESPŇ JEDEN BOD  $c$ , PRO**

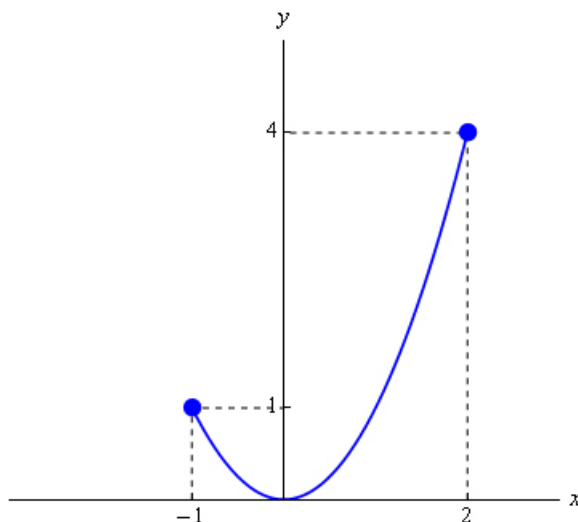
**KTERÝ PLATÍ:  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .**



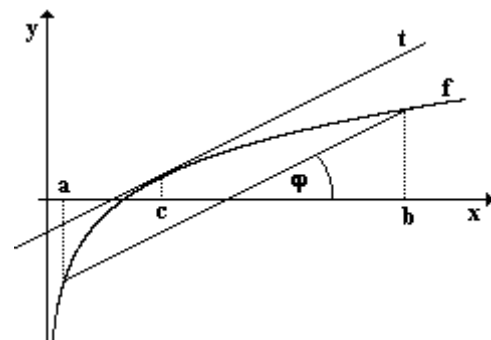
obr. 49



obr. 50



obr. 51



obr. 52

Graf funkce, která splňuje podmínky Lagrangeovy věty, je zobrazen na obr. 52. Funkce má v každém bodě  $x \in (a; b)$  derivaci a tedy je možné v každém bodě tohoto intervalu sestavit tečnu. Tětiva spojující body

$A = [a; f(a)]$  a  $B = [b; f(b)]$  grafu této funkce má směrnici  $k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Podle Lagrangeovy

věty pak existuje alespoň jedna tečna  $t$ , která má stejnou směrnici jako uvažovaná tětiva, tj. je s danou tětivou rovnoběžná.

#### 4.7.2 Monotónnost funkce a derivace

Z učiva o funkcích víme, že funkce, která je buď rostoucí nebo klesající, se označuje názvem **monotónní**. Na základě Lagrangeovy věty (viz odstavec 4.7.1) je možné určit zda se jedná o funkci rostoucí nebo klesající na základě první derivace funkce.

**VĚTA: MÁ-LI FUNKCE  $f$  V KAŽDÉM BODĚ INTERVALU  $(a; b)$  Kladnou derivaci, JE V TOMTO INTERVALU ROSTOUCÍ. MÁ-LI FUNKCE  $f$  V KAŽDÉM BODĚ INTERVALU  $(a; b)$  Zápornou derivaci, JE V TOMTO INTERVALU KLESAJÍCÍ.**

Intervaly, v nichž je funkce rostoucí nebo klesající (tedy monotónní), se nazývají **intervaly monotónnosti**.

#### 4.7.3 Extrémy funkce a derivace

K určení přesného průběhu funkce je nutná také znalost **extrémů funkce**. Pojem extrém funkce je souhrnné označení pro maximum funkce nebo minimum funkce. Termínem **extrém funkce na množině** se označuje největší funkční hodnota nebo nejmenší funkční hodnota funkce na dané množině. Touto množinou je většinou celý definiční obor nebo uzavřený interval patřící do definičního oboru dané funkce.

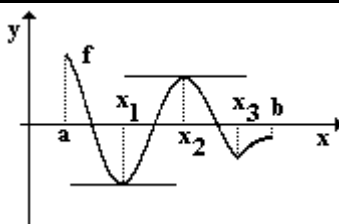
Na obr. 53 je zobrazen graf spojité funkce  $f$ , o které je možné (z hlediska jejích extrémů) říci:

1. v bodě  $a$  nabývá funkce největší hodnoty;
2. v bodě  $x_1$  nabývá funkce nejmenší hodnoty;
3. v bodech  $x_2$  a  $x_3$  nabývá v jistém smyslu extrémní hodnoty - jedná se o **lokální extrémy**, které nemusí představovat největší (resp. nejmenší) hodnoty funkce v uvažovaném intervalu.

Lokální extrémy jsou „místní extrémy“. Extrémem České republiky z hlediska nadmořské výšky je hora Sněžka v Krkonoších. Pro obyvatele Jeseníků je místní nejvyšší horou Praděd. Praděd je tedy pro obyvatele

Jeseníků lokálním extrémem, ačkoliv extrémem (globálním extrémem) je Sněžka v Krkonoších. Pro obyvatele Krkonoš je Sněžka lokálním extrémem (místní nejvyšší hora), ale je to zároveň i globální extrém - nejvyšší hora České republiky.

Globální extrém (resp. extrém - velmi často se totiž přívlastek *globální* vynechává) je tedy zároveň i lokálním extrémem v určitém okolí.



obr. 53

**FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $x_0$  LOKÁLNÍ MAXIMUM, EXISTUJE-LI TAKOVÉ OKOLÍ  $U(x_0)$  BODU  $x_0$ , ŽE PRO VŠECHNA  $x \in U(x_0) \cap D(f)$  PLATÍ:  $f(x) \leq f(x_0)$ .**

**FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $x_0$  LOKÁLNÍ MINIMUM, EXISTUJE-LI TAKOVÉ OKOLÍ  $U(x_0)$  BODU  $x_0$ , ŽE PRO VŠECHNA  $x \in U(x_0) \cap D(f)$  PLATÍ:  $f(x) \geq f(x_0)$ .**

Platí-li v uvedených nerovnostech rovnost jen pro  $x = x_0$ , říkáme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  **ostré lokální maximum**, resp. **ostré lokální minimum**.

To znamená, že takový bod je skutečně nejvyšším resp. nejnižším v daném okolí. Funkce v tom případě není v okolí lokálního extrému konstantní.

V analogii krajiny je ostré lokální maximum špička hory a ostré lokální minimum úzká rokle. V žádném případě ostrým lokálním maximum není náhorní plošina.

Z obr. 53, na němž je znázorněn graf spojitě funkce  $f$ , je vidět, že v bodech  $[x_1; f(x_1)]$  a  $[x_2; f(x_2)]$  má graf funkce tečnu a zároveň je zde ostré lokální minimum resp. maximum. Tečny v těchto bodech (tj. tečny v lokálních extrémech) jsou rovnoběžné s osou  $x$  a mají tedy nulovou směrnici. Z toho vyplývá, že i (první) derivace funkce  $f$  v těchto dvou bodech je nulová. V bodě  $[x_3; f(x_3)]$  je sice také ostré lokální minimum, ale tečna v tomto bodě neexistuje.

V bodě  $[x_3; f(x_3)]$  je na grafu funkce „špička“ a tečnu tedy není možné dobře „přitisknout“ ke grafu funkce  $f$ .

Funkce tedy může mít lokální extrém jen v těch bodech, v nichž je její derivace nulová nebo derivace neexistuje.

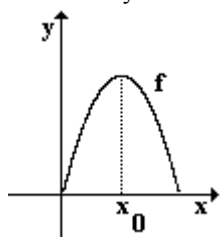
Následující věta dává do souvislosti extrémy funkce s její derivací.

**VĚTA: MÁ-LI FUNKCE  $f$  V BODĚ  $x_0$  LOKÁLNÍ EXTRÉM A EXISTUJE-LI V TOMTO BODĚ DERIVACE  $f'(x_0)$  FUNKCE  $f$ , PAK PLATÍ:  $f'(x_0) = 0$ .**

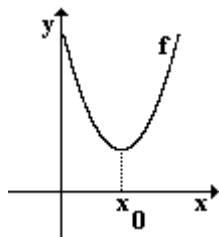
**Pozor!** Obrácená věta neplatí. Pokud platí  $f'(x_0) = 0$ , nemusí mít funkce  $f$  v bodě  $x_0$  lokální extrém. Příkladem neplatnosti této obrácené věty je např. funkce  $f: y = x^3$ . Platí  $f'(0) = 0$ , ale v bodě 0 nemá funkce  $f$  lokální extrém. Je zde pouze tzv. stacionární bod (viz odstavec 4.7.4).

#### 4.7.4 Stacionární body

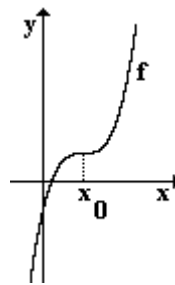
Zjistíme-li, že v bodě  $x_0$  pro derivaci funkce  $f$  platí  $f'(x_0) = 0$ , neznamená to nutně, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  lokální extrém. Přesto určení bodů, v nichž nabývá první derivace funkce nulové hodnoty, je prvním krokem k vyhledání lokálních extrémů.



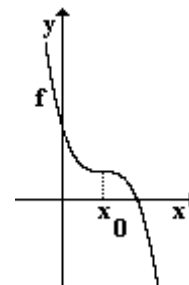
obr. 54



obr. 55



obr. 56



obr. 57

Má-li funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  derivaci a je-li  $f'(x_0) = 0$ , pak se bod  $x_0$  nazývá nulovým bodem první derivace nebo též **stacionárním bodem**. Tyto stacionární body jsou tedy řešením rovnice  $f'(x) = 0$  a extrém funkce v nich může, ale také nemusí být.

Stacionární body jsou tedy pouze body „podezřelé z extrému“.

Dále je možné postupovat podle následující věty:

**VĚTA: NECHĚT**  $f'(x_0) = 0$ . **JESTLIŽE** EXISTUJE TAKOVÉ OKOLÍ  $U(x_0, \delta)$  BODU  $x_0$ , ŽE V INTERVALECH  $(x_0 - \delta; x_0)$  A  $(x_0; x_0 + \delta)$  MÁ PRVNÍ DERIVACE  $f'(x)$  FUNKCE  $f$  RŮZNÁ ZNAMÉNKA, MÁ FUNKCE  $f$  V TOMTO BODĚ  $x_0$  OSTRÝ LOKÁLNÍ EXTRÉM. MĚNÍ-LI SE ZNAMÉNKO DERIVACE Z PLUS NA MÍNUS, MÁ FUNKCE  $f$  V BODĚ  $x_0$  LOKÁLNÍ MAXIMUM (VIZ OBR. 54), MĚNÍ-LI SE ZNAMÉNKO DERIVACE Z MÍNUS NA PLUS, MÁ FUNKCE  $f$  V BODĚ  $x_0$  LOKÁLNÍ MINIMUM (VIZ OBR. 55).

Pokud funkce  $f$  ve stacionárním bodě  $x_0$  (resp. v intervalech  $(x_0 - \delta; x_0)$  a  $(x_0; x_0 + \delta)$ ) znaménko nemění, lokální extrém v daném bodě neexistuje (viz obr. 56 a obr. 57).

Na první pohled je toto zjišťování poněkud komplikovanější a na přesné dokazování náročnější. Uvědomíme-li si ovšem, že pomocí první derivace funkce můžeme určit poměrně snadno intervaly monotónnosti funkce (viz odstavec 4.7.2), můžeme z těchto intervalů monotónnosti funkce vyjít při určování lokálního extrému v nalezeném stacionárním bodě.

Přechází-li funkce ve stacionárním bodě z rostoucí na klesající, je v daném bodě lokální maximum. Přechází-li funkce v nalezeném stacionárním bodě z klesající na rostoucí, má v daném bodě lokální minimum. Je to vlastně jinými slovy popsána naposledy uvedená věta, ale pro běžné výpočty je tento přístup praktičtější.

#### 4.7.5 Extrémy funkce a druhá derivace

Zjišťování změny znaménka první derivace může být u některých funkcí problematické nebo nepříjemné. Proto si ukážeme, jakým způsobem je možné určit lokální extrém na základě druhé derivace funkce. To je výhodné za předpokladu, že výpočet druhé derivace funkce je jednodušší než určování znaménkových změn první derivace.

Navíc tento postup je téměř „chybám vzdorný“ a není potřeba u něj prokazovat takový vhlad do problematiky, jako u postupu popsaného na konci odstavce 4.7.4.

**VĚTA: NECHĚT**  $f'(x_0) = 0$  A NECHĚT EXISTUJE V BODĚ  $x_0$  DRUHÁ DERIVACE FUNKCE  $f$ :

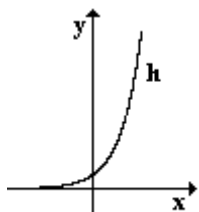
1. JE-LI  $f''(x_0) < 0$ , MÁ FUNKCE  $f$  V BODĚ  $x_0$  OSTRÉ LOKÁLNÍ MAXIMUM;
2. JE-LI  $f''(x_0) > 0$ , MÁ FUNKCE  $f$  V BODĚ  $x_0$  OSTRÉ LOKÁLNÍ MINIMUM.

Pokud je  $f''(x_0) = 0$ , není možné o existenci lokálního extrému funkce  $f$  v bodě  $x_0$  rozhodnout.

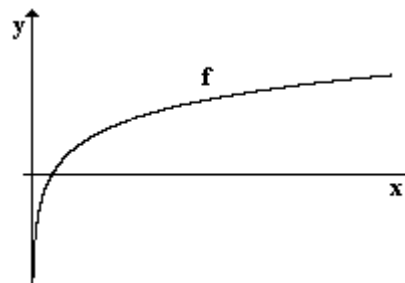
Není možné rozhodnout podle této věty. Pořád je v záloze metoda popsaná na konci odstavce 4.7.4.

#### 4.7.6 Konvexnost a konkávnost funkce

Uvažujme nyní grafy dvou funkcí:  $h: y = e^x$  (viz obr. 58) a  $f: y = \ln x$  (viz obr. 59). Kdybychom k těmto grafům sestrojovali tečny v libovolných jejich bodech, zjistili bychom, že u funkce  $h$  leží vždy graf funkce „nad tečnou“ sestrojenou v daném bodě a u funkce  $f$  leží graf funkce vždy „pod tečnou“ sestrojenou v daném bodě. Tato skutečnost pomůže určit další vlastnosti funkce: konvexnost a konkávnost. Kdybychom totiž neznali přesný průběh funkcí a věděli jen, že obě jsou rostoucí na svém definičním oboru, nemohli bychom jejich graf sestrojit.



obr. 58

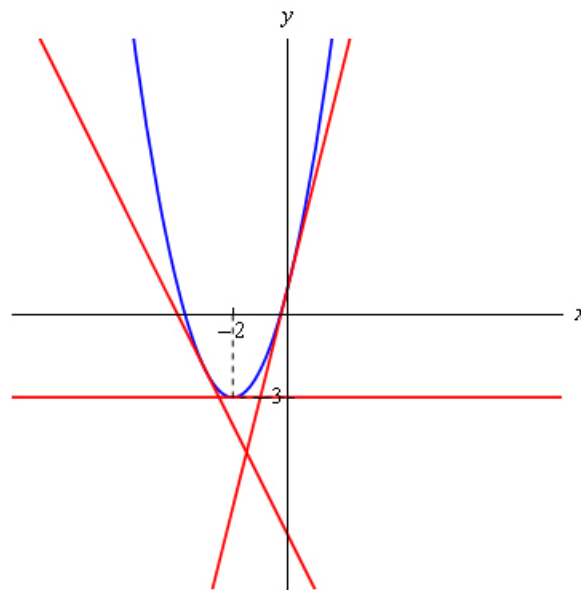


obr. 59

Obě funkce jsou totiž rostoucí, ale každá z nich je jinak „prohnutá“. A právě „průhyb funkce“ popisuje konkávnost resp. konvexnost funkce.

**FUNKCE  $f$ , KTERÁ MÁ DERIVACI V BODĚ  $x_0$ , JE V BODĚ  $[x_0; f(x_0)]$  KONVEXNÍ, EXISTUJE-LI TAKOVÉ OKOLÍ  $U(x_0, \delta)$  BODU  $x_0$ , ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z MNOŽINY  $U(x_0, \delta) - \{x_0\}$  LEŽÍ BODY GRAFU FUNKCE  $f$  „NAD TEČNOU“ SESTROJENOU V BODĚ  $[x_0; f(x_0)]$ .**

Množina  $U(x_0, \delta) - \{x_0\}$  je prstencové okolí  $P(x_0, \delta)$  bodu  $x_0$  (viz odstavec 4.2.1.1).



obr. 60

**FUNKCE  $f$ , KTERÁ MÁ DERIVACI V BODĚ  $x_0$ , JE V BODĚ  $[x_0; f(x_0)]$  KONKÁVNÍ, EXISTUJE-LI TAKOVÉ OKOLÍ  $U(x_0, \delta)$  BODU  $x_0$ , ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z MNOŽINY  $U(x_0, \delta) - \{x_0\}$  LEŽÍ BODY GRAFU FUNKCE  $f$  „POD TEČNOU“ SESTROJENOU V BODĚ  $[x_0; f(x_0)]$ .**

Tuto vlastnost funkce je možné rozšířit i na celý interval.

**VĚTA: JE-LI FUNKCE  $f$  KONVEXNÍ (RESP. KONKÁVNÍ) V KAŽDÉM BODĚ INTERVALU  $I$ , ŘÍKÁME, ŽE JE KONVEXNÍ (RESP. KONKÁVNÍ) V INTERVALU  $I$ .**

Z grafu kvadratické funkce  $f: y = x^2 + 4x + 1$  (viz obr. 60) je vidět, že daná funkce je konvexní (graf funkce leží vždy „nad tečnou“ sestrojenou v daném bodě). Na základě druhé derivace funkce ( $f'(x) = 2x + 4$  a  $f''(x) = 2$ ), která je kladná, si lze pamatovat jak poznáme, konvexní resp. konkávní funkci.

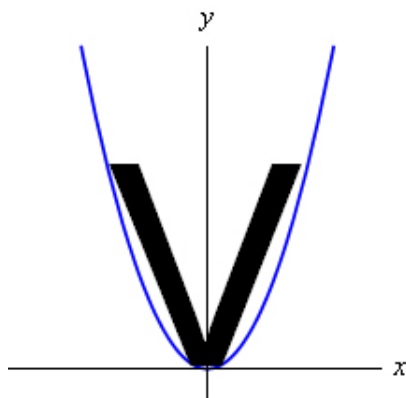
**VĚTA: JE-LI  $f''(x_0) > 0$ , PAK JE FUNKCE  $f$  V BODĚ  $x_0$  KONVEXNÍ.**

**VĚTA: JE-LI  $f''(x_0) < 0$ , PAK JE FUNKCE  $f$  V BODĚ  $x_0$  KONKÁVNÍ.**

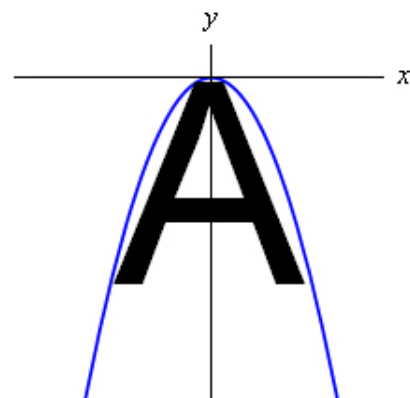
Tyto poznatky platí obecně i pro celý interval, v němž platí uvedené nerovnosti:

**VĚTA: JESTLIŽE V KAŽDÉM BODĚ INTERVALU  $I$  PLATÍ:**

1.  $f''(x_0) > 0$ , PAK JE FUNKCE  $f$  V INTERVALU  $I$  KONVEXNÍ;
2.  $f''(x_0) < 0$ , PAK JE FUNKCE  $f$  V INTERVALU  $I$  KONKÁVNÍ.



obr. 61



obr. 62

Existuje relativně jednoduchá mnemotechnická pomůcka, jak si zapamatovat, která funkce je konvexní a která konkávní. Parabolou jako graf kvadratické funkce  $f: y = x^2$  známe dobře. Druhou derivaci určíme také snadno:  $f''(x) = 2$ . Tato hodnota je kladná na celém definičním oboru funkce a tedy (podle výše uvedené věty) je funkce konvexní - do grafu této kvadratické funkce lze vepsat písmeno **V** (viz obr. 61). Funkce, do jejíhož

grafu lze vepsat písmeno A, je konkávní (viz obr. 62, na kterém je graf funkce  $g: y = -x^2$ , jejíž druhá derivace je na celém jejím definičním oboru záporná).

#### 4.7.7 Inflexní body

Na obr. 56 a obr. 57 jsou znázorněny funkce, které mají v bodě  $x_0$  nulovou první derivaci a přesto v nich není lokální extrém (jde o stacionární bod). Na základě znalostí z odstavce 4.7.6 lze říci, že v uvažovaném bodě přechází funkce z funkce konkávní na funkci konvexní (obr. 56) resp. z funkce konvexní na funkci konkávní (obr. 57). Funkce mění v uvažovaném bodě výrazně svůj průběh, proto má daný bod i svůj název.

**NECHŤ FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $x_0$  DERIVACI. PŘECHÁZÍ-LI V TOMTO BODĚ GRAF FUNKCE  $f$  Z POLOHY „NAD TEČNOU“ DO POLOHY „POD TEČNOU“ NEBO Z POLOHY „POD TEČNOU“ DO POLOHY „NAD TEČNOU“, NAZÝVÁME BOD  $x_0$  INFLEXNÍ BOD FUNKCE  $f$ .**

Z toho, co víme o konvexní funkci a konkávní funkci (viz odstavce 4.7.6) vyplývá, že v okolí inflexního bodu mění funkce  $f''(x)$  znaménko. Hodnota druhé derivace funkce  $f$  v inflexním bodě tedy bude nulová.

Druhá derivace  $f''(x)$  je obecně také funkce - její hodnota závisí na konkrétním zvoleném bodu  $x$ .

**VĚTA: JE-LI BOD  $x_0$  INFLEXNÍM BODEM FUNKCE  $f$  A MÁ-LI FUNKCE  $f$  V TOMTO BODĚ DRUHOU DERIVACI, PAK  $f''(x_0) = 0$ .**

**Pozor!** Obrácená věta neplatí. Pokud platí  $f''(x_0) = 0$ , nemusí mít funkce  $f$  v bodě  $x_0$  inflexní bod. Příkladem neplatnosti této obrácené věty je např. funkce  $f: y = x^4$ . Platí  $f''(0) = 0$ , ale bod 0 není inflexním bodem funkce  $f$  - funkce je na celém svém definičním oboru konvexní.

Situace je podobná jako při určování lokálních extrémů funkce (viz odstavce 4.7.4): řešením rovnice  $f''(x) = 0$  získáme pouze body, v nichž může, ale také nemusí inflexní bod být.

Získáme tedy body „podezřelé z inflexe“.

Jistotu získáme až po zjištění znaménkových změn druhé derivace v okolí těchto bodů.

**VĚTA: NECHŤ FUNKCE  $f$  MÁ DRUHOU DERIVACI V KAŽDÉM BODĚ Z  $\delta$ -OKOLÍ BODU  $x_0$  A NECHŤ TATO DRUHÁ DERIVACE  $f''(x)$  MÁ V INTERVALECH  $(x_0 - \delta; x_0)$  A  $(x_0; x_0 + \delta)$  RŮZNÁ ZNAMÉNKA. PAK BOD  $x_0$  JE INFLEXNÍM BODEM FUNKCE  $f$ .**

#### 4.7.8 Vyšetřování průběhu funkce

Po výkladu limit (viz odstavce 4.2), derivací (viz odstavce 1.1.1) a souvislosti derivací funkce s dalšími vlastnostmi funkce (viz odstavce 4.7.1 až 4.7.6.0), je možné začít vyšetřovat průběh libovolné funkce. Hlavním úkolem při vyšetřování průběhu funkce je určení jejích základních vlastností a nakreslení správného grafu funkce (ve smyslu rostoucí - klesající funkce, konkávní - konvexní funkce, asymptoty, limity v krajních bodech definičního oboru, ...).

Při vyšetřování vlastností a průběhu funkce je vhodné postupovat v tomto pořadí:

1. určit definiční obor funkce;
2. určit, zda je funkce sudá, lichá nebo periodická;

Má-li totiž funkce jednu z uvedených vlastností, zjednoduší to vyšetřování jejího průběhu - můžeme se pak omezit jen na část definičního oboru a nalezené důležité body (extrémy funkce, inflexní body funkce, ...) vhodně „překopírovat“.

3. určit průsečíky s osami kartézského systému souřadnic;
4. vypočítat limity v krajních bodech definičního oboru funkce;
5. vypočítat první derivace funkce, určit stacionární body a body, v nichž není první derivace definována;

V této souvislosti jsou problematické některé body funkcí lineárně lomených, odmocnin, absolutních hodnot, ... - derivace v těchto bodech neexistuje (většinou proto, že neexistuje oboustranná limita v těchto bodech).

6. určit intervaly monotónnosti;
7. určit lokální extrémy funkce;
8. vypočítat druhou derivaci funkce, určit nulové body druhé derivace a body, v nichž není druhá derivace funkce definována;
9. určit intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce;
10. najít inflexní body funkce;
11. najít asymptoty funkce;
12. určit obor hodnot funkce;
13. nakreslit graf funkce.

Jak již bylo řečeno: s využitím výpočetní techniky je možné vyšetřování průběhu funkce výrazně urychlit, ale přesto je nutné tyto základní postupy znát.



## **4.8 Užití diferenciálního počtu**

Užití diferenciálního počtu je velmi široké a zasahuje jak do matematiky, tak do jejích aplikací - fyziky, elektrotechniky, chemie, ... V přírodních vědách se řeší problémy, které se týkají nalezení extrémů určitých veličin, okamžitých změn některých veličin (dráha, rychlost, ...).

Při řešení uvedených úloh je třeba vždy najít vhodné vyjádření funkce, jejíž extrém nebo průběh potom budeme hledat. Některé úlohy z matematiky, fyziky, elektroniky, ... je možné řešit i na základě logické úvahy, tj. bez užití diferenciálního počtu.

## 5. INTEGRÁLNÍ POČET

Základními pojmy této kapitoly jsou primitivní funkce (viz odstavec 5.2) a určitý integrál (viz odstavec 5.3), základní dovedností pak je určení primitivní funkce k dané funkci na daném intervalu. Tato dovednost velice úzce souvisí s derivováním, je ale náročnější. Stejně jako diferenciální počet, má i integrální počet velký význam při studiu přírodních a technických věd.

### 5.1 Historický úvod

O rozvoj integrálního počtu se zasloužil anglický fyzik Isaac Newton (1642 - 1727) a německý matematik Bernhard Riemann (1826 - 1866). Na základě toho se často hovoří o Newtonově integrálu a Riemannově integrálu. Tyto dva druhy integrálů se liší pouze přístupem obou vědců k nalezení základních integračních pravidel a ke stanovení podmínek, za kterých je daná funkce integrovatelná:

1. Newtonův integrál - vychází z definice primitivní funkce pomocí derivace funkce (viz odstavec 5.2.1). S tímto přístupem se integrály lépe počítají.
2. Riemannův integrál - vychází z konkrétní aplikace integrálu: výpočet obsahu plochy, která je omezená grafem funkce. Z toho je zřejmé, že se jedná o integrál určitý (viz odstavec 5.3), i když Riemann tímto způsobem studoval i integrály neurčité (integrál jakožto funkce jedné z mezí - horní meze nebo dolní meze). Riemannův přístup má tu výhodu, že je názorný a okamžitě jsou zřejmé aplikace integrálního počtu.

Na základě současných znalostí matematické analýzy je možné dokázat, že pro spojitě funkce, které mají ve všech svých bodech derivaci, získáme pomocí Newtonova integrálu i Riemannova integrálu stejné výsledky. Přesto se najdou funkce (které jsou ovšem velmi specifické, a proto se s nimi v rámci středoškolské matematiky nesetkáme), které lze řešit jen jedním z uvedených postupů. Takové funkce tedy buď mají Newtonův integrál a nemají Riemannův integrál nebo naopak.

### 5.2 Primitivní funkce

#### 5.2.1 Zavedení primitivní funkce

MĚJME DÁNY FUNKCE  $F$  A  $f$  DEFINOVANÉ V OTEVŘENÉM INTERVALU  $I$ .  
JESTLIŽE PRO VŠECHNA  $x \in I$  PLATÍ

$$F'(x) = f(x), \quad (37)$$

ŘÍKÁME, ŽE FUNKCE  $F$  JE PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCI  $f$  V INTERVALU  $I$ .

Nebude-li řečeno jinak, budeme intervalem  $I$  rozumět vždy interval otevřený.

Na otevřeném intervalu totiž nejsou žádné problémy s derivací funkce - viz odstavec 4.4. Každý bod tohoto intervalu do něj patří i se svým okolím.

Primitivní funkce k dané funkci se tedy definuje pomocí derivace (viz vztah (37)). Jinými slovy: derivováním primitivní funkce  $F$  dostaneme původní funkci  $f$ .

Pomocí toho je možné ověřit veškeré výsledky příkladů, v nichž je třeba nalézt primitivní funkci k dané funkci: stačí výslednou funkci zderivovat. Pokud se dostaneme k funkci ze zadání příkladu, počítali jsme správně. Pokud najdeme primitivní funkci, kterou nechceme derivovat kvůli ověření našeho výsledku, je možné podívat se do výsledků sbírky, z níž byl příklad převzat. Zde se ale může objevit jedna nesrovnalost. Výsledek se může od našeho lišit a přitom jsme mohli počítat dobře.

Známe-li v intervalu  $I$  k dané funkci  $f$  jednu primitivní funkci, známe jich nekonečně mnoho. Je-li totiž  $F$  primitivní funkce k funkci  $f$ , pak také každá funkce tvaru  $F(x) + C$ , kde  $C$  je libovolné reálné číslo, je primitivní funkcí k funkci  $f$ , protože

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x). \quad (38)$$

Výrazem  $F(x) + C$  jsou vyčerpány všechny možnosti a žádné jiné primitivní funkce k funkci  $f$  neexistují.

**VĚTA: JE-LI FUNKCE  $F$  V INTERVALU  $I$  PRIMITIVNÍ FUNKCÍ K FUNKCI  $f$ , PAK KAŽDÁ PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCI  $f$  JE FUNKCE VE TVARU  $F(x) + C$ , KDE  $C$  JE REÁLNÁ KONSTANTA.**

Známe-li graf jedné primitivní funkce  $F$  k funkci  $f$  v intervalu  $I$ , pak grafy všech primitivních funkcí k funkci  $f$  v intervalu  $I$  získáme posunutím grafu funkce  $F$  po ose  $y$  (viz obr. 63).

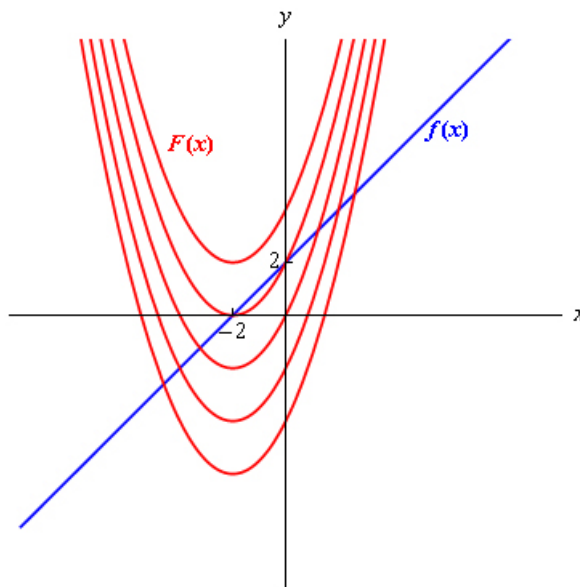
**VĚTA: KE KAŽDÉ FUNKCI SPOJITÉ V INTERVALU EXISTUJE V TOMTO INTERVALU PRIMITIVNÍ FUNKCE.**

Vzhledem k tomu, že pojem primitivní funkce úzce souvisí s pojmem určitý integrál, používá se pro označení primitivní funkce také zápis:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (39)$$

kde  $x \in I$ . V této souvislosti se funkce  $f$  nazývá **integrand**,  $x$  **integrační proměnná**, symbol  $\int$  **integrační znak** a  $C$  **integrační konstanta**. Symbol  $dx$  slouží k odlišení integrační proměnné od případných parametrů nebo konstant vystupujících v zápisu funkce  $f$ .

Symbol  $dx$  má hlubší význam - souvisí s totálním diferenciálem funkce (viz odstavec 4.5).



obr. 63

Postup, kterým se určuje primitivní funkce  $F(x)+C$  k dané funkci  $f$ , se nazývá **integrování** funkce  $f$  (**integrace** funkce  $f$ ).

Integrování je vlastně opačný proces k derivování (tak jako spolu souvisí sčítání - odčítání, umocňování - odmocňování, ...). Intuitivní náhled na to, „odkud se vzalo  $dx$ “, je možné získat ze zápisu derivace. Pro derivaci funkce  $F$  podle proměnné  $x$  platí  $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ , což vyplývá ze vztahu (37). Odtud dostáváme  $dF(x) = f(x)dx$  („kousíček“ funkce  $F$  je roven součinu funkce  $f$  a „kousičku“ proměnné  $x$ ) a tedy  $F(x)+C = \int f(x)dx$ .

Matematically není toto „odvození“ zcela v pořádku, ale pro základní představu stačí.

### 5.2.2 Primitivní funkce elementárních funkcí

Základní pravidla pro derivování (ale i hledání primitivních funkcí) elementárních funkcí jsou uvedena v odstavci 4.4.5 v tab. 1.

Nyní uvedeme pravidla pro hledání primitivních funkcí k součtu dvou funkcí a rozdílu dvou funkcí.

**EXISTUJÍ-LI V OTEVŘENÉM INTERVALU  $I$  PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCÍM  $f_1(x)$  A  $f_2(x)$  A JSOU-LI  $c_1$  A  $c_2$  LIBOVOLNÉ REÁLNÉ KONSTANTY, EXISTUJE PRIMITIVNÍ FUNKCE TAKÉ K FUNKCI  $f(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$  A PLATÍ**

$$\int [c_1f_1(x) + c_2f_2(x)] dx = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx. \quad (40)$$

Z právě uvedené věty vyplývají následující vztahy pro primitivní funkce:

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx, \quad (41)$$

Konstantu, která je nezávislá na proměnné, podle níž integrujeme, můžeme vytknout před integrál.

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \quad (42)$$

Integrál součtu dvou funkcí je roven součtu integrálů daných funkcí.

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx. \quad (43)$$

Integrál rozdílu dvou funkcí je roven rozdílu integrálů těchto dvou funkcí.

### 5.2.3 Integrační metody

Pro výpočet složitějších integrálů existuje řada doporučených metod, které je ovšem možné použít pouze na určitý typ funkcí.

V tomto ohledu jsou integrály horší než derivace: pro derivace máme několik vztahů (viz odstavec 4.4.5 a v něm tab. 1) a s nimi spočítáme derivace libovolně komplikovaných funkcí. V případě integrálů můžeme dostat úlohu, ve které jsou „známé jednoduché“ funkce, a přesto se ukáže, že tento integrál není vůbec analyticky (tj. bez počítače) řešitelný.

Uvedeme pouze základní integrační metody. V teoretické matematice a praxi (fyzika, elektrotechnika, stavitelství, ...) se používá celá řada dalších metod. Většinou se jedná o substituce, které jsou vytvořeny speciálně pro daný typ úloh. Zde se seznámíme s používáním těchto metod obecně.

### 5.2.3.1 *Per partes*

Metoda integrování per partes (integrování *po částech*) je založena na vztahu (20) pro derivaci součinu dvou funkcí  $u = u(x)$  a  $v = v(x)$ . Z tohoto vztahu můžeme vyjádřit jeden ze součinů na pravé straně vztahu.

Tedy např.  $u'(x) \cdot v(x) = [u(x) \cdot v(x)]' - u(x) \cdot v'(x)$ . Odtud vychází i věta pro integrování metodou per partes.

**VĚTA: MAJÍ-LI FUNKCE  $u = u(x)$  A  $v = v(x)$  V INTERVALU  $(a; b)$  SPOJITÉ DERIVACE, PAK V INTERVALU  $(a; b)$  PLATÍ**

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx. \quad (44)$$

Vztah (44) si lze pamatovat tak, že na jeho pravé straně je součin nederivovaných funkcí, od kterého je odečten integrál nově spočítaných funkcí (na základě funkcí v původním integrálu, který je na levé straně vztahu (44)).

Metodou per partes je úloha vždy řešitelná (tj. lze nalézt primitivní funkci k zadané funkci), pokud zadaná funkce je ve tvaru součinu polynomu s funkcí sinus, kosinus nebo funkcí exponenciální. V některých případech je ale nutné použít metodu per partes během výpočtu vícekrát.

Nyní uvedeme dva příklady, na kterých zároveň ukážeme způsob zápisu používané metody.

**Příklad:** Vypočtete:  $\int x \cos x dx$ .

**Řešení:** K nalezení primitivní funkce ze zadání použijeme metodu per partes. Je zvykem během výpočtu si připravit a označit derivace daných funkcí, aby bylo možné snadněji aplikovat metodu per partes:

$$\int x \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

Symbol  $\left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right|$  v tomto případě neznačí matici! Jedná se pouze o oddělení označení funkcí od zbytku úlohy.

**Příklad:** Vypočtete:  $\int e^x \cdot \sin x dx$ .

**Řešení:** Opět i tento příklad rozepíšeme. V tomto případě nezávisí na tom, kterou funkci ze součinu v zadání budeme integrovat a kterou budeme derivovat. Funkce  $e^x$  se ani jednou z uvedených operací nemění, a funkce  $\sin x$  a  $\cos x$  přecházejí během integrování resp. derivování jedna na druhou (až na znaménko).

$$\int e^x \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| = -e^x \cos x + \int e^x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right| =$$

$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cdot \sin x dx$ . Nyní jsme získali rovnost, na jejíž obou stranách máme tentýž člen

$\int e^x \cdot \sin x dx$ , ale s opačným znaménkem. Převédeme-li nyní tento člen na levou stranu rovnosti, neodečte se s tím původním, který na levé straně je.

Převedením na levou stranu rovnosti tedy získáme:  $2 \int e^x \cdot \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x$ . Získali jsme tedy rovnici

o jedné neznámé  $\int e^x \cdot \sin x dx$ . Snadnou úpravou získáme:  $\int e^x \cdot \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C$ .

I tento způsob úpravy se občas v integrálním počtu vyskytne. Tímto způsobem lze vyřešit zadanou úlohu, pokud na pravé straně získáme stejný výraz jako ten, s nímž jsme začínali počítat, s libovolným koeficientem vyjma +1. V tom případě by se totiž oba výrazy navzájem odečetly a bylo by nutné zvolit jinou metodu řešení dané úlohy.

### 5.2.3.2 *Substituční metoda*

Substituční metoda umožňuje zavedením nové proměnné převést integrovanou funkci na funkci, kterou lze již integrovat snadněji. Substituční metoda vychází v podstatě z věty o derivování složené funkce (viz vztah (22) v odstavci 4.4.5).

Z věty o derivaci složené funkce a z definice primitivní funkce vyplývá následující úvaha: Necht' existuje k funkci  $y = f(t)$  na intervalu  $(\alpha; \beta)$  primitivní funkce  $F(t) = \int f(t)dt$ , tedy pro každé  $t \in (\alpha; \beta)$  platí:  $F'(t) = f(t)$ . Necht' dále funkce  $t = g(x)$  má derivaci pro každé  $x \in (a; b)$  a pro každé  $x \in (a; b)$  necht' je  $g(x) \in (\alpha; \beta)$ . Dosadíme-li do funkce  $F(t)$  za  $t$  hodnotu  $g(x)$ , dostaneme složenou funkci  $F(g(x))$ . Pro derivaci této funkce pro všechna  $x \in (a; b)$  platí:  $[F(g(x))]' = F'(t) \cdot g'(x) = f(t) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ .

To ale znamená, že funkce  $F(g(x))$  je primitivní funkce k funkci  $f(g(x)) \cdot g'(x)$  a lze tedy psát  $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$  v intervalu  $(a; b)$ .

Vzhledem k tomu, že  $F(t) = \int f(t)dt$  a že  $t = g(x)$ , je možné psát  $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t)dt = F(t) + C$ .

**VĚTA (O SUBSTITUCI): NECHŤ FUNKCE  $F(t)$  JE PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCI  $f(t)$  V INTERVALU  $(\alpha; \beta)$ . NECHŤ FUNKCE  $t = g(x)$  MÁ DERIVACI  $g'(x)$  V INTERVALU  $(a; b)$ . PRO KAŽDÉ  $x \in (a; b)$  NECHŤ HODNOTA  $g(x)$  PATŘÍ DO INTERVALU  $(\alpha; \beta)$ . PAK V INTERVALU  $(a; b)$  JE FUNKCE  $F(g(x))$  PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCI  $f(g(x)) \cdot g'(x)$ , TJ. PLATÍ**

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt, \quad (45)$$

KDE  $t = g(x)$ .

Větu o substituci je možné použít k výpočtu primitivní funkce, podaří-li se funkci, kterou máme integrovat, rozložit na dva činitele, z nichž jeden je složenou funkcí proměnné  $x$  s vnitřní funkcí  $g(x)$  a druhý je derivací této funkce  $g$ .

**Příklad:** Vypočtete:  $\int x^2 \cos(2-x^3) dx$

**Řešení:** Postup řešení, které bude uvedeno, není matematicky nejčistší, nicméně je použitelný v každém případě. Ve většině případů je možné postupovat přesně podle uvedené věty a derivaci vnitřní funkce „vidět“ rovnou.

$$\int x^2 \cos(2-x^3) dx = \left. \begin{array}{l} t = 2-x^3 \\ \frac{dt}{dx} = -3x^2 \Rightarrow dx = \frac{dt}{-3x^2} \end{array} \right| = \int x^2 \cos t \frac{dt}{-3x^2} = -\frac{1}{3} \int \cos t dt = -\frac{1}{3} \sin t = -\frac{1}{3} \sin(2-x^3) + C$$

Po vyřešení příkladu je nutné se vrátit zpět k proměnným, v nichž byl příklad zadán. V našem případě se tedy vrátit zpět od proměnné  $t$  k proměnné  $x$ .

Korektnější varianta, která odpovídá přesně substituci podle vztahu (45), spočívá v nalezení derivace funkce přímo v zadání. Zadání je součin dvou funkcí: funkce  $h: y = x^2$  a funkce  $f: y = \cos(2-x^3)$ . Je zřejmé, že funkce  $f$  je funkce složená - její vnitřní funkce je  $g: y = 2-x^3$ . Derivace funkce  $g$  (vnitřní funkce funkce  $f$ ) je  $g'(x) = -3x^2$  a ta je až na konstantu  $-3$  rovna funkci  $h$ . To znamená, že zadání úlohy upravíme tak, aby bylo identické jako původní zadání, ale přitom tak, aby v něm bylo lépe vidět použití vztahu (45):

$-\frac{1}{3} \int \underbrace{\cos(2-x^3)}_{f(g(x))} \underbrace{(-3x^2)}_{g'(x)} dx$ . Podle vztahu (45) a celé věty můžeme tedy psát:

$-\frac{1}{3} \int \cos(2-x^3) (-3x^2) dx = -\frac{1}{3} \int \cos t dt = -\frac{1}{3} \sin t = -\frac{1}{3} \sin(2-x^3) + C$ . Získali jsme tedy stejný výsledek jako u prvního postupu řešení.

Označení funkcí bylo (ač to vypadá na první pohled nestandardně) zvoleno tak, aby korespondovalo se vztahem (45).

### 5.2.3.3 Rozklad na parciální zlomky

Další metoda výpočtu primitivní funkce je tzv. rozklad na parciální zlomky (částecné zlomky), která je též nazývána Gauss – Ostrogradského ansatz. Tato metoda je použitelná tehdy, pokud máme hledat primitivní funkci k funkci, která je definovaná jako podíl dvou polynomů  $P(x)$  a  $Q(x)$ . Přitom je důležité, aby stupeň polynomu  $P(x)$  byl menší než stupeň polynomu  $Q(x)$ .

Pokud budeme mít funkci definovanou jako podíl dvou polynomů  $R(x)$  a  $Q(x)$  takových, že stupeň polynomu  $R(x)$  bude větší než stupeň polynomu  $Q(x)$ , je nutné oba polynomy vydělit. Pak můžeme psát

$$R(x) = Z(x) - \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (46)$$

kde polynom  $Z(x)$  lze snadno integrovat a podíl  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  již splňuje výše uvedenou podmínku (stupeň polynomu

$P(x)$  je menší než stupeň polynomu  $Q(x)$ ).

Postup aplikace této metody a následného výpočtu primitivní funkce nebudeme ovšem rozepisovat pomocí matematických vět. Příslušné matematické věty nejsou těžké na pochopení, ale ve své obecnosti jsou velmi nepřehledné. Proto jejich obsah přeformulujeme a poté použití této metody výpočtu primitivní funkce ukážeme na několika řešených příkladech.

Doporučený postup při hledání primitivní funkce k funkci  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  dané podílem dvou polynomů

$P(x)$  a  $Q(x)$ :

1. zjistit, zda polynom  $P(x)$  má menší stupeň než polynom  $Q(x)$ ; pokud ne, je nutné polynomy vydělit;
2. polynom  $Q(x)$  napsat jako součin lineárních dvojčlenů a případně kvadratických trojčlenů; lineární dvojčleny jsou členy tvaru  $(x - \alpha_i)^{n_j}$ , kde  $\alpha_i$  jsou kořeny rovnice  $Q(x) = 0$  s násobností  $n_j$ ; kvadratické trojčleny jsou členy ve tvaru  $(x^2 + p_k x + q_k)^{m_s}$  s násobností  $m_s$ , přičemž rovnice  $x^2 + p_k x + q_k = 0$  nemají v reálných číslech řešení;
3. podíl  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  rozepsat jako součet zlomků typu  $\frac{A_i}{x - \alpha_i}$  (odpovídají lineárním dvojčlenům) a zlomků typu  $\frac{B_k x + C_k}{x^2 + p_k x + q_k}$  (odpovídají kvadratickým trojčlenům); v případě násobnosti kořenů (resp. kvadratických trojčlenů) se tyto zlomky ještě doplňují, ale to bude ukázáno na konkrétním příkladu;
4. určit hodnoty koeficientů  $A_i$ ,  $B_k$  a  $C_k$ ;
5. najít primitivní funkci ke všem nalezeným zlomkům;
6. výslednou funkci upravit.

Tímto způsobem lze zadanou úlohu vyřešit vždy, když budou splněny podmínky, za kterých jí lze uplatnit. V některých případech lze postupovat pochopitelně i jednodušeji.

**Příklad:** Určete primitivní funkci k funkci  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ .

**Řešení:** Podmínka, že stupeň polynomu v čitateli je menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, je splněna, takže můžeme rozložit polynom ve jmenovateli. Platí  $1-x^2 = (1+x)(1-x)$ . Nyní můžeme tedy najít parciální zlomky příslušné této funkci. Doporučuji zatím kvůli přehlednosti nepsat integrační znak. Hledáme dva zlomky tak, aby platilo:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x}. \quad \text{Pravou stranu výrazu upravíme:}$$

$$\frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A(1-x) + B(1+x)}{1-x^2} = \frac{A+B+x(B-A)}{1-x^2} \quad \text{a porovnáme se zlomkem, který nahrazujeme součtem}$$

parciálních zlomků. Z rovnosti  $\frac{A+B+x(B-A)}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$  vyplývá, že  $A+B=1$  a  $B-A=0$ . Řešením této jednoduché soustavy rovnic dostaneme  $A=B=\frac{1}{2}$ .

Zadanou funkci tedy můžeme přepsat:  $\frac{1}{1-x^2} = \frac{0,5}{1+x} + \frac{0,5}{1-x}$  a můžeme jí integrovat. Postupně tedy lze psát:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \left( \frac{0,5}{1+x} + \frac{0,5}{1-x} \right) dx = 0,5 \left( \int \frac{dx}{1+x} + \int \frac{dx}{1-x} \right) = 0,5 (\ln|1+x| - \ln|1-x|) + C = 0,5 \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

Přitom  $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$  a  $C \in \mathbb{R}$ .

U dalších řešených příkladů bude u výpočtu minimalizován slovní komentář.

**Příklad:** Určete primitivní funkci k funkci  $g(x) = \frac{1+2x}{(x+1)(x^2-1)}$ .

**Řešení:** Pro zadanou funkci platí:  $g(x) = \frac{1+2x}{(x+1)(x^2-1)} = \frac{1+2x}{(x+1)(x+1)(x-1)} = \frac{1+2x}{(x+1)^2(x-1)}$ . Parciální

zlomky nyní budou vypadat takto:  $\frac{1+2x}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$ . Díky násobnosti výrazu  $(x+1)$  je nutné jej rozepsat do tolika zlomků, jaká je násobnost tohoto výrazu.

$$\frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+1)(x-1) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{x^2(B+C) + x(A+2C) - A - B + C}{(x+1)^2(x-1)}$$

Porovnáním s původním zlomkem dostáváme:  $B+C=0$ ,  $A+2C=2$  a  $-A-B+C=1$ . Řešením této soustavy dostaneme  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = -\frac{3}{4}$  a  $C = \frac{3}{4}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{1+2x}{(x+1)(x^2-1)} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{2} \cdot (-1) \frac{1}{x+1} - \frac{3}{4} \ln|x+1| + \frac{3}{4} \ln|x-1| + C = \\ &= -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Přitom  $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$  a  $C \in \mathbb{R}$ .

Další příklad je náročnější, protože vyžaduje znalosti primitivních funkcí, které se na střední škole neprobírají. Ilustruje ale vytvoření parciálních zlomků pro kvadratické trojčleny, které nelze v reálných číslech rozložit na součin lineárních členů.

**Příklad:** Určete primitivní funkci k funkci  $g(x) = \frac{2-x}{(x+3)(x^2+1)}$ .

**Řešení:** Funkce je zadaná ve tvaru, který je možné rovnou začít přepisovat na parciální zlomky. Je vidět, že kvadratický dvočlen  $(x^2+1)$  nelze v reálných číslech rozložit na součin lineárních činitelů, takže lze rovnou přejít k parciálním zlomkům:

$$\begin{aligned} \frac{2-x}{(x+3)(x^2+1)} &= \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+3)}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + 3Bx + Cx + 3C}{(x+3)(x^2+1)} = \\ &= \frac{x^2(A+B) + x(3B+C) + A+3C}{(x+3)(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Srovnáním s původním zlomkem dostáváme:  $A+B=0$ ,  $3B+C=-1$  a

$A+3C=2$ . Řešením této soustavy rovnic dostaneme  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = -\frac{1}{2}$  a  $C = \frac{1}{2}$  a můžeme tedy psát:

$$\begin{aligned} \int \frac{2-x}{(x+3)(x^2+1)} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+3} - \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x+3| - \frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Přitom  $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$  a  $C \in \mathbb{R}$ .

Při řešení jsme využili tabulkový integrál  $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$  a integrál  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ .

### 5.3 Určitý integrál

Pojem primitivní funkce (viz odstavec 5.2) velmi úzce souvisí s celou řadou konkrétních úloh, které se týkají výpočtu obsahu rovinných obrazců (viz odstavec 5.4.1), objemu rotačních těles (viz odstavec 5.4.2), ... Tyto úlohy jsou založeny na pojmu určitý integrál, který se definuje pomocí primitivní funkce.

Vzhledem k tomu, že primitivní funkce byla definována na otevřeném intervalu a vzhledem k tomu, že určitý integrál je vhodné definovat na intervalu uzavřeném, je nutné pojem primitivní funkce nejdříve rozšířit.

**MĚJME DÁNY FUNKCE  $F$  A  $f$  DEFINOVANÉ NA UZAVŘENÉM INTERVALU  $\langle a; b \rangle$ . JESTLIŽE PRO KAŽDÉ  $x \in \langle a; b \rangle$  PLATÍ  $F'(x) = f(x)$ , PŘIČEMŽ DERIVACÍ FUNKCE  $F$  V BODĚ  $a$  ROZUMÍME DERIVACÍ V BODĚ  $a$  ZPRAVA A DERIVACÍ FUNKCE  $F$  V BODĚ  $b$**

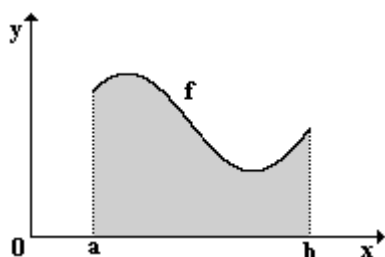
**ROZUMÍME DERIVACI FUNKCE  $F$  V BODĚ  $b$  ZLEVA, ŘÍKÁME, ŽE FUNKCE  $F$  JE PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCI  $f$  NA UZAVŘENÉM INTERVALU  $\langle a; b \rangle$ .**

### 5.3.1 Pojem určitý integrál

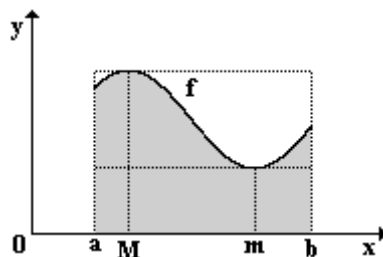
Na obr. 64 je zobrazen graf funkce  $y = f(x)$  pro  $x \in \langle a; b \rangle$ . Funkce  $f(x)$  je v intervalu  $\langle a; b \rangle$  spojitá a nezáporná. Graf funkce  $y = f(x)$  pro  $x \in \langle a; b \rangle$ , přímky  $x = a$ ,  $x = b$  a osa  $x$  (tj. přímka  $y = 0$ ) omezuji jistý rovinný útvar. Tento útvar se většinou značí  $U = U(a, b, f)$ .

Do značení se promítá funkce, která daný útvar omezuje, a meze na ose  $x$ , kterými je obrazec též omezen.

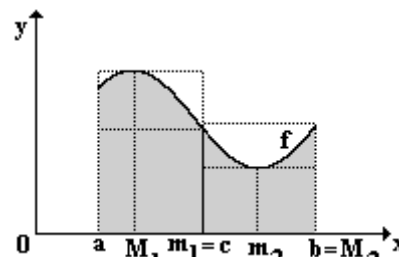
Cílem nyní bude určit obsah tohoto útvaru, tj. určit číslo  $S = S(U)$ .



obr. 64



obr. 65



obr. 66

Pro první přiblížení hrubého odhadu čísla  $S = S(U)$  vyjdeme z následující úvahy: V grafu funkce  $f$  si označíme její minimum  $m$  a maximum  $M$ . Číslo  $m(b-a)$  udává plochu obdélníka, který je danému útvaru  $U$  vepsán, zatímco číslo  $M(b-a)$  označuje plochu obdélníka, který je danému útvaru  $U$  opsán (viz obr. 65). Proto platí i nerovnost:  $m(b-a) \leq S(U) \leq M(b-a)$ .

Tento odhad je pouze orientační a je možné ho dále zpřesnit tak, že budeme interval  $\langle a; b \rangle$  postupně dělit na dvě, tři, čtyři, pět, ... částí. Na každou takto vytvořenou část znovu zopakujeme předcházející úvahu. Na obr. 66 je zobrazeno dělení intervalu  $\langle a; b \rangle$  na dvě části, tj.  $c-a = b-c$ . Na interval  $\langle a; c \rangle$  aplikujeme výše uvedenou úvahu: najdeme minimum  $m_1 = c$  a maximum  $M_1$  a vypočteme obsah  $m_1(c-a)$  vepsaného obdélníka a obsah  $M_1(c-a)$  opsaného obdélníka dané části útvaru  $U$ . Totéž provedeme na intervalu  $\langle c; b \rangle$  a najdeme obsah  $m_2(b-c)$  vepsaného obdélníka a obsah opsaného obdélníka  $M_2(b-c)$  dané části útvaru  $U$ .

Pro obsah útvaru  $U$  tedy v tomto případě platí nerovnost  $m_1(c-a) + m_2(b-c) \leq S(U) \leq M_1(c-a) + M_2(b-c)$ .

I ze srovnání obr. 65 a obr. 66 je zřejmé, že rozdělením intervalu  $\langle a; b \rangle$  na dvě části se skutečnému obsahu obrazce  $U$  přiblížíme více.

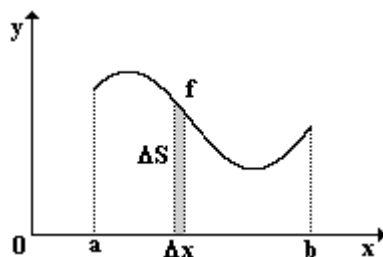
Výše uvedeným postupem bychom mohli pokračovat dále. S rostoucím počtem dílů, na něž rozdělíme interval  $\langle a; b \rangle$ , poroste přesnost určení obsahu  $S(U)$  útvaru  $U$ .

Nejpřesnější výsledek dostaneme, pokud by se nám povedlo rozdělit interval  $\langle a; b \rangle$  na velké množství velmi úzkých částí, u nichž bychom mohli předpokládat, že jsou natolik úzké, že maximum i minimum splývají. Jinými slovy, že šířka jedné takové části je skoro nulová (viz obr. 67).

Vyjádřeno matematicky, hledáme takové rozdělení intervalu  $\langle a; b \rangle$ , pro které platí

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x), \quad (47)$$

kde  $\Delta x$  je šířka částí, na něž byl rozdělen interval  $\langle a; b \rangle$ .



obr. 67

Vzhledem k tomu, že  $\Delta x$  má význam délky (resp. šířky dělení intervalu  $\langle a; b \rangle$ ) je  $\Delta x > 0$ . Proto jsme uvažovali pouze jednostrannou limitu (47).



Limita (47) je podle vztahu (16) derivace funkce  $S$  podle proměnné  $x$  v bodě  $x$  zprava. Můžeme tedy psát

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{dS}{dx} (= S'). \text{ S využitím limity (47) získáme } \frac{dS}{dx} = f(x), \text{ odkud dostaneme } dS = f(x) \cdot dx.$$

Poslední provedená úprava není matematicky zcela v pořádku, nicméně pro získání správné představy základů integrálního počtu je postačující. Z fyzikálního hlediska (nebo geometrického hlediska) je úprava naprosto v pořádku, protože umožňuje vypočítat „kousek plochy na základě přírůstku  $x$ -ové souřadnice“.

Nyní je možné již pro plochu útvaru  $U$  psát  $S = \int_a^b f(x) dx$ .

### 5.3.2 Definice určitého integrálu

NECHĚT  $F$  JE PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCI  $f$  V INTERVALU  $I$ . ROZDÍL  $F(b) - F(a)$  FUNKČNÍCH HODNOT V LIBOVOLNÝCH BODECH  $a$  A  $b$  TOHOTO INTERVALU SE NAZÝVÁ URČITÝ INTEGRÁL FUNKCE  $f$  V MEZÍCH OD  $a$  DO  $b$  A ZNAČÍ SE  $\int_a^b f(x) dx$ .

V právě uvedené definici se proměnná  $x$  nazývá **integrační proměnná**, číslo  $a$  **dolní mez integrálu**, číslo  $b$  **horní mezi integrálu**. Funkce  $f$  se nazývá **integrand**. Z definice plyne, že určitý integrál je reálné číslo, které je jednoznačně určené funkcí  $f$  a mezemi  $a$  a  $b$ .

Při výpočtu integrálu je vhodné zapsat primitivní funkci  $F$  ještě před dosazením mezí. Používá se tento zápis

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \quad (48)$$

Pro čísla  $a$  a  $b$  přitom může platit jedna z nerovností  $a < b$ ,  $a > b$  nebo rovnost  $a = b$ .

Geometrická interpretace určitého integrálu má smysl pouze pro  $a < b$  a pro funkci  $f$ , která je v intervalu  $\langle a; b \rangle$  spojitá a nezáporná. Za těchto podmínek lze s využitím určitého integrálu určit obsah útvaru  $U$ , který je ohraničen grafem funkce  $f$ , osou  $x$  a přímkami  $x = a$  a  $x = b$ .

**VĚTA: KE KAŽDÉ SPOJITÉ FUNKCI V UZAVŘENÉM INTERVALU  $\langle a; b \rangle$  EXISTUJE V TOMTO INTERVALU PRIMITIVNÍ FUNKCE.**

### 5.3.3 Výpočty určitých integrálů

Při výpočtu určitých integrálů se využívá znalostí některých vět, které (podobně jako u derivací) usnadní výpočet určitého integrálu.

Důležité je uvědomit si, že výsledkem určitého integrálu je **číslo**, tedy ve výsledku se **nesmí** objevit integrační proměnná. Ve výsledku neurčitěho integrálu (primitivní funkce) se objevit mohla, protože výsledkem neurčitěho integrálu (primitivní funkce) je **funkce**.

**VĚTA: NECHĚT  $f_1$  A  $f_2$  JSOU V INTERVALU  $I$  SPOJITÉ FUNKCE,  $a$  A  $b$  NECHĚT JSOU LIBOVOLNÉ BODY Z INTERVALU  $I$  A  $c_1$  A  $c_2$  LIBOVOLNÉ REÁLNÉ KONSTANTY. POTOM PLATÍ**

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx. \quad (49)$$

Vztah (49) je analogický vztahu (40), který platí pro výpočet primitivních funkcí.

**VĚTA: JE-LI  $f$  FUNKCE SPOJITÁ A NEZÁPORNÁ V INTERVALU  $\langle a; b \rangle$ , PAK**

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

**VĚTA: JSOU-LI  $f$  A  $g$  FUNKCE SPOJITÉ V INTERVALU  $\langle a; b \rangle$  A JE-LI  $f(x) \geq g(x)$ ,**

**PAK** 
$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Určitý integrál je možné vypočítat i v případě, kdy je dolní mez integrálu větší než mez horní mez integrálu. Platí věta o záměně mezi určitého integrálu.

V tomto případě ale integrál nemá fyzikální aplikaci nebo geometrickou aplikaci.

**VĚTA: PŘI ZÁMĚNĚ MEZÍ URČITÉHO INTEGRÁLU SE MĚNÍ ZNAMÉNKO, TJ. PLATÍ**

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \quad (50)$$

**VĚTA (O ADITIVNOSTI URČITÉHO INTEGRÁLU): JE-LI FUNKCE  $f$  SPOJITÁ V INTERVALU  $I$ , KTERÝ OBSAHUJE LIBOVOLNĚ POLOŽENÉ BODY  $a$ ,  $b$  A  $c$ , PAK PLATÍ**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (51)$$

V předchozí větě je uvedeno, že body  $a$ ,  $b$  a  $c$  mohou být v intervalu umístěny libovolně. Nezávisí tedy na tom, které z čísel bude větší a které menší. Na základě vztahu (50) totiž umíme počítat i integrál, jehož horní mez je menší než dolní mez.

V případě, že zadaný integrál není možné vypočítat elementárními metodami (tj. právě uvedenými metodami), většinou stačí jeho výsledek odhadnout. K tomu slouží následující věta.

**VĚTA: JE-LI  $f$  FUNKCE SPOJITÁ V INTERVALU  $\langle a; b \rangle$  A PLATÍ-LI V INTERVALU  $\langle a; b \rangle$  NEROVNOSTI  $m \leq f(x) \leq M$ , POTOM PLATÍ**

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \quad (52)$$

Používat správně vztah (52) znamená dobře se orientovat ve výpočtech primitivních funkcí a určitých integrálů a mít vzhled do problematiky, kterou pomocí vztahu (52) řešíme (vědět, co lze případně v rámci dané aplikace zanedbat a co již ne, mít řádovou představu o hledaném řešení, ...). Proto se s touto metodou řešení integrálů ve středoškolské matematice příliš často nesetkáme.

Existují i další metody řešení určitých integrálů, které jsou analogické jako metody hledání primitivních funkcí (viz odstavec 5.2.3).

### 5.3.3.1 Substituce v určitém integrálu

Substituční metodu, která se používá k výpočtu primitivní funkce (viz odstavec 5.2.3.2), je možné použít i pro výpočet určitých integrálů, pokud bude dodrženo jedno z následujících pravidel. V případě zavedení nové proměnné se podle zvolené substituce také změní meze určitého integrálu. Pokud přepočítání mezí bude náročný, je možné při integraci s nově zavedenou substituční proměnnou použít obecné meze (např.  $\alpha$  a  $\beta$ ) a po zintegrování dané funkce se vrátit zpět k původní proměnné a tedy i k původním mezím.

**VĚTA: JSOU-LI FUNKCE  $t = g(x)$  A JEJÍ DERIVACE  $g'(x)$  SPOJITÉ V UZAVŘENÉM INTERVALU  $\langle a; b \rangle$  A JE-LI ZÁROVEŇ SPOJITÁ I FUNKCE  $f(t)$  PRO VŠECHNA  $t = g(x)$ , KDE  $x \in \langle a; b \rangle$ , PAK PLATÍ**

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt. \quad (53)$$

Přepočítání mezí vyplývá z porovnání horních mezí a dolních mezí v integrálu na levé straně vztahu (53) a integrálu na jeho pravé straně.

Použití této věty ukážeme na příkladu.

**Příklad:** Vypočtete:  $\int_{-\pi}^{2\pi} 4 \sin x \cdot \cos x dx$ .

**Řešení:** Ukážeme tři způsoby řešení daného příkladu (ve všech případech budou meze při substituci přepočteny):

a) metoda použití goniometrického vztahu pro sinus dvojnásobného argumentu  $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

$$\int_{-\pi}^{2\pi} 4 \sin x \cdot \cos x dx = \int_{-\pi}^{2\pi} 2 \sin 2x dx = \left. \frac{dt}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{dt}{2} \right|_{-2\pi}^{4\pi} = \int_{-2\pi}^{4\pi} 2 \sin t \frac{dt}{2} = \int_{-2\pi}^{4\pi} \sin t dt = [-\cos t]_{-2\pi}^{4\pi} =$$

$$= -\cos 4\pi - (-\cos(-2\pi)) = -\cos 4\pi - (-\cos 2\pi) = -1 + 1 = 0;$$

b) metoda přímé integrace bez použití goniometrických vztahů:

$$\int_{-\pi}^{2\pi} 4 \sin x \cdot \cos x dx = \left. \frac{dt}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sin x} \right|_{-1}^1 = \int_{-1}^1 4 \sin x t \left( -\frac{dt}{\sin x} \right) = -4 \int_{-1}^1 t dt = -4 \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 = -2 [t^2]_{-1}^1 =$$

$$= -2(1 - (-1)^2) = 0;$$

c) metoda přímé integrace přesně podle vztahu (53):

Zadání je napsáno ve formě součinu dvou funkcí:  $g: y = \sin x$  a  $h: y = \cos x$ . Pro funkci  $f$ , která vystupuje ve vztahu (53), platí  $f: y = 1$ . Je zřejmé, že funkce  $h$  je derivací funkce  $f$ , takže s ohledem na vztah (53) můžeme

zadání psát ve tvaru:  $4 \int_{-\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{f(g(x))} \cdot \frac{\cos x dx}{g'(x)}$ . Dalšími úpravami dostaneme:

$$4 \int_{-\pi}^{2\pi} \sin x \cdot \cos x dx = \left| t = \sin x \right| = 4 \int_0^0 t dt = 4 \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^0 = 2 \left[ t^2 \right]_0^0 = 2 \cdot (0 - 0) = 0.$$

Výpočet posledního integrálu by mohl být rychlejší vzhledem k tomu, že horní mez i dolní mez jsou stejné, ale pro názornost byl dopočítán běžným způsobem.

Při řešení tohoto příkladu si můžeme všimnout i toho, že dvěma různými metodami (část a) a b)) jsme získali dvě různé primitivní funkce k zadané funkci  $f: y = 4 \sin x \cdot \cos x$  a to:  $F_a: y = -\cos 2x$  a  $F_b: y = -2 \cos^2 x$ .

Otázkou je, zda se obě funkce liší o konstantu, tak jak odpovídá definici primitivní funkce podle vztahu (37) resp. (38). To je možné zjistit jednoduchou úpravou s využitím goniometrických vztahů:

$$F_a - F_b = -\cos 2x - (-2 \cos^2 x) = -(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \cos^2 x = -\cos^2 x + \sin^2 x + 2 \cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Rozdíl obou primitivních funkcí je konstantní, což je v souladu s definicí primitivní funkce.

### 5.3.3.2 Metoda per partes v určitém integrálu

Stejně jako pro výpočet primitivní funkce bylo možné použít metodu per partes (viz odstavec 5.2.3.1), je možné tuto metodu použít i u určitého integrálu.

**VĚTA: MAJÍ-LI FUNKCE  $u = u(x)$  A  $v = v(x)$  V INTERVALU  $\langle a; b \rangle$  SPOJITÉ DERIVACE, PAK PLATÍ**

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx. \quad (54)$$

Vztah (54) popisující metodu per partes u určitého integrálu je analogický vztahu (44), který popisuje tutéž metodu u neurčitého integrálu (tj. při hledání primitivních funkcí k zadaným funkcím).

**Příklad:** Vypočtete:  $\int_1^{2e} \frac{1}{2} \ln x dx$

**Řešení:** Tento příklad uvádíme proto, aby nikoho nepřekvapilo, že je možné integrovat přirozený logaritmus, ačkoliv v tabulce tab. 1 v odstavci 4.4.5 není uveden. A to metodou per partes. Během výpočtu je třeba dávat pozor na to, že se jedná o integrál určitý a psát tedy důsledně integrační meze:

$$\begin{aligned} \int_1^{2e} \frac{1}{2} \ln x dx &= \frac{1}{2} \int_1^{2e} \ln x dx = \frac{1}{2} \int_1^{2e} 1 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} \right| = \frac{1}{2} \left( [x \ln x]_1^{2e} - \int_1^{2e} x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \frac{1}{2} \left( [x \ln x]_1^{2e} - \int_1^{2e} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( [x \ln x]_1^{2e} - [x]_1^{2e} \right) = \frac{1}{2} (2e \ln 2e - 1 \cdot \ln 1 - (2e - 1)) = \frac{1}{2} (2e \ln 2e - 1 \cdot 0 - 2e + 1) = \\ &= e(\ln 2e - 1) + \frac{1}{2} = e(\ln 2 + \ln e - 1) + \frac{1}{2} = e(\ln 2 + 1 - 1) + \frac{1}{2} = e \ln 2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### 5.3.3.3 Rozklad na parciální zlomky v určitém integrálu

Rozklad na parciální zlomky v určitém integrálu se provádí analogicky jako u neurčitého integrálu (primitivní funkce) - viz odstavec 5.2.3.3. Je ovšem nutné nezapomínat na psaní horní meze integrálu a dolní meze integrálu.

## 5.4 Užití integrálního počtu

Užití integrálního počtu je velmi široké: výpočty obsahů rovinných útvarů, objemů a povrchů rotačních těles, délek rovinných křivek, řešení úloh z fyziky, elektrotechniky, mechaniky, ...

### 5.4.1 Obsah rovinného obrazce

#### 5.4.1.1 Útvar omezený grafem jedné funkce

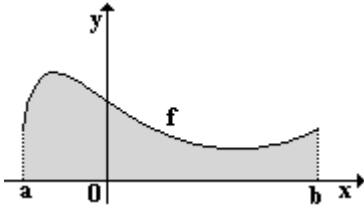
Rovinný útvar  $U = U(a, b, f)$  je (jak bylo uvedeno již v odstavci 5.3.1) omezen grafem spojitě nezáporné funkce  $y = f(x)$  pro  $x \in \langle a; b \rangle$ , přímkami  $x = a$ ,  $x = b$  a osou  $x$  (tj. přímkou  $y = 0$ ). Příklad

takového útvaru je znázorněn na obr. 68. Pro jeho obsah pak platí:  $S(U) = \int_a^b f(x) dx$ .

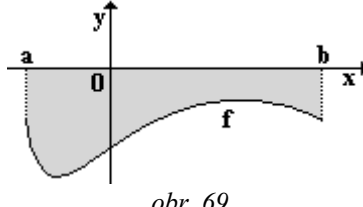
Může se ale stát, že integrovaná funkce  $f$  nenabývá jen kladných hodnot (viz obr. 69). Pro příslušný integrál pak platí  $\int_a^b f(x) dx \leq 0$ . V tomto případě určíme obsah daného útvaru tak, že vypočítáme absolutní

hodnotu příslušného určitého integrálu; tedy platí:  $S(U) = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = - \int_a^b f(x) dx$ .

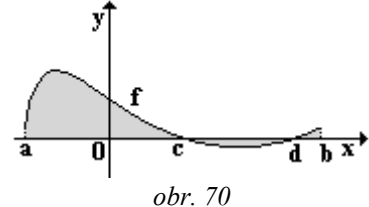
Je-li totiž  $\int_a^b f(x) dx \leq 0$ , pak  $-\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .



obr. 68



obr. 69



obr. 70

Obecně se ovšem může stát, že daná funkce  $f$  nabývá v uvažovaném intervalu  $\langle a; b \rangle$  jak kladných funkčních hodnot, tak i záporných funkčních hodnot. V tomto případě interval  $\langle a; b \rangle$  rozdělíme na intervaly, v nichž funkce nabývá nekladných funkčních hodnot (resp. nezáporných funkčních hodnot), a příslušné integrály vypočteme podle výše uvedených vztahů. Pro obrazec na obr. 70 tedy bude platit vztah vyplývající z aditivnosti

určitého integrálu (vztah (51))  $S(U) = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \left| \int_c^d f(x) dx \right| + \int_d^b f(x) dx$ .

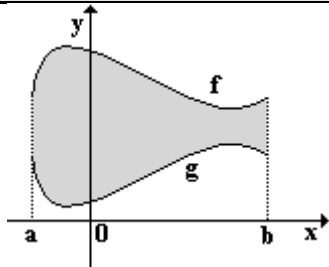
V každém případě musí být obsah jakékoliv plochy (ať už je nad osou  $x$  nebo pod osou  $x$ ) kladný (nebo nulový).

#### 5.4.1.2 Útvar omezený grafy více funkcí

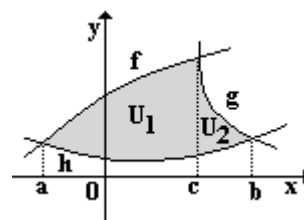
Na obr. 71 je znázorněn útvar  $U = U(a, b, f, g)$ , který je omezen grafem spojitých funkcí  $f$  a  $g$  a přímkami  $x = a$  a  $x = b$ . Pro všechna  $x \in \langle a; b \rangle$  platí  $f(x) \geq g(x)$  a obě funkce jsou v uvažovaném intervalu nezáporné. Označíme-li  $S(U_1) = S(U(a, b, f))$  a  $S(U_2) = S(U(a, b, g))$ , pak pro obsah útvaru  $U$  platí:  $S(U) = S(U_1) - S(U_2)$ , tj.

$$S(U) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (55)$$

Pomocí integrálu  $\int_a^b f(x) dx$  totiž vypočteme obsah plochy ohraničené grafem funkce  $f$ , osou  $x$  a přímkami  $x = a$  a  $x = b$ . To je ale víc, než je obsah vyšrafovaného obrazce na obr. 71. Proto musíme odečíst tu část plochy, která leží pod grafem funkce  $g$  (až k ose  $x$ ) ve stejných mezích.



obr. 71



obr. 72

Vztah (55) platí i v případě, kdy alespoň jedna z funkcí nabývá v intervalu  $\langle a; b \rangle$  také záporných hodnot. Posunutím obou grafů po ose  $y$  tak, aby obě funkce byly nezáporné, převedeme tento případ na předchozí. Posunem obou křivek se obsah daného útvaru nezmění.

Na obr. 72 je znázorněn případ útvaru, který je na intervalu  $\langle a; b \rangle$  ohraničen třemi křivkami. V tomto případě platí  $S(U) = S(U_1) + S(U_2)$ , přičemž průnikem útvarů  $U_1$  a  $U_2$  je hraniční úsečka. Plochu útvaru  $U$  pak vypočítáme na základě vztahu

$$S(U) = \int_a^c [f(x) - h(x)] dx + \int_c^b [g(x) - h(x)] dx.$$

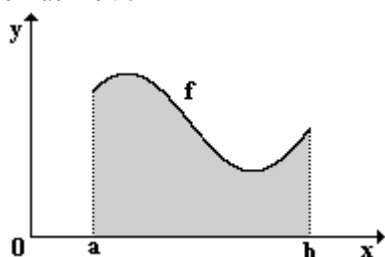
Vztahy (55) a (56) jsou podobné - liší se počtem funkcí, které ohraničují daný plošný útvar  $U$ . Není nutné se učit tyto vztahy nazpaměť. Je důležité chápat význam určitého integrálu a jeho souvislost s obsahem plochy pod grafem dané funkce. U konkrétní úlohy pak „správný vzorec“ vymyslíme snadno.

Ani v tomto případě nezávisí na znaménkách funkčních hodnot funkcí  $f$ ,  $g$  a  $h$  v intervalu  $\langle a; b \rangle$ .

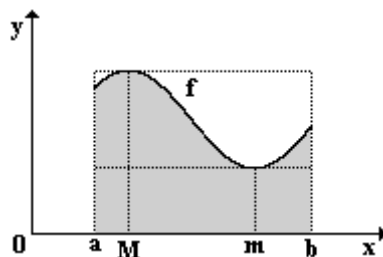
### 5.4.2 Objem rotačního tělesa

Nyní se budeme zabývat výpočtem objemu rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru  $U = U(a, b, f)$  kolem osy  $x$ . Úvahy, pomocí nichž dospějeme k výslednému vztahu, budou podobné jako úvahy, které vedly k definici určitého integrálu (viz odstavec 5.3.1).

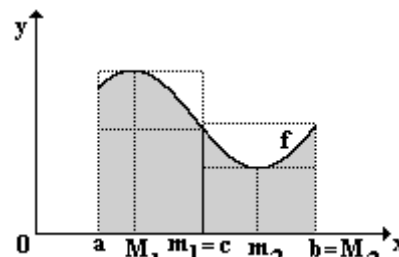
Na obr. 73 je zobrazen rovinný útvar, jehož rotací kolem osy  $x$  vznikne rotační těleso. Jeho objem označíme  $V$ .



obr. 73



obr. 74



obr. 75

Pro první přiblížení hrubého odhadu objemu  $V$  vzniklého tělesa vyjdeme z následující úvahy: V grafu funkce  $f$  si označíme minimum funkce  $m$  a maximum funkce  $M$ . Číslo  $m$  označuje poloměr válce, který je rotačnímu tělesu vepsán, zatímco číslo  $M$  označuje poloměr válce, který je rotačnímu tělesu opsán (viz obr. 74, který znázorňuje rovinný útvar rotující kolem osy  $x$ ). Pro hledaný objem rotačního tělesa platí tedy nerovnost:

$$\pi m^2 (b-a) \leq V \leq \pi M^2 (b-a).$$

Při rotaci vyšrafovaného útvaru z obr. 73 se každý bod daného útvaru pohybuje po kružnici, jejíž střed leží na ose  $x$  a jejíž poloměr je roven vzdálenosti tohoto bodu od osy  $x$ . Např. obdélník o rozměrech  $M$  a  $b-a$  z obr. 74 při rotaci kolem osy  $x$  tedy vytvoří válec o poloměru  $M$  a výšce  $b-a$ .

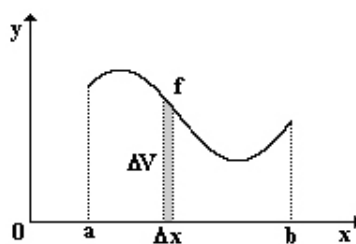
Tento odhad je pouze orientační a je možné ho dále zpřesnit tak, že budeme interval  $\langle a; b \rangle$  postupně dělit na dvě, tři, čtyři, pět, ... části. Na každou takto vytvořenou část znovu zopakujeme předcházející úvahu. Na obr. 75 je zobrazeno dělení intervalu  $\langle a; b \rangle$  na dvě části tj. platí  $c-a = b-c$ . Na interval  $\langle a; c \rangle$  aplikujeme výše uvedenou úvahu: najdeme minimum funkce  $m_1 = c$  a maximum funkce  $M_1$  a vypočteme objem  $\pi m_1^2 (c-a)$  vepsaného válce dané části rotačního tělesa a objem  $\pi M_1^2 (c-a)$  opsaného válce dané části rotačního tělesa. Totéž provedeme na intervalu  $\langle c; b \rangle$  a najdeme objem  $\pi m_2^2 (b-c)$  vepsaného válce dané části rotačního tělesa a objem  $\pi M_2^2 (b-c)$  opsaného válce dané části rotačního tělesa.

Pro objem  $V$  rotačního tělesa tedy platí nerovnost

$$\pi m_1^2 (c-a) + \pi m_2^2 (b-c) \leq V \leq \pi M_1^2 (c-a) + \pi M_2^2 (b-c).$$

Tímto postupem bychom mohli pokračovat dále. S rostoucím počtem dílů, na něž rozdělíme interval  $\langle a; b \rangle$ , poroste přesnost určení objemu rotačního tělesa, které vzniklo rotací útvaru  $U$  kolem osy  $x$ .

Nejpřesnější výsledek dostaneme, pokud by se nám povedlo rozdělit interval  $\langle a; b \rangle$  na velké množství velmi úzkých částí, u nichž bychom mohli předpokládat, že jsou natolik úzké, že maximum funkce na daném intervalu splývá s minimum funkce na tomtéž intervalu. Jinými slovy, že šifka jedné takové části je skoro nulová (viz obr. 76).



obr. 76

Hledáme tedy takové rozdělení intervalu  $\langle a; b \rangle$ , pro které platí

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \pi f^2(x), \quad (57)$$

kde  $\Delta x$  je šířka částí, na něž byl rozdělen interval  $\langle a; b \rangle$ .

Vzhledem k tomu, že  $\Delta x$  má význam délky (resp. šířky dělení intervalu  $\langle a; b \rangle$ ) je  $\Delta x > 0$ . Proto jsme uvažovali pouze jednostrannou limitu (57).

Limita (57) je ovšem (dle vztahu (16)) derivace funkce  $V$  podle proměnné  $x$  v bodě  $x$  zprava. Můžeme tedy psát  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{dV}{dx} (= V')$ . S využitím limity (57) pak dostaneme:  $\frac{dV}{dx} = \pi f^2(x)$ , odkud získáme  $dV = \pi f^2(x) dx$ .

Poslední provedená úprava není matematicky zcela v pořádku, nicméně pro získání správné představy základů integrálního počtu je postačující. Z fyzikálního hlediska (nebo geometrického hlediska) je úprava naprosto v pořádku, protože umožňuje vypočítat „kousek objemu na základě přírůstku  $x$ -ové souřadnice“.

Závěry tedy můžeme shrnout do následující věty.

**VĚTA: OBJEM  $V$  ROTAČNÍHO TĚLESA, KTERÉ VZNIKNE ROTACÍ ÚTVARU  $U = U(a, b, f)$  KOLEM OSY  $x$ , JE DÁN VZTAHEM**

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (58)$$

Analogicky bychom postupovali v případě, že těleso vznikne rotací rovinného útvaru  $U = U(a, b, f)$  kolem osy  $y$ . V tomto případě by bylo nutné místo funkce  $f = f(x)$ , která útvar ohraničuje, vyjádřit funkci inverzní, tj. funkci  $g = g(y)$ . Dále by bylo nutné přepočítat meze, kterými je dané těleso ohraničeno.

Tyto meze vstupují pak do určitého integrálu, pomocí kterého určujeme objem daného rotačního tělesa. Tyto meze v tomto případě hledáme na ose  $y$ .

**VĚTA: OBJEM  $V$  ROTAČNÍHO TĚLESA, KTERÉ VZNIKNE ROTACÍ ÚTVARU  $U = U(a, b, f)$  KOLEM OSY  $y$ , JE DÁN VZTAHEM**

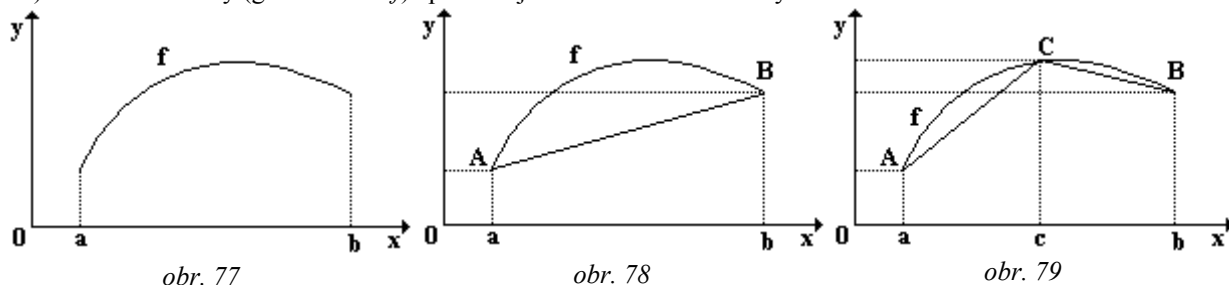
$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} g^2(y) dy. \quad (59)$$

Vztahy (58) a (59) jsou formálně stejné, liší se jen osou, kolem které zadaný útvar rotuje a na které tedy pak hledáme meze vymezující rotující útvar.

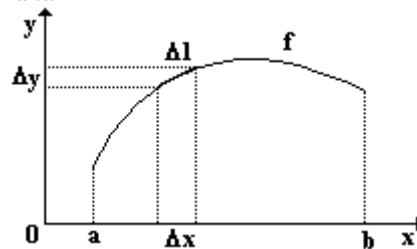
### 5.4.3 Délka křivky

Pro výpočet délky křivky provedeme podobné úvahy, jako při odvozování obsahu plošného útvaru ohraničeného grafem funkce (viz odstavec 5.4.1) nebo při odvozování objemu rotačního tělesa (viz odstavec 5.4.2).

Na obr. 77 je zobrazena spojitá funkce  $f$ , jejíž graf představuje určitou křivku. Její délku  $l$  v intervalu  $\langle a; b \rangle$  chceme nyní určit. Jako první odhad délky poslouží délka úsečky  $AB$  spojující krajní body dané křivky na zadaném intervalu (viz obr. 78). Lepší odhad ostaneme, pokud interval  $\langle a; b \rangle$  rozdělíme na více částí (viz obr. 79): zde délku křivky (grafu funkce  $f$ ) aproximujeme délkou lomené čáry  $ACB$ .



Právě uvedeným postupem je možné pokračovat dále. S rostoucím počtem úseků lomené čáry, která nahradí uvažovanou křivku, bude očekávaný výsledek (tj. délka lomené čáry  $A...B$ ) přesnější a bude se stále více blížit délce skutečné křivky. Ideální by bylo, kdybychom interval  $\langle a; b \rangle$  rozdělili na velké množství částí, u nichž bychom mohli předpokládat, že lomená čára je přesně stejná, jako délka křivky na zvolené části intervalu  $\langle a; b \rangle$ . Jinými slovy hledáme takové rozdělení intervalu  $\langle a; b \rangle$ , při němž se délka jedné části intervalu  $\langle a; b \rangle$  blíží nule, tj.  $\Delta x \rightarrow 0$  (viz obr. 80).



obr. 80

Na základě obr. 80 je možné pro element  $\Delta l$  délky křivky  $l$  podle Pythagorovy věty psát  $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ . Tento vztah je možné dále upravit na tvar  $\Delta l = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$ . Vzhledem k tomu, že požadujeme, aby se délka  $\Delta x$  jedné části intervalu  $\langle a; b \rangle$  limitně blížila nule, bude se limitně blížit nule i přírůstek délky křivky  $\Delta l$ . Můžeme tedy psát

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta l}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}. \quad (60)$$

Vzhledem k tomu, že  $\Delta x$  má význam délky (resp. šířky dělení intervalu  $\langle a; b \rangle$ ) je  $\Delta x > 0$ . Proto jsme uvažovali pouze jednostrannou limitu (60).

Limita (60) ale je derivace funkce  $l$  podle proměnné  $x$  v bodě  $x$  zprava (viz vztah (16)). Můžeme tedy psát  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta l}{\Delta x} = \frac{dl}{dx}$ . Analogicky můžeme pro podíl  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  v součtu pod odmocninou psát  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ .

S využitím limity (60) a právě uvedeného vztahu dostáváme  $\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ , odkud lze vyjádřit

$$dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Poslední provedené úpravy nejsou matematicky zcela v pořádku, nicméně pro získání správné představy základů integrálního počtu jsou postačující. Z fyzikálního hlediska (nebo geometrického hlediska) je úprava naprosto v pořádku, protože umožňuje vypočítat „kousek délky křivky na základě přírůstku  $x$ -ové souřadnice“.

**VĚTA: NECHŤ JE DÁNA FUNKCE  $f$ , KTERÁ JE SPOJITÁ V INTERVALU  $\langle a; b \rangle$  A KTERÁ MÁ VE VŠECH JEHO VNITŘNÍCH BODECH DERIVACI. DÉLKA  $l$  KŘIVKY, KTERÁ JE GRAFEM TĚTO FUNKCE  $f$  NA INTERVALU  $\langle a; b \rangle$ , JE DÁNA VZTAHEM**

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (61)$$

U řady funkcí je velmi obtížné vypočítat tento integrál, protože obsahuje odmocninu z výrazu, v němž vystupuje kvadrát derivace funkce. Pro výpočet délky křivky na daném intervalu je tedy nutné volit některé speciální substituce, které výpočet zjednoduší.

#### 5.4.4 Povrch rotačního tělesa

Nyní se budeme zabývat výpočtem povrchu rotační plochy, která vznikne rotací grafu spojité funkce  $f$  kolem osy  $x$ .

Bude nás zajímat jen povrch rotační plochy, tj. obsah pláště rotačního tělesa - nebudeme tedy uvažovat podstavy rotačního tělesa. Vzhledem k tomu, že bude rotovat jen graf funkce (tj. „čára“), bude těleso duté. Analogicky by ale bylo možné postupovat i tehdy, když by rotoval nějaký útvar, který je grafem funkce  $f$  ohraničený.

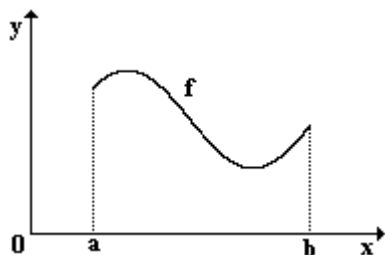
Úvahy, pomocí nichž dospějeme k výslednému vztahu, budou podobné jako úvahy, které vedly k definici určitého integrálu (viz odstavec 5.3.1).

Na obr. 81 je zobrazen graf spojité funkce  $f$  definované na uzavřeném intervalu  $\langle a; b \rangle$ , jehož rotací kolem osy  $x$  vznikne rotační plocha (resp. rotační těleso). Povrch této rotační plochy označíme  $S$ .

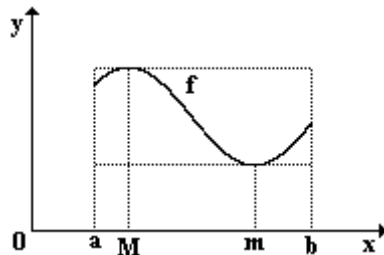
Pro první přiblížení hrubého odhadu povrchu  $S$  vzniklého tělesa vyjdeme z následující úvahy: V grafu funkce  $f$  si označíme její minimum  $m$  a její maximum  $M$ . Číslo  $m$  označuje poloměr válce, který je rotačnímu tělesu vepsán, zatímco číslo  $M$  označuje poloměr válce, který je rotačnímu tělesu opsán (viz obr. 82, který znázorňuje graf funkce  $f$  rotující kolem osy  $x$ ). Pro hledaný povrch rotačního tělesa platí tedy nerovnost:  $2\pi m(b-a) \leq S \leq 2\pi M(b-a)$ .

Tento odhad je pouze orientační a je možné ho dále zpřesnit tak, že budeme interval  $\langle a; b \rangle$  postupně dělit na dvě, tři, čtyři, pět, ... části. Na každé takto vytvořené části znovu zopakujeme předcházející úvahu. Na obr. 83

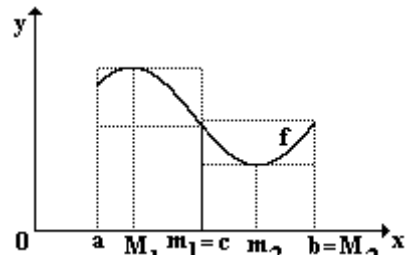
je zobrazeno dělení intervalu  $\langle a; b \rangle$  na dvě části, přičemž platí  $c - a = b - c$ . Na interval  $\langle a; c \rangle$  aplikujeme výše uvedenou úvahu: najdeme minimum funkce  $m_1 = c$  a maximum funkce  $M_1$  a vypočteme povrch  $2\pi m_1(c - a)$  vepsaného válce dané části rotačního tělesa a povrch  $2\pi M_1(c - a)$  opsaného válce dané části rotačního tělesa. Totéž provedeme na intervalu  $\langle c; b \rangle$  a najdeme povrch  $2\pi m_2(b - c)$  vepsaného válce této části rotačního tělesa a povrch  $2\pi M_2(b - c)$  opsaného válce dané části rotačního tělesa.



obr. 81



obr. 82

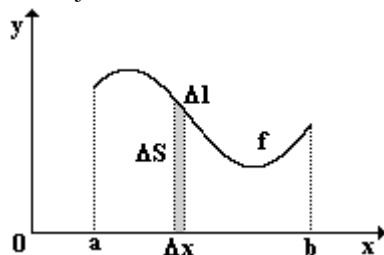


obr. 83

Pro povrch  $S$  pláště rotačního tělesa tedy platí nerovnost  $2\pi m_1(c - a) + 2\pi m_2(b - c) \leq S \leq 2\pi M_1(c - a) + 2\pi M_2(b - c)$ .

Tímto postupem bychom mohli pokračovat dále. S rostoucím počtem dílů, na něž rozdělíme interval  $\langle a; b \rangle$ , poroste přesnost určení povrchu rotačního tělesa, které vzniklo rotací grafu funkce  $f$  kolem osy  $x$ .

Nejpřesnější výsledek dostaneme, pokud by se nám povedlo rozdělit interval  $\langle a; b \rangle$  na velké množství velmi úzkých částí, u nichž bychom mohli předpokládat, že jsou natolik úzké, že maximum funkce i minimum funkce téměř splývají. Jinými slovy, že šířka jedné takové části se limitně blíží nule (viz obr. 84).



obr. 84

Hledáme tedy takové rozdělení intervalu  $\langle a; b \rangle$ , pro které platí

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0^+} \frac{\Delta S}{\Delta l} = 2\pi f(x), \quad (62)$$

kde  $\Delta l$  je délka části grafu funkce  $f$ , která odpovídá části  $\Delta x$  intervalu  $\langle a; b \rangle$ .

Element délky  $\Delta l$  grafu funkce  $f$  představuje výšku elementárního válečku, který na části  $\Delta x$  intervalu  $\langle a; b \rangle$  nahrazuje rotační těleso.

Vzhledem k tomu, že  $\Delta l$  má význam délky části křivky grafu funkce  $f$  je  $\Delta l > 0$ . Proto jsme uvažovali pouze jednostrannou limitu (62).

Limita (62) je (podle vztahu (16)) derivace funkce  $S$  podle proměnné  $l$  v bodě  $l$  zprava. Můžeme tedy psát  $\lim_{\Delta l \rightarrow 0^+} \frac{\Delta S}{\Delta l} = \frac{dS}{dl}$ . Na základě limity (62) pak dostaneme:  $\frac{dS}{dl} = 2\pi f(x)$ , odkud získáme  $dS = 2\pi f(x) dl$ .

Element  $dl$  délky grafu funkce  $f$  je možné napsat podle odvození z odstavce 5.4.3 ve tvaru:  $dl = dx \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ . Pro element  $dS$  povrchu uvažovaného rotačního tělesa pak lze tedy psát:

$$dS = 2\pi f(x) dl = 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \text{ Odtud pak dostáváme } S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Poslední provedené úpravy, jak už víme, nejsou matematicky zcela v pořádku. Nicméně pro získání základní představy „odvození“ vztahu pro výpočet povrchu pláště rotačního tělesa jsou postačující. Z fyzikálního hlediska (nebo geometrického hlediska) jsou úpravy v pořádku, protože umožňují vypočítat „kousek povrchu pláště rotačního tělesa na základě přírůstku  $x$ -ové souřadnice (resp. délky křivky)“. Odvození na úrovni vysoké školy je náročnější, i když jednodušší. Jednodušší proto, že okamžitě vyplývá z jistých matematických vět týkajících se výpočtů určitých integrálů, náročnější proto, že dokázat a pochopit tyto věty není na úrovni střední školy zcela triviální.



**VĚTA: NECHŤ JE DÁNA FUNKCE  $f$ , KTERÁ JE SPOJITÁ V INTERVALU  $\langle a; b \rangle$  A KTERÁ MÁ VE VŠECH JEHO VNITŘNÍCH BODECH DERIVACI. POVRCH  $S$  PLÁŠTĚ ROTAČNÍHO TĚLESA, KTERÉ VZNIKNE ROTACÍ GRAFU TĚTO FUNKCE  $f$  KOLEM OSY  $x$ , JE DÁN VZTAHEM**

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (63)$$

Výpočet tohoto integrálu není triviální - viz poznámka na konci odstavce 5.4.3.

— Analogicky bychom definovali vztah pro výpočet povrchu pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce kolem osy  $y$ .  
—  
—  
—

## 6. TENZORY

Ve fyzice se setkáváme s řadou fyzikálních veličin, které se podstatným způsobem liší: u některých stačí k jejich plné charakteristice jedno číslo, u jiných je potřeba čísel více. Podle toho můžeme fyzikální veličiny rozdělit na:

1. skaláry (tenzory 0. řádu) - veličiny, k jejichž plnému popisu stačí jediné číslo ( $3^0 = 1$ ); jedná se např. o hmotnost, teplotu, hustotu, ...
2. vektory (tenzory 1. řádu) - veličiny, které k plnému popisu potřebují tři čísla (složky:  $3^1 = 3$ ); jedná se např. o sílu, zrychlení, rychlost, ...
3. tenzory 2. řádu - veličiny, k jejichž popisu je nutné znát devět čísel (složek:  $3^2 = 9$ ); jedná se např. o moment setrvačnosti, napětí při deformaci pružných těles, ...
4. tenzory vyšších řádů - veličiny, které ke svému plnému popisu potřebují znalost obecně  $3^n$  ( $n \in \mathbb{N}; n \geq 3$ ) čísel (složek); jedná se např. o tenzor piezoelektrických vlastností krystalu (27 složek), tenzor napětí anizotropního tělesa (81 složek), ...

Pochopitelně, že ne každý libovolný výběr  $3^n$  čísel tvoří složky tenzoru  $n$  - tého řádu. Souřadnice tenzoru mohou být ale v různých bodech prostoru různé a mohou se měnit v závislosti na čase. Složky tenzoru tedy mohou být funkcí jak prostoru tak času.

Dříve než se dostaneme k tenzorům, zavedeme pojmy skaláry a vektory, které jsou sice intuitivně jasné, ale které výborně poslouží při definici tenzoru. Za vztážnou soustavu budeme vždy volit kartézský systém souřadnic.

### 6.1 Skaláry

**SKALÁR JE VELIČINA, V LIBOVOLNÉM SOUŘADNÉM SYSTÉMU DEFINOVANÁ JEDINÝM ČÍSLEM (NEBO FUNKCÍ), KTERÉ SE PŘI ZMĚNĚ SOUŘADNÉHO SYSTÉMU NEZMĚNÍ.**

*Poznámka:* Změnou souřadného systému je myšlena vždy některá z transformací kartézského systému souřadnic popsaná v odstavcích 2.6.

Skalár je tedy **invariantem** (konstantní) vzhledem k transformacím kartézského systému souřadnic, při němž se nemění jednotky měřítek na osách kartézského systému (tj. že jedna soustava nevznikne z jiné např. natažením jedné z os).

**Příklad:** V kartézské soustavě  $Oxy$  v rovině jsou dány dva body  $A = [x_A; y_A]$  a  $B = [x_B; y_B]$ . Dokažte, že délka úsečky  $AB$  je skalár.

**Řešení:** Délka úsečky  $AB$  v rovině je dána vztahem, který vychází z Pythagorovy věty:  $|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ . Budeme-li chtít nyní vyjádřit délku této úsečky v soustavě souřadnic  $Ox'y'$ , která vznikne z původní soustavy souřadnic  $Oxy$  otočením a následným posunem počátku do bodu o souřadnicích  $[x_0; y_0]$ , je možné vyjádřit souřadnice bodů  $A$  a  $B$  v této čárkované soustavě souřadnic pomocí

transformačních vztahů, které byly odvozeny v odstavci 2.6.1.3: 
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Bod  $A'$  má tedy souřadnice  $A' = [x'_A; y'_A] = [x_A \cos \alpha - y_A \sin \alpha - x_0; x_A \sin \alpha + y_A \cos \alpha - y_0]$ , analogicky pro bod  $B'$  dostáváme:  $B' = [x'_B; y'_B] = [x_B \cos \alpha - y_B \sin \alpha - x_0; x_B \sin \alpha + y_B \cos \alpha - y_0]$ . Pro délku úsečky  $A'B'$  pak

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x'_A - x'_B)^2 + (y'_A - y'_B)^2} = \sqrt{(\cos \alpha (x_A - x_B) - \sin \alpha (y_A - y_B))^2 + (\sin \alpha (x_A - x_B) + \cos \alpha (y_A - y_B))^2} = \\ &= \sqrt{\cos^2 \alpha (x_A - x_B)^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha (x_A - x_B)(y_A - y_B) + \sin^2 \alpha (y_A - y_B)^2 + \\ &+ \sin^2 \alpha (x_A - x_B)^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha (x_A - x_B)(y_A - y_B) + \cos^2 \alpha (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = |AB| \end{aligned}$$

### 6.2 Vektory

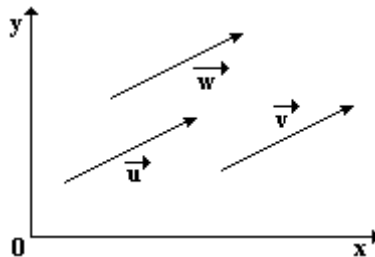
Vektorové veličiny (posunutí, síla, zrychlení, ...) jsou dány trojicí reálných čísel nebo funkcí. Je třeba si ale uvědomit, že vektor není libovolná kombinace tří čísel, není to výběr tří skalárních veličin.

**Příklad:** Dvěma čísly (tj. dvěma skaláry: tlakem a teplotou) je možné popsat stav ideálního plynu a stejně tak dvěma čísly (dvěma skaláry: rozdíly)  $\Delta x$  a  $\Delta y$  je možné popsat posunutí v rovině. Při změně souřadného systému souřadného systému se teplota ani tlak ideálního plynu nezmění, protože z těchto veličin není možné vytvořit vektor, zatímco rozdíly souřadnic se změní přesně podle příslušné transformace (na základě příkladu z odstavce 6.1 je ale jasné, že velikost uvažovaného posunutí se nezmění). (Navíc není možné, aby každá ze souřadnic vektoru měla jinou jednotku!)

Trojice čísel nebo funkcí, která definují vektor, se při změně souřadného systému změní. Změní se ovšem takovým způsobem, že obě trojice v každém ze souřadných systémů definují jeden a tentýž vektor. Nejobecnější

transformaci kartézského systému souřadnic je jeho otočení (viz odstavec 2.6.2) spojené s posunutím. Vzhledem k tomu, že vektor je dán pouze rozdíly souřadnic  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  a  $\Delta z$ , je pro nás posunutí nezajímavé, protože posun by se projevil pouze v souřadnicích bodů a nikoliv v souřadnicích rozdílů (při rozdílu souřadnic dvou bodů se posun vzájemně odečte). Při této příležitosti je vhodné připomenout rozdíl mezi **vektorem** a **umístěním vektoru**.

Na obr. 85 jsou znázorněny vektory  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$ , které jsou různými umístěními téhož vektoru  $\vec{u}$ . Všechny tři vektory mají totiž stejnou velikost, stejné souřadnice (jsou dány rozdílem počátečního a koncového bodu vektoru). Skutečnost, do jakého bodu vektor umístíme, neovlivní souřadnice daného vektoru. Tento fakt vychází z toho, že vektoru je možné přiřadit orientovanou úsečku v prostoru, a tudíž jeho složky odpovídají rozdílům kartézských souřadnic počátečního a koncového bodu této úsečky.



obr. 85

Definice vektoru vychází z definičních vztahů transformace kartézského systému souřadnic uvedených v odstavci 2.6.2. V tomto odstavci je možné také najít legendu k použitému značení.

**VEKTOR JE VELIČINA, DEFINOVANÁ V KAŽDÉM SOUŘADNÉM SYSTÉMU TROJICÍ ČÍSEL (NEBO FUNKCÍ)  $v_1, v_2, v_3$ , KTERÉ SE PŘI ZMĚNĚ SOUŘADNÉHO SYSTÉMU MĚNÍ PODLE VZTAHŮ:**

$$v'_1 = v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \beta_1 + v_3 \cos \gamma_1$$

$$v'_2 = v_1 \cos \alpha_2 + v_2 \cos \beta_2 + v_3 \cos \gamma_2$$

$$v'_3 = v_1 \cos \alpha_3 + v_2 \cos \beta_3 + v_3 \cos \gamma_3.$$

**ČÍSLA (NEBO FUNKCE)  $v_1, v_2, v_3$  NAZÝVÁME SLOŽKY VEKTORU.**

Tato definice umožňuje přejít přirozeným způsobem k definici tenzoru druhého a vyššího řádu (viz odstavec 6.3) a dále dovoluje z jednotného hlediska zkoumat tenzorové vlastnosti fyzikálních veličin.

### 6.3 Tenzory 2. řádu

Povídání o tenzorech zestručníme na nejvyšší možnou míru. Odstavce o tenzorech a jejich vlastnostech neplatí obecně - zaměříme se jen na tenzory druhého řádu (tj. na ty nejjednodušší). Ani zde ale nebude podán výklad kompletní. V případě speciálních požadavků na vysokých školách je nutno nastudovat detailnější literaturu.

Podobným způsobem jakým se definuje vektor (viz odstavec 6.2), je možné definovat i tenzor:

**TENZOR 2. ŘÁDU JE VELIČINA, V KAŽDÉM SOUŘADNÉM SYSTÉMU DEFINOVANÁ DEVÍTI ČÍSLY (NEBO FUNKCEMI)  $T_{ij}$  (PRO  $i, j = 1, 2, 3$ ), KTERÉ SE PŘI ZMĚNĚ TOHOTO SOUŘADNÉHO SYSTÉMU MĚNÍ NA  $T'_{ij}$  PODLE VZTAHŮ:**

$$T'_{ij} = T_{11} \cos \alpha_i \cos \alpha_j + T_{12} \cos \alpha_i \cos \beta_j + T_{13} \cos \alpha_i \cos \gamma_j + \\ + T_{21} \cos \beta_i \cos \alpha_j + T_{22} \cos \beta_i \cos \beta_j + T_{23} \cos \beta_i \cos \gamma_j + \\ + T_{31} \cos \gamma_i \cos \alpha_j + T_{32} \cos \gamma_i \cos \beta_j + T_{33} \cos \gamma_i \cos \gamma_j.$$

**ČÍSLA  $T_{ij}$  NAZÝVÁME SLOŽKY TENZORU 2. ŘÁDU.**

Někdy je dobré zapsat složky tenzoru 2. řádu pomocí matice (více o maticích je v odstavci 2.3), které se

říká **matice tenzoru**:  $T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$ .

Tenzor je tedy jakási tabulka či matice, jejíž jednotlivé složky mají určité vlastnosti. Tyto vlastnosti zaručují, že se tenzor bude při přechodu z jedné soustavy do druhé „dobře transformovat“. Ovšem ne každá matice je tenzorem!

Definice tenzoru 2. řádu je oproti definici vektoru z odstavce 6.2 komplikovanější. Zjednodušení by mohlo přinést použití Einsteinova sumačního pravidla (viz odstavec 2.7.3.3) případně další přeznačení používaných veličin. Toto přeznačení sice výrazně zjednoduší zápis jednotlivých složek tenzoru, nicméně už „přestane být vidět podstata“ (tj. souvislost s transformací systému souřadnic), takže toto přeznačení a „zjednodušení“ nebudeme provádět. Stejně tak se nebudeme zabývat tenzory vyšších řádů. Jejich definice v symbolech z definice tenzoru 2. řádu by byla dost komplikovaná.

Proto si ukážeme pouze některé z vlastností tenzorů na tenzorech druhých řádů. U tenzorů vyšších řádů by to bylo podobné.

Nebudou-li v dalším textu výslovně uvedeny meze pro jednotlivé tenzorové indexy, využívá se Einsteinovo sumační pravidlo, které je vysvětleno v odstavci 2.7.3.3.

### 6.3.1 Tenzorová algebra aneb základní vlastnosti a operace s tenzory 2. řádu

Zvláštní místo mezi tenzory zaujímá nulový tenzor.

**NULOVÝ TENZOR DRUHÉHO ŘÁDU JE TENZOR  $\vec{0}$ , JEHOŽ VŠECHNY SOUŘADNICE JSOU NULOVÉ, T.J. PLATÍ:  $T_{ij} = 0$  PRO  $i, j = 1, 2, 3$ .**

Jednotkový tenzor je zaveden v odstavci 6.3.3.

Nyní se podíváme na základní operace s tenzory. Jako první se nabízí sčítání dvou tenzorů. Sčítat je možné jen tenzory stejného řádu a struktury. Tenzory sčítáme tak, že sečteme jejich odpovídající souřadnice:

**NECHŤ  $\vec{A} = (A_{ij})$  A  $\vec{B} = (B_{ij})$  JSOU DVA TENZORY DRUHÉHO ŘÁDU. TENZOR  $\vec{C}$ , PRO KTERÝ PLATÍ  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ , SE NAZÝVÁ SOUČET TENZORŮ, PŘIČEMŽ PLATÍ  $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$  PRO  $i, j = 1, 2, 3$ .**

Je zřejmé, že sčítání je možné zobecnit na libovolný počet sčítanců.

Násobení tenzoru skalárem se provádí tak, že daným skalárem násobíme každou souřadnici tenzoru:

**NECHŤ  $\vec{A} = (A_{ij})$  JE TENZOR DRUHÉHO ŘÁDU A  $\lambda$  REÁLNÉ ČÍSLO (SKALÁR). TENZOR  $\vec{B}$ , PRO KTERÝ PLATÍ  $\vec{B} = \lambda \vec{A}$ , SE NAZÝVÁ NÁSOBEK TENZORU A PLATÍ  $B_{ij} = \lambda A_{ij}$  PRO  $i, j = 1, 2, 3$ .**

Existují další operace, které je možné provádět s tenzory (násobení tenzorů, úžení tenzorů, ...), ale ty se už týkají tenzorů vyšších řádů. Vzhledem k tomu, že je řeč o tenzorech druhých řádů, nemá smysl mluvit o těchto dalších operacích. Zápis těchto operací vychází ze zápisu definice tenzoru vyššího řádu, která je odlišná (nejen obsahem, ale i formou zápisu) od definice tenzorů druhého řádu, která byla uvedena v odstavci 6.3.

Tak například tenzor, který je součinem dvou tenzorů, je řádu, který je součtem řádů obou násobených tenzorů. Stejně tak operace úžení tenzorů dává jako výsledek tenzor, který je o dva řády menší než je tenzor původní.

### 6.3.2 Symetrické a antisymetrické tenzory

Pro další počítání a některá případná zjednodušení, která se objevují i ve fyzikálních aplikacích tenzorů, se zavádí tyto „speciální“ tenzory - symetrický a antisymetrický.

**TENZOR 2. ŘÁDU  $\vec{T} = (T_{ij})$ , PRO JEHOŽ SOUŘADNICE PLATÍ  $T_{ij} = T_{ji}$  PRO  $i, j = 1, 2, 3$  SE NAZÝVÁ SYMETRICKÝ TENZOR.**

Analogicky se definuje i antisymetrický tenzor:

**TENZOR 2. ŘÁDU  $\vec{T} = (T_{ij})$ , PRO JEHOŽ SOUŘADNICE PLATÍ  $T_{ij} = -T_{ji}$  PRO  $i, j = 1, 2, 3$  SE NAZÝVÁ ANTISYMETRICKÝ TENZOR.**

Pokud o nějakém tenzoru víme, že je symetrický nebo antisymetrický, zjednoduší se výpočty, které s ním budeme provádět. K zadání symetrického tenzoru 2. řádu totiž stačí místo původně 9 souřadnic (čísel) jen 6 souřadnic (čísel). Symetrický tenzor je totiž symetrický podle své hlavní diagonály - stačí tedy zadat tři čísla na hlavní diagonále, tj. čísla  $T_{ii}$ , a pak tři čísla pod touto hlavní diagonálou.

U antisymetrického tenzoru je situace ještě jednodušší. Vzhledem k jeho definici stačí zadat jen 3 souřadnice (čísla). Má-li totiž platit  $T_{ij} = -T_{ji}$  i pro prvky na hlavní diagonále, pak musí být  $T_{ii} = -T_{ii}$ . Tomu ale odpovídá jediná souřadnice (číslo) a to nula. Antisymetrický tenzor má tedy na hlavní diagonále nuly a k jeho plnému určení stačí zadat tři souřadnice (čísla) pod touto hlavní diagonálou.

Právě uvedené vlastnosti (tedy symetrie a antisymetrie tenzoru) jsou **invariantní** (neměnné) při změně soustavy souřadnic.

Budeme-li uvažovat tenzor  $\vec{T} = (T_{ij})$ , pak určitě platí:  $T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ . Označme nyní  $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$  a  $A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ . Tím jsme získali tenzor  $\vec{S} = (S_{ij})$ , který je symetrický, protože platí:  $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = \frac{1}{2}(T_{ji} + T_{ij}) = S_{ji}$ . Dále jsme dostali tenzor  $\vec{A} = (A_{ij})$ , který je antisymetrický, protože jistě platí:  $A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = -\frac{1}{2}(T_{ji} - T_{ij}) = -A_{ji}$ . Původní tenzor  $\vec{T}$  lze tedy zapsat ve tvaru  $\vec{T} = \vec{S} + \vec{A}$ . Jinými slovy: každý tenzor je možné zapsat jako součet tenzoru symetrického a antisymetrického.

**POSTUP, KTERÝM SE ZE SOUŘADNIC  $(T_{ij})$  TENZORU  $\vec{T}$  TVOŘÍ SOUŘADNICE SYMETRICKÉHO TENZORU  $\vec{S}$  DEFINIČNÍM VZTAHEM  $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$ , SE NAZÝVÁ SYMETRIZOVÁNÍ TENZORU  $\vec{T}$ .**

**POSTUP, KTERÝM SE ZE SOUŘADNIC  $(T_{ij})$  TENZORU  $\bar{T}$  TVOŘÍ SOUŘADNICE ANTISYMETRICKÉHO TENZORU  $\bar{A}$  DEFINIČNÍM VZTAHEM  $A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ , SE NAZÝVÁ ALTERNOVÁNÍ TENZORU  $\bar{T}$ .**

V případě, že je tenzor  $\bar{T}$  symetrický (resp. antisymetrický) je jeho antisymetrická část  $\bar{A}$  (resp. symetrická část  $\bar{S}$ ) nulový tenzor.

Symetrickou část tenzoru (resp. přímo symetrický tenzor) lze ještě rozdělit na dvě části.

**STOPA SYMETRICKÉHO TENZORU  $\bar{T}$  SE ZNAČÍ SYMBOLEM  $tr\bar{T}$  (NĚKDY TĚŽ  $Sp\bar{T}$ ) A JE DEFINOVÁNA TAKTO:  $tr\bar{T} = Sp\bar{T} = \sum_{i=1}^3 T_{ii} = T_{ii}$ .**

*Poznámka: Poslední úprava definičního vztahu stopy tenzoru vychází z Einsteinova sumačního pravidla (viz odstavec 2.7.3.3).*

Stopa symetrického tenzoru tedy je součet prvků na jeho hlavní diagonále.

**TENZOR  $\bar{D}$ , JEHOŽ SOUŘADNICE  $D_{ij}$  JSOU DEFINOVÁNY VZTAHEM  $D_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3}(tr\bar{T})\delta_{ij}$ , SE NAZÝVÁ DEVIÁTOR SYMETRICKÉHO TENZORU  $\bar{T}$ .  $\delta_{ij}$  JSOU SOUŘADNICE KRONECKEROVA TENZORU.**

Deviátor je možné psát i ve tvaru bez souřadnic uvedených tenzorů:  $\bar{D} = \bar{T} - \frac{1}{3}(tr\bar{T})\bar{\delta}$ .

Deviátor i stopa mají v některých oblastech fyziky důležitou roli (deviátor tenzoru napětí a tenzoru deformace se používá v teorii malých pružně elastických deformací, ...).

U tenzorů vyšších řádů než druhého je třeba si uvědomit, že je nutné mluvit o tenzoru, který je symetrický v určitých dvou indexech. Tenzor druhého řádu (mající dva indexy), je symetrický (v obou indexech). U tenzorů vyšších řádů je ale třeba zdůraznit indexy, vzhledem k nimž je tenzor symetrický. Analogická poznámka platí i pro antisymetrické tenzory vyšších řádů.

### 6.3.3 Izotropní tenzory

Zvláštní postavení mezi tenzory mají tenzory, jejichž souřadnice se při změně soustavy souřadnic nemění. To znamená, že mají stejné souřadnice ve všech soustavách souřadnic. Takové tenzory se nazývají **izotropní tenzory**.

Každý skalár je izotropní tenzor nultého řádu (viz příklad v odstavci 6.1, kde bylo ukázáno, že délka úsečky je invariant - nemění se při změně soustavy souřadnic). Izotropní tenzory prvního řádu (tj. vektory) neexistují.

Izotropním tenzorem 2. řádu je Kroneckerův symbol  $\delta_{ij}$ . Někdy se tomuto tenzoru  $\bar{\delta} = (\delta_{ij})$  říká **jednotkový tenzor**, neboť matice sestavená z jeho souřadnic je matice jednotková. Všechny izotropní tenzory druhého řádu mají tvar:  $k\bar{\delta} = (k\delta_{ij})$ , kde  $k$  je nenulové reálné číslo.

### 6.4 Levi-Civitův symbol (tenzor)

Levi-Civitův tenzor  $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_{ijk})$  je tenzor 3. řádu, antisymetrický ve všech indexech. To znamená, že je antisymetrický ve všech dvojicích  $i, j, k$ ;  $i, k$ . Nenulové souřadnice tohoto tenzoru nabývají hodnot  $\pm 1$ .

Z antisymetričnosti tenzoru plyne, že nulovými souřadnicemi jsou všechny souřadnice, jejichž alespoň dva indexy jsou stejné. Hodnotu  $+1$  přiřazujeme té souřadnici, jejíž indexy (navzájem různé) tvoří sudou permutaci skupiny 1, 2, 3, hodnota  $-1$  přísluší té souřadnici, jejíž indexy tvoří lichou permutaci skupiny 1, 2, 3.

Tedy dostáváme:  $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$ ,  $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$  a  $\varepsilon_{111} = \varepsilon_{112} = \varepsilon_{113} = \varepsilon_{121} = \varepsilon_{131} = \varepsilon_{211} = \varepsilon_{311} = \varepsilon_{222} = \varepsilon_{221} = \varepsilon_{223} = \varepsilon_{212} = \varepsilon_{232} = \varepsilon_{122} = \varepsilon_{322} = \varepsilon_{333} = \varepsilon_{332} = \varepsilon_{323} = \varepsilon_{313} = \varepsilon_{233} = \varepsilon_{133} = 0$ .

**Příklad:** Zapište pomocí Levi-Civitova tenzoru vektorový součin dvou vektorů  $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$  a  $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ .

**Řešení:** S využitím Einsteinova sumačního pravidla (viz odstavec 2.7.3.3) můžeme souřadnice vektorů přepsat takto:  $\vec{u} = (u_j)$  a  $\vec{v} = (v_k)$ . Pro vektor  $\vec{w}$ , který je vektorovým součinem vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ , platí:  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ . Pro souřadnice vektoru  $\vec{w}$  pak platí:  $w_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k$  (opět s využitím Einsteinova sumačního pravidla). Bez

Einsteinova zjednodušení by bylo nutné psát:  $w_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_j v_k$ . Rozpisem tohoto výrazu dostaneme:

$$\begin{aligned} w_i &= \varepsilon_{i11}u_1v_1 + \varepsilon_{i12}u_1v_2 + \varepsilon_{i13}u_1v_3 + \varepsilon_{i21}u_2v_1 + \varepsilon_{i22}u_2v_2 + \varepsilon_{i23}u_2v_3 + \varepsilon_{i31}u_3v_1 + \varepsilon_{i32}u_3v_2 + \varepsilon_{i33}u_3v_3 = \\ &= \varepsilon_{i12}u_1v_2 + \varepsilon_{i13}u_1v_3 + \varepsilon_{i21}u_2v_1 + \varepsilon_{i23}u_2v_3 + \varepsilon_{i31}u_3v_1 + \varepsilon_{i32}u_3v_2 \end{aligned}$$

Při výpočtu jednotlivých souřadnic pak máme:

$$w_1 = \varepsilon_{112}u_1v_2 + \varepsilon_{113}u_1v_3 + \varepsilon_{121}u_2v_1 + \varepsilon_{123}u_2v_3 + \varepsilon_{131}u_3v_1 + \varepsilon_{132}u_3v_2 = u_2v_3 - u_3v_2$$

$$w_2 = \varepsilon_{212}u_1v_2 + \varepsilon_{213}u_1v_3 + \varepsilon_{221}u_2v_1 + \varepsilon_{223}u_2v_3 + \varepsilon_{231}u_3v_1 + \varepsilon_{232}u_3v_2 = -u_1v_3 + u_3v_1$$

$$w_3 = \varepsilon_{312}u_1v_2 + \varepsilon_{313}u_1v_3 + \varepsilon_{321}u_2v_1 + \varepsilon_{323}u_2v_3 + \varepsilon_{331}u_3v_1 + \varepsilon_{332}u_3v_2 = u_1v_2 - u_2v_1$$

Tyto souřadnice ale přesně odpovídají souřadnicím vektorového součinu z odstavce 2.8.2, v němž byl vektorový součin definován.

Levi-Civita symbol (tenzor) velice úzce souvisí s Kroneckerovým delta (viz odstavec 2.7.3.1) vztahem  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$  (bylo použito Einsteinova sumačního pravidla definovaného v odstavci 2.7.3.3).

Použití tohoto tenzoru (symbolu) je podobné jako použití symbolu Kroneckerovo delta (viz odstavec 2.7.3.1): v určitých případech zkracuje a z technického hlediska zjednodušuje zápis rovnic, veličin, vztahů, ... Aby se ale jednalo skutečně o zjednodušení, je nutné jej dokonale zvládat a znát jeho vlastnosti.

## 6.5 Tenzor napětí

Tenzor napětí je jedním z nejdůležitějších tenzorů, které se používají ve fyzice. Podle tohoto tenzoru dokonce dostaly tenzory své jméno, neboť v latině znamená *tensio* napětí. Dříve než ale vysvětlíme, co je to tenzor napětí, je třeba se seznámit se základními fyzikálními pojmy z mechaniky kontinua.

**Kontinuum** je termín, který označuje spojité prostředí, jehož vlastnosti se mění spojitě bod od bodu. Je určeno svým objemem  $V$  a hustotou  $\rho$ . Kontinuum je zcela odlišné od tuhého tělesa. Jestliže tuhé těleso je modelem nedeformovatelného tělesa (v praxi se mu blíží např. deska stolu, železná kovádkina, ...), tak kontinuum představuje naopak těleso, které je možné deformovat. Navíc může docházet k více druhům deformace na tomtéž tělese (např. při natahování gumy dochází ve směru působení deformující síly k jejímu prodlužování, zatímco ve směru kolmém se guma ztenčuje - je tedy deformována zároveň tahem i tlakem). Za kontinuum lze v praxi považovat gumu na trampolíně, mycí houbu, vodu v nádobě, plyn v pouťovém balónku, ...

Bude-li na takové těleso působit nějaká vnější síla, může jít o sílu:

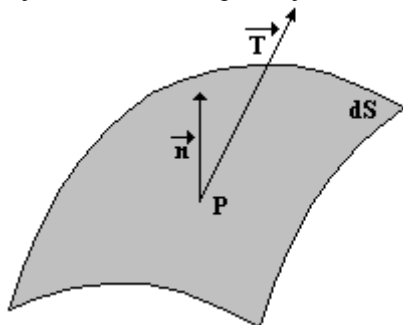
1. objemovou
2. plošnou

**Síly objemové** (gravitační, ...) působí na objemové elementy tělesa a jsou úměrné hmotě v tomto elementu obsažené. Vztahujeme je na jednotku objemu a její velikost závisí na poloze elementu objemu  $dV$  v tělese. To znamená, že velikost a směr této síly se mění se změnou působiště síly. Jestliže označíme objemovou sílu (tj. sílu vztaženou na jednotku objemu)  $\vec{F}_V = (F_{V1}; F_{V2}; F_{V3})$ , pak na objemový element  $dV$  působí

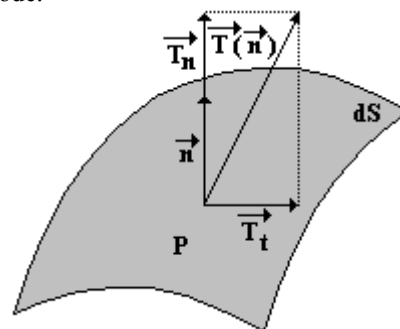
objemová síla  $\vec{F}_V dV$ . Výsledná objemová síla působící na těleso o objemu  $V$  je  $\vec{F} = \int_0^V \vec{F}_V dV$ .

**Síly plošné** působí na jednotku plochy (na plošné elementy  $dS$ ) a jsou úměrné velikosti plošného elementu. Jedná se např. o sílu, kterou působí kapalina (nebo plyn) na stěny nádoby, v níž jsou uzavřeny, o sílu, která působí na libovolný horizontální řez vertikálně zavěšené a zatížené gumy, ... Plošná síla vztažená na jednotku plochy se nazývá **napětí** (u kapalin a plynů má tato veličina název **tlak**). Vzhledem k tomu, že se jedná o podíl vektorové veličiny (síly) a skalární veličiny (element plochy), je výsledkem vektor. Tento vektor (vektor napětí) se značí  $\vec{T}$ . Plošná síla působící na element plochy  $dS$  je dána tedy vztahem  $d\vec{F} = \vec{T}dS$ .

Uvažujme nyní plošný element (plošku) procházející bodem  $P$ , kterým prochází normálový vektor  $\vec{n}$  plošky  $dS$  (viz obr. 86). Tento normálový vektor určuje orientaci plošného elementu  $dS$ . (Je tedy možné mluvit o dvou orientacích plošného elementu  $dS$ .) Směr vektoru  $\vec{T}$  obecně nemusí splývat se směrem normálového vektoru  $\vec{n}$ . Je zřejmé, že vektor napětí  $\vec{T}$  nezávisí jen na bodu  $P$ , tj. na umístění plošky  $dS$ , ale i na normále  $\vec{n}$ , tj. na orientaci plošného elementu  $dS$ :  $\vec{T} = \vec{T}(\vec{n})$ . Prochází-li tedy bodem  $P$  více plošných elementů s různými normálami, pak výsledné vektory napětí jsou také různé. Jinak řečeno: různě orientovaným plošným elementům procházejícím bodem  $P$ , odpovídají různé vektory napětí v tomto bodě.



obr. 86



obr. 87

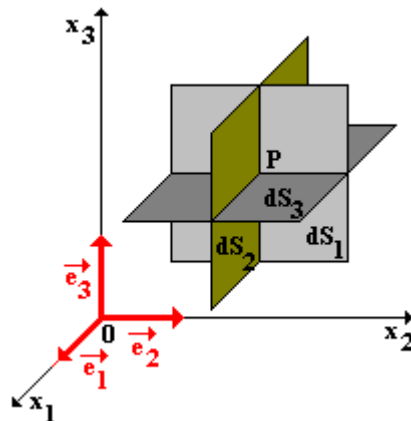
Síla  $d\vec{F} = \vec{T}dS$  vyjadřuje vzájemné silové působení dvou částí uvažovaného tělesa na plošce  $dS$ , které z obou stran přiléhají k této plošce. Je zřejmé, že podle třetího Newtonova zákona (zákon akce a reakce) je síla, kterou působí první část na druhou, stejně velká ale opačného směru než síla, kterou působí část druhá na první. To znamená, že platí:  $\vec{T}(-\vec{n}) = -\vec{T}(\vec{n})$ .

Vzhledem k tomu, že vektor napětí  $\vec{T}$  nemusí obecně splývat se směrem normálového vektoru (normály) plochy, je možné rozložit vektor napětí do dvou navzájem kolmých složek: **normálového napětí**  $\vec{T}_n$  a **tečného (smykového) napětí**  $\vec{T}_t$  (viz obr. 87). Pro tato dvě napětí platí:  $\vec{T}_n + \vec{T}_t = \vec{T}$ .

Element plochy  $dS$ , který je zobrazen na obr. 86, lze složit ze tří vzájemně kolmých elementů plochy  $dS_1$ ,  $dS_2$  a  $dS_3$  takových, že ploška  $dS_1$  je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou  $x_2x_3$ ,  $dS_2$  je rovnoběžná s rovinou  $x_1x_3$  a  $dS_3$  je rovnoběžná s rovinou  $x_1x_2$ , jak je zobrazeno na obr. 88. Normálové vektory k ploškám  $dS_1$ ,  $dS_2$  a  $dS_3$  jsou po řadě vektory  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  a  $\vec{e}_3$ . Vektory napětí, které odpovídají ploškám  $dS_1$ ,  $dS_2$  a  $dS_3$  jsou po řadě, vektory  $\vec{T}(\vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(\vec{e}_2)$  a  $\vec{T}(\vec{e}_3)$ . Každý z těchto vektorů je možné vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  a  $\vec{e}_3$  (podrobněji o bázi viz odstavec 2.2.2), takže dostáváme:  $\vec{T}(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \vec{e}_j = \tau_{ij} \vec{e}_j$  pro  $i = 1, 2, 3$  (poslední úprava je provedena na základě Einsteinova sumačního pravidla - viz odstavec 2.7.3.3).

Právě uvedeným vztahem je definováno 9 čísel, která jsou souřadnicemi tenzoru 2. řádu - **tenzoru napětí**  $\vec{\tau}$ . Na základě právě uvedeného a na základě rozkladu vektoru napětí do dvou kolmých složek  $\vec{T}_n$  a  $\vec{T}_t$  je zřejmé, že z právě uvedených 9 souřadnic tenzoru napětí  $\vec{\tau}$  udávají souřadnice na hlavní diagonále (tj. souřadnice  $\tau_{11}$ ,  $\tau_{22}$  a  $\tau_{33}$ ) velikosti normálových napětí a zbývajících 6 souřadnic (tj. souřadnice  $\tau_{ij}$  pro  $i \neq j$ ) velikost smykových napětí.

Pomocí souřadnic tenzoru napětí  $\vec{\tau}$  lze získat vektor napětí  $\vec{T}(\vec{n})$  pro libovolný normálový vektor  $\vec{n}$ . Budeme-li uvažovat plošný element  $dS$ , který prochází bodem  $P$  a který má normálový vektor  $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$ , je možné psát  $T_i(\vec{n}) = \sum_{j=1}^3 \tau_{ji} n_j = \tau_{ji} n_j$  pro  $i = 1, 2, 3$  (opět bylo použito Einsteinovo sumační pravidlo z odstavce 2.7.3.3). Vektor napětí  $\vec{T}(\vec{n})$  má přitom souřadnice  $\vec{T}(\vec{n}) = (T_1(\vec{n}); T_2(\vec{n}); T_3(\vec{n}))$ . Jinými slovy: vektor napětí  $\vec{T}(\vec{n})$  je jednoznačně určen tenzorem napětí  $\vec{\tau}$  a normálovým vektorem  $\vec{n}$  elementu plochy  $dS$ .



obr. 88

## 6.6 Tenzorová analýza

V technických aplikacích matematiky (fyzika, elektrotechnika, ...) se v pokročilejších partiích neobejdeme bez určitých, na první pohled poněkud komplikovaných operací, které ale velmi zjednodušují jednak matematický zápis problému a jednak zpřehledňují danou fyzikální, elektrotechnickou, ... problematiku. V tomto textu se budeme snažit tyto operace vysvětlit a pochopit bez složitých definic a pokud možno srozumitelně.

### 6.6.1 Hamiltonův operátor nabla

Dříve než se pustíme do složitějších operací, je nutno zavést tzv. Hamiltonův operátor nabla. Tento operátor je pojmenován po irském matematikovi a fyzikovi Williamu Rowanovi Hamiltonovi (1805 - 1865), který zavedl do matematiky kvaterniony (uspořádané čtveřice reálných čísel - jakousi nadstavbu čísel komplexních), podílel se na rozvoji maticové algebry a tím nepřímo přispěl i k rozvoji fyziky. Pomocí operátoru

nabla je možné v současném způsobu zápisu rovnic a fyzikálních veličin velice jednoduše zapsat řadu fyzikálních výsledků (např. Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole, ...).

Hamiltonův operátor nabla je definován takto:  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$  (znak  $\nabla$  se čte „nabla“). Jedná se o

vektorový operátor, který musí být aplikován na nějakou funkci. Aplikace na jakoukoli další funkci (skalární, vektorovou, ...) spočívá ve vynásobení tohoto operátoru (skalárně, vektorově, ...) danou funkcí.

**Poznámka:** Operátor nabla je vysvětlován v rámci tenzorů, protože se dá ukázat, že má vlastnosti tenzoru. Je to tedy tenzor. V dalším s ním ale tak počítat nebudeme - ukážeme jen jeho použití.

## 6.6.2 Gradient, divergence, rotace

Gradient, divergence a rotace jsou lineární diferenciální operátory. Lineární proto, že se v nich derivace dané funkce vyskytuje v první mocnině (tj. je lineární), diferenciální proto, že jsou definovány pomocí derivace. Vzhledem k tomu, že fyzikální veličiny závisí většinou na více parametrech (proměnných), jedná se o derivace parciální. Vysvětlení parciálních derivací je uvedeno v odstavci 4.4.6.2.

Gradient, divergence a rotace se definují pomocí operátoru nabla (viz odstavec 6.6.1). Slova „gradient“, „divergence“ a „rotace“ (resp. jejich zkratky grad, div a rot) jsou pouze zkrácením matematického zápisu. Při vlastním výpočtu je třeba tyto zkratky „dešifrovat“ rozepsáním a vyjádřením pomocí nabla operátoru.

Všechny uvedené operátory mají své přesné definice. Pokusíme se ale zavést jednotlivé operátory bez složitých definic pomocí určitého „triku“. Tento „trik“ spočívá v tom, že si uvědomíme, jaké součiny lze provádět s vektory:

1. **součin bez označení** - lze aplikovat na vektor  $\vec{v}$  a skalár  $\lambda$  a výsledkem je vektor ( $\lambda$  násobek vektoru  $\vec{v}$ ):  $\vec{w} = \lambda \vec{v}$  nebo jej lze aplikovat na dva vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  a získáme tenzor:  $\vec{u}\vec{v} = \vec{T}$
2. **součin označený tečkou** - lze aplikovat na dva vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  a získáme skalár (operace se nazývá skalární součin - viz odstavec 2.8.1):  $\lambda = \vec{u} \cdot \vec{v}$  nebo jej lze aplikovat na vektor  $\vec{v}$  a tenzor  $\vec{T}$  a získáme vektor:  $\vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{T}$  (mnemotechnická pomůcka: tečka v součinu ničí vektor - ničí jednu šipku; no a tenzor se značí dvěma šipkami)
3. **součin označený křížkem** - lze aplikovat na dva vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  a získáme vektor (operace má název vektorový součin - viz odstavec 2.8.2):  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

Právě uvedený „rozbor součinů“ nelze považovat za definice. Ty se dají nalézt v řadě vysokoškolských skript. Uvedený „rozbor“ se snaží danou problematiku trochu zlidštit.

V souvislosti s „rozбором součinů“ je důležité, že stejným způsobem lze zavést jednotlivé lineární diferenciální operátory. Uvědomíme-li si, že operátor nabla, pomocí něhož budeme definovat další operátory, je vektor, jsou další pravidla už jasná.

1. gradient (grad) se zavádí takto:  $\text{grad } \lambda = \vec{\nabla} \lambda$  resp.  $\text{grad } \vec{v} = \vec{\nabla} \vec{v}$
2. divergence (div) se zavádí takto:  $\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$  resp.  $\text{div } \vec{T} = \vec{\nabla} \cdot \vec{T}$
3. rotace (rot) se zavádí takto:  $\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$

Právě definované operátory mají tyto vlastnosti a platí následující vztahy, v jejichž úpravách se používají vztahy vektorového a skalárního součinu a jejich kombinací (viz odstavec 2.8):

$$\begin{aligned} \text{grad } \lambda_1 \lambda_2 &= \vec{\nabla} \lambda_1 \lambda_2 = \left( \frac{\partial(\lambda_1 \lambda_2)}{\partial x}; \frac{\partial(\lambda_1 \lambda_2)}{\partial y}; \frac{\partial(\lambda_1 \lambda_2)}{\partial z} \right) = \left( \lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}; \lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}; \lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} \right) = \\ &= \lambda_1 \left( \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}; \frac{\partial \lambda_2}{\partial y}; \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} \right) + \lambda_2 \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}; \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}; \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} \right) = \lambda_1 \vec{\nabla} \lambda_2 + \lambda_2 \vec{\nabla} \lambda_1 = \lambda_1 \text{grad } \lambda_2 + \lambda_2 \text{grad } \lambda_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{div } \lambda \vec{v} &= \vec{\nabla} \cdot \lambda \vec{v} = \frac{\partial(\lambda v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\lambda v_z)}{\partial z} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \\ &= \lambda \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + v_x \frac{\partial \lambda}{\partial x} + v_y \frac{\partial \lambda}{\partial y} + v_z \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \lambda = \lambda \text{div } \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{grad } \lambda \end{aligned}$$

$$\text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \frac{\partial(\vec{u} \times \vec{v})_x}{\partial x} + \frac{\partial(\vec{u} \times \vec{v})_y}{\partial y} + \frac{\partial(\vec{u} \times \vec{v})_z}{\partial z} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{\nabla} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{v} \cdot \text{rot } \vec{u} - \vec{u} \cdot \text{rot } \vec{v}$$

$$\text{rot } \lambda \vec{v} = \vec{\nabla} \times \lambda \vec{v} = \lambda \vec{\nabla} \times \vec{v} + \vec{\nabla} \lambda \times \vec{v} = \lambda \vec{\nabla} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{\nabla} \lambda = \lambda \text{rot } \vec{v} - \vec{v} \times \text{grad } \lambda$$

U následujících dvou vlastností se jedná o matematickou vlastnost: vektorový součin dvou stejných (resp. rovnoběžných) vektorů je nulový.

$$\text{div } \text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0$$

$$\text{rot } \text{grad } \lambda = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \lambda = 0$$



Nabla není jediný operátor. Pomocí následující kombinace lineárních diferenciálních operátorů je zavádí operátor laplace, nazvaný podle francouzského matematika a fyzika Pierra Simona Marquise de Laplace (1749 - 1827):  $\text{div grad } \lambda = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \lambda = |\vec{\nabla}|^2 \lambda = \Delta \lambda$ .

Jak je vidět, pro operátor laplace platí:  $\Delta = |\vec{\nabla}|^2$ . S použitím definice operátoru nabla z odstavce 6.6.1 je

možné psát:  $\Delta = \left( \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2} \right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . Poslední úpravou

jsme vyjádřili operátor laplace pomocí druhých parciálních derivací (tj. příslušný skalár, vektor či tenzor zderivujeme jednou a pak výsledné derivace zderivujeme znovu: derivaci podle  $x$  znovu podle  $x$ , derivaci podle  $y$  znovu podle  $y$  a derivaci podle  $z$  znovu podle  $z$ ).

Na základě operátoru laplace je možné rozepsat tuto složenou operaci s operátory:  $\text{rot rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = \text{grad div } \vec{v} - \Delta \vec{v}$

### 6.6.3 Fyzikální význam

V odstavci 6.6.2 byly zavedeny tři lineární diferenciální operátory a jejich kombinace na čistě matematickém základě. Všechny tyto operátory mají značný význam ve fyzikální či jiné technické praxi.

Význam **gradientu** nejlépe pochopíme asi na teplotě. Představte si, že jsme v zimě v místnosti, v níž je těsně u venkovní zdi (obvodová zeď domu) teplota  $20^\circ\text{C}$ . Venku je teplota  $-5^\circ\text{C}$  a obvodová zeď domu má tloušťku půl metru. Je jasné, že z jedné strany má zeď teplotu  $20^\circ\text{C}$  (z té strany, co je v pokoji) a z druhé (té vnější) má teplotu  $-5^\circ\text{C}$ . Na vzdálenosti půl metru (tloušťka zdi) se teplota zdi mění od  $-5^\circ\text{C}$  do  $20^\circ\text{C}$ . Jaký bude průběh (lineární, exponenciální, ...) není podstatné. (Závisí to na materiálu, ztrátách, ...) Podstatné je, že teplota má na šířce zdi (oněch půl metru) nějaký **spád**, nějak **klesá** (resp. **roste**). Nebo můžeme též říci, že teplota má v závislosti na vzdálenosti (např. od venkovní omítky zdi) jistý **gradient**.

**Gradient** tedy udává směr, kterým určitá veličina nejvíce roste (resp. klesá); udává směr spádu. Tento směr se promítne do parciálních derivací, pomocí nichž je gradient definován. (U příkladu s teplotou je to směr kolmý na zeď - ve směru, který svírá s tímto směrem úhel např.  $45^\circ$  teplota klesá resp. roste také, ale už pozvolněji.)

Fyzikální význam **divergence** je následující. Divergence popisuje **zdroj, zřídlo** nějaké fyzikální veličiny. Opět velmi jednoduchý příklad. Na louce jsou dvě studny, z nichž jedna je zcela vyschlá a druhá je plná vody a odtéká z ní malý potůček. To, co bylo právě vysloveno normální řečí, se dá vyjádřit matematicky tak, že divergence suché studny je nulová (studna není zdrojem žádné vody), zatímco divergence studny s vodou je nenulová - studna je zdrojem vody pro potůček, který z ní vyvěrá.

S divergencí je možné se setkat ve slavných Maxwellových rovnicích, kterými anglický fyzik James Clerk Maxwell (1831 - 1879) poprvé sjednotil teorii elektromagnetického pole. Dvě z těchto rovnic mají tvar:

1.  $\text{div } \vec{D} = \rho$  - tato rovnice říká, že elektrické pole popsané elektrickou indukcí  $\vec{D}$  má své zdroje (náboje), které mají nějakou prostorovou hustotu  $\rho$
2.  $\text{div } \vec{B} = 0$  - tato rovnice říká, že magnetické pole popsané magnetickou indukcí  $\vec{B}$  nemá žádné zdroje, tj. neexistují magnetické „náboje“

**Rotace** udává, jestli nějaká fyzikální veličina tvoří vír, propletenec, nějak se otáčí, pohybuje. Příklad z praktického života může být tento: Představte si umyvadlo zašpuntované špuntem. Nebudete-li v umyvadle hýbat rukama či nějakými předměty, voda bude v klidu - nebudou vznikat žádné víry. Rotace vody bude nulová. Pokud ale umyvadlo vypustíte, začnou se vlivem Coriolisovy síly vytvářet víry, které budou (na severní části Země) pravotočivé. Jinými slovy - nyní voda víří, to znamená, že její rotace je nenulová.

I s rotací je možné se setkat v Maxwellových rovnicích:

1.  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  - při časové změně magnetického pole (popsáno magnetickou indukcí  $\vec{B}$ ) je elektrické pole vírové (siločáry jsou uzavřené) a podél vírů je možno měřit napětí (skutečnost, že při změně magnetického pole je možné měřit napětí pak popisuje Faradayův zákon elektromagnetické indukce)
2.  $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$  - teče-li obvodem proud, vzniká kolem něho magnetické pole (tj. mg. pole je vírové) - Oerstedův - Ampérův jev; další výklad: změnou elektrického pole vzniká pole magnetické (Maxwellův posuvný proud  $\vec{j}$ );  $\vec{H}$  značí intenzitu magnetického pole

S lineárními diferenciálními operátory je možné se setkat ve všech partiích fyziky.

Jeden z těchto lineárních diferenciálních operátorů vystupuje i ve vztahu mezi parciální a totální derivací funkce, která je závislá na prostorových souřadnicích, které se mění v závislosti na čase. Jedná např. o magnetickou indukcí  $\vec{B}$ , která je závislá jak na prostorových souřadnicích (je závislá na vzdálenosti a poloze od

zdroje magnetického pole), ale i na čase (zdroj může vytvářet nestacionární pole). Navíc se mohou souřadnice (tedy poloha místa, v němž určujeme magnetickou indukci, vzhledem ke zdroji) měnit v závislosti na čase.

Máme-li tedy obecně funkci  $f = f(x(t), y(t), z(t), t)$ , tak pro její derivaci v závislosti na čase, platí:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt}. \text{ Po úpravě dostaneme: } \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \vec{v} \cdot \text{grad } f + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

**Příklad:** Odvodte na základě Maxwellových rovnic vlnovou rovnici a velikost šíření rychlosti světla ve vakuu.

**Řešení:** Maxwellovy rovnice jsou čtyři lineární diferenciální parciální rovnice  $\text{div } \vec{D} = \rho$ ,  $\text{div } \vec{B} = 0$ ,  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  a  $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$ . Při odvozování si můžeme dovolit předpokládat, že se nacházíme ve vakuu a daleko od všech zdrojů, tj.  $\vec{j} = \vec{o}$  a  $\rho = 0$ . Dále víme, že platí  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  a  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ . Původní rovnice tedy můžeme psát ve tvaru:  $\text{div } \vec{D} = 0$ ,  $\text{div } \vec{B} = 0$ ,  $\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  a  $\text{rot } \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Vydeme z rovnice  $\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ , na kterou aplikujeme rotaci. Postupně získáme výraz:

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{rot} \left( -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial (\text{rot } \vec{H})}{\partial t}. \text{ Upravíme levou stranu podle vztahu odvozeného v odstavci 6.6.2:}$$

$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$ . S využitím Maxwellových rovnic (a naším zanedbáním) dostaneme

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}. \text{ Můžeme tedy psát: } -\Delta \vec{E} = -\mu \frac{\partial (\text{rot } \vec{H})}{\partial t} \text{ a po dosazení z další Maxwellovy}$$

rovnice  $-\Delta \vec{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ . Po úpravě tedy získáváme vlnovou rovnici ve tvaru  $\Delta \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ . Z rozměrové

analýzy rovnice plyne, že  $\frac{1}{v^2} = \mu \varepsilon$  a tedy  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$ , což je velikost fázové rychlosti šíření elektromagnetického vlnění (a tedy i světla) v prostředí charakterizovaném permitivitou  $\varepsilon$  a permeabilitou  $\mu$ . Speciálně pro vakuum

$$\text{pak platí } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

Vlnová rovnice ve speciálních případech je odvozená i v odstavci 8.7.

## 7. POSLOUPNOSTI

Posloupnosti jsou speciálním případem funkcí, a proto se často při vyšetřování vlastností posloupností využívají základní znalosti funkcí (monotonie, limity, ...).

### 7.1 Definice a základní vlastnosti

**KAŽDÁ FUNKCE, JEJÍMŽ DEFINIČNÍM OBOREM JE MNOŽINA  $\mathbb{N}$  VŠECH PŘIROZENÝCH ČÍSEL, SE NAZÝVÁ NEKONEČNÁ POSLOUPNOST.**

**KAŽDÁ FUNKCE, JEJÍMŽ DEFINIČNÍM OBOREM JE MNOŽINA VŠECH PŘIROZENÝCH ČÍSEL  $n \leq n_0$ , KDE  $n_0$  JE PEVNĚ DANÉ ČÍSLO Z  $\mathbb{N}$ , SE NAZÝVÁ KONEČNÁ POSLOUPNOST.**

*Poznámka:* Bude-li ze souvislosti zřejmé, jestli se pracuje s konečnou resp. nekonečnou posloupností, stačí mluvit jen o posloupnosti.

Skutečnost, že funkční hodnota funkce  $f$  v bodě  $x$  je  $y$ , se zapisuje ve tvaru  $f(x) = y$ . V případě posloupností (definičním oborem je množina, která je podmnožinou množiny přirozených čísel), se používá jiný způsob zápisu:  $f_x = y$  - „ $x$ -tý člen posloupnosti  $f$  je roven  $y$ “.

*Poznámka:* U posloupností bývá zvykem obecný člen označovat indexem  $n$  a hovořit tak o  $n$ -tém členu.

Zatímco funkci bychom zapsali zápisem např.  $h: y = -2 + (-1)^n$ , u posloupností se používá označení  $(-2 + (-1)^n)_{n=1}^{\infty}$  resp.  $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ ;  $h_n = -2 + (-1)^n$ . Tyto zápisy čteme: „posloupnost  $-2 + (-1)^n$  pro  $n$  rovno jedné do nekonečna“ resp. „posloupnost  $h_n$ , kde  $n$  probíhá od jedné do nekonečna, a  $h_n$  se rovná  $-2 + (-1)^n$ “. Obdobným způsobem je možné vyjádřit i konečnou posloupnost.

V právě uvedených příkladech říkáme, že posloupnost je určena vzorcem pro  $n$ -tý člen.

### 7.2 Způsoby zadání posloupností

Existuje několik způsobů zadání posloupností:

1. vzorcem pro  $n$ -tý člen - viz konec odstavce 7.1
2. tabulka uspořádaných hodnot posloupnosti - lze použít jen pro konečné posloupnosti
3. graf uspořádaných hodnot posloupnosti - lze použít jen pro konečné posloupnosti
4. rekurentní určení posloupnosti

Mezi jednotlivými způsoby zadání posloupnosti lze přecházet a je tedy možné jednu a tutéž posloupnost vyjádřit několikerým způsobem.

K zajímavým (a v některých případech i obtížnějším) způsobům zadání posloupnosti patří rekurentní zadání posloupnosti. Rekurentně určit posloupnost, znamená uvést prvních několik jejích členů a potom  $n$ -tý (resp.  $(n+1)$ -ní,  $(n+2)$ -hý, ...) člen vyjádřit pomocí vzorce, v němž vystupují členy předcházející. Např.:  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = -3a_n + 1$ .

Některé rekurentní posloupnosti je možné vyjádřit vztahem pro  $n$ -tý člen, ale ne všechny. Opačně, tj. vyjádřit posloupnost danou vztahem pro  $n$ -tý člen rekurentně, je možné vždy.

Existuje metoda, pomocí níž je možné převést rekurentní vyjádření jistého druhu posloupnosti na vyjádření  $n$ -tého členu. My se budeme zabývat posloupnosti, které jsou vyjádřeny rekurentními rovnicemi druhého řádu (tj. určitý člen je vyjádřen pomocí dvou předchozích) s konstantními koeficienty. Takové vyjádření lze obecně napsat ve tvaru:  $a_{n+2} = \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_2 a_n$ , kde  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Přitom je nutné znát počáteční podmínky úlohy - tj.  $a_1$  a  $a_2$ . Sestavíme tzv. charakteristickou rovnici, která bude mít tvar  $x^2 = \alpha_1 x + \alpha_2$ . Snadnou úpravou tuto rovnici přepíšeme na kvadratickou rovnici v běžném tvaru  $x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2 = 0$  a vyřešíme ji. Kořeny označíme  $x_1$  a  $x_2$ .

V závislosti na počtu řešení této kvadratické rovnice, pak získáme vyjádření zadané posloupnosti pomocí vztahu pro  $n$ -tý člen:

1. pokud  $x_1 \neq x_2$ , pak  $a_n = C_1 x_1^{n-1} + C_2 x_2^{n-1}$ , kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou konstanty, které určíme na základě počátečních podmínek úlohy
2. pokud  $x_1 = x_2 (= x)$ , pak  $a_n = (C_1 + nC_2)x^{n-1}$ , kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou konstanty, které určíme na základě počátečních podmínek úlohy

Tento postup je možné dokázat dosazením vztahu pro  $n$ -tý člen do původního rekurentního vyjádření posloupnosti.

**Příklad:** Posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  je dána rekurentně takto:  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ , kde  $a_1 = 1$  a  $a_2 = -7$ . Určete její vyjádření pomocí  $n$ -tého členu.

**Řešení:** Pro ilustraci určíme prvních několik členů této posloupnosti: 1, -7, -41, -163, -596, ...

Charakteristická rovnice má tvar  $x^2 = 5x - 6$ , tj. jde o kvadratickou rovnici  $x^2 - 5x + 6 = 0$ . Tu lze vyřešit rozkladem:  $(x-2)(x-3) = 0$ , takže  $x_1 = 2$  a  $x_2 = 3$ . Kořeny jsou různé, takže vztah pro  $n$ -tý člen bude mít tvar:  $a_n = 2^{n-1} \cdot C_1 + 3^{n-1} \cdot C_2$ .

Konstanty  $C_1$  a  $C_2$  určíme na základě počátečních podmínek. Po dosazení vztahu pro  $n$ -tý člen do rekurentního vyjádření posloupnosti, musí tedy platit:  $C_1 + C_2 = 1$  a  $2C_1 + 3C_2 = -7$ . Vyřešením této soustavy dostaneme:  $C_1 = 10$  a  $C_2 = -9$ . Vztah pro  $n$ -tý člen zadané posloupnosti má tedy tvar:  $a_n = 2^{n-1} \cdot 10 + 3^{n-1} \cdot (-9) = 5 \cdot 2^n - 3^{n+1}$ .

### 7.3 Fibonacciho posloupnost

Italský kupec a matematik Leonardo Pisánský (asi 1170 - asi 1250) zvaný Fibonacci (tj. „syn Bonacciův“) uvádí ve své knize *Liber abaci* (z roku 1202) tuto úlohu:

**Příklad:** Kdosi umístil pár králíků na místě ze všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se narodí v průběhu jednoho roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede měsíčně na svět jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku. S případy uhynutí se nepočítá. První králíci umístění do ohrady jsou staří právě jeden měsíc.

**Řešení:** Po vypočítání počtu králíků v ohradě na konci prvního měsíce (2 páry), druhého (3 páry), třetího (5 párů) se začíná situace komplikovat a začali bychom se ztrácet v počtu párů králíků. Proto si označíme počet párů králíků na konci  $(n+1)$ -ního měsíce  $a_{n+1}$ . Na konci  $(n+2)$ -ho měsíce bude v ohradě  $a_{n+1}$  starých párů králíků, ale kromě toho se ještě narodí tolik párů králíků, kolik jich bylo na konci  $n$ -tého měsíce, tj.  $a_n$ . Jinak řečeno, pro počet párů na konci  $(n+2)$ -ho měsíce dostaneme vztah:  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ . Hledaný počet párů králíků na konci roku není možné vypočítat přímo: musíme určit všechny mezikroky, tj. počty párů na konci každého měsíce. Tak postupně dostáváme:  $a_4 = 8$  (vzhledem k tomu, že  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$  a  $a_3 = 3$ ),  $a_5 = 13$ ,  $a_6 = 21$ ,  $a_7 = 34$ ,  $a_8 = 55$ ,  $a_9 = 89$ ,  $a_{10} = 144$ ,  $a_{11} = 233$ ,  $a_{12} = 377$ . Na konci roku tedy bude v ohradě 377 párů králíků.

Uvedená posloupnost se nazývá **Fibonacciho posloupnost**  $(F_n)_{n=1}^{\infty}$  a je to posloupnost 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Je popsána rekurentním vztahem  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .

**Poznámka:** Někdy se jako Fibonacciho posloupnost označuje i posloupnost 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Lze dokázat, že pro členy této posloupnosti platí některé vztahy:

1.  $F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 2$  nebo-li  $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 2$
2.  $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1$  nebo-li  $\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n} - 1$
3.  $F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+2} - F_{2n} - 1 = F_{2n+1} - 1$  nebo-li  $\sum_{i=1}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1$
4.  $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1} - 1$  nebo-li  $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1} - 1$

Další vlastnosti lze odvodit na základě dvou podobných úloh.

**Příklad:** Kolika způsoby lze vyjít schodiště o  $n$  schodech, bereme-li schody nejvýše po dvou (tj. vynecháme-li nejvýše 1 schod)?

**Řešení:** Počet způsobů vyjítí  $n$  schodů označíme  $p(n)$ . Všechny možné způsoby vyjítí schodů rozdělíme do dvou disjunktních skupin. V první budou všechny způsoby vyjítí schodů, při nichž šlápneme na první schod - jejich počet bude  $p(n-1)$  - po šlápnutí na první schod jich máme před sebou už jen  $n-1$ . Ve druhé skupině budou všechny způsoby vyjítí schodů, při nichž nešlápneme na první schod; těchto způsobů bude  $p(n-2)$ . Celkem tedy dostáváme:  $p(n) = p(n-1) + p(n-2)$ , což rekurentní vyjádření Fibonacciho posloupnosti.

Počet způsobů, kolika lze vyjít  $n$  schodů podle uvedených pravidel, je roven  $F_n$ .

**Příklad:** Kolika způsoby lze vyjít schodiště o  $n+m$  schodech, bereme-li schody nejvýše po dvou (tj. vynecháme-li nejvýše 1 schod)?

**Řešení:** Na základě předchozího příkladu je možné počet způsobů vyjítí všech schodů označit  $F_{n+m}$ . Všechny možné způsoby vyjítí schodů rozdělíme do dvou disjunktních skupin. V první budou všechny způsoby vyjítí

schodů, při nichž šlápneme na  $n$ -tý schod: jejich počet bude  $F_n \cdot F_m$ . Ve druhé skupině budou všechny způsoby vyjití schodů, při nichž nešlápneme na  $n$ -tý schod: těchto způsobů bude  $F_{n-1} \cdot F_{m-1}$ . Celkem tedy dostáváme:  
 $F_{n+m} = F_n \cdot F_m + F_{n-1} \cdot F_{m-1}$ .

Takže jsme dostali další vztahy platné pro Fibonacciho posloupnost:

$$5. \quad F_{n+m} = F_n \cdot F_m + F_{n-1} \cdot F_{m-1}$$

$$6. \quad \text{speciálně pro } m = n : F_{2n} = F_n^2 + F_{n-1}^2$$

$$7. \quad \text{speciálně pro } m = n + 1 : \quad F_{2n+1} = F_n \cdot F_{n+1} + F_{n-1} \cdot F_n = F_n (F_{n+1} + F_{n-1}) = \\ = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \binom{0}{0} \\ & & & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\ & & & & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ & & & & & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ & & & & & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ & & & & & & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \dots & \dots & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \end{array}$$

obr. 89

Následující vztah (který je možné odvodit přes úvahy o takových  $k$ -členných kombinacích  $n$ -prvkové množiny, v nichž nejsou vedle sebe sousední prvky) udává souvislost Fibonacciho posloupnosti s Pascalovým

trojúhelníkem (viz obr. 89):  $F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}$  pro  $n$  sudé resp.

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots + \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}} \text{ pro } n \text{ liché.}$$

Pomocí členů Fibonacciho posloupnosti lze určit i číslo  $\pi$ . Platí totiž:  $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccotg} F_{2k-1} = \frac{\pi}{4}$ .

**Příklad:** Na základě rekurentního vztahu pro Fibonacciho posloupnost odvoďte pro tuto posloupnost vztah pro  $n$ -tý člen.

**Řešení:** Rekurentní vyjádření Fibonacciho posloupnosti je  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , a proto její charakteristická rovnice je  $x^2 = x + 1$ , tj.  $x^2 - x - 1 = 0$ . Její řešení je  $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  a tedy  $n$ -tý člen je možné vyjádřit ve tvaru:

$$F_n = C_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}. \text{ Počáteční podmínky jsou } F_1 = 1 \text{ a } F_2 = 2, \text{ a proto: } C_1 + C_2 = 1 \text{ a}$$

$$C_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 2. \text{ Řešením této soustavy je: } C_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \text{ a } C_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Pro  $n$ -tý člen Fibonacciho posloupnosti tak dostáváme:  $F_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ .

Vzhledem k tomu, že  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  a  $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ , lze psát:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Fibonacciho posloupnost je tedy možné vyjádřit vztahem pro  $n$ -tý člen takto:

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right].$$

## 7.4 Užití geometrických posloupností

Hlavní využití znalostí geometrických posloupností se týká finanční matematiky. Dříve než přistoupíme k samotnému výpočtu a užití geometrických posloupností ve finanční matematice, je třeba zavést základní pojmy.

### 7.4.1 Základní pojmy finanční matematiky

**Vkladatel** je člověk, který si chce do nějakého peněžního ústavu uložit své peníze. Částka, kterou do peněžního ústavu vloží, se nazývá **jistina** (počáteční vklad). **Roční úroková míra** se udává v procentech a vyjadřuje jak velký **úrok** (kolik procent z jistiny) se na účet ročně přičte. Z úroku se odečítá **daň z úroku** (většinou 15%), kterou peněžní ústav odvádí státu. **Úrok po zdanění**, tj. úrok, z něhož je již odečtena daň (tzv. čistý úrok), se připisuje k vložené částce.

**Úrokovací období** je část roku (nebo rok celý), za kterou peněžní ústav provádí zúčtování a za kterou připisuje úroky. **Úroková míra pro dané úrokovací období** se vypočte tak, že se roční úroková míra rozdělí na tolik částí, jakou část tvoří úrokovací období z celého roku (např. při roční úrokové míře 10% činí pololetní úroková míra 5%, čtvrtletní úroková míra je 2,5%, měsíční úroková míra je  $\frac{10}{12}\% = \frac{5}{6}\%$ , ...).

Popsané úrokování se nazývá **složené úrokování**. Existuje ještě **úrokování jednoduché**, kdy se vypočítá úrok z vložené jistiny na konci prvního úrokovacího období a tento úrok se již nemění - zůstává konstantní po celou dobu spoření. Z hlediska matematiky se ale nejedná o geometrickou posloupnost, ale o posloupnost aritmetickou.

Problematika finanční matematiky je daleko složitější než představuje obsah odstavců 7.4.2 - 7.4.5, které se přímo dotýkají učiva o geometrických posloupnostech. Ve skutečnosti se úrokovací doba počítá na dny s tím, že platí následující pravidla (akceptovaná v evropských státech):

1. měsíc má 30 dnů
2. rok má 12 měsíců, tj. 360 dní
3. ze dvou „hraničních“ dnů, kdy se peníze ukládají a ukládají, se počítá do úrokovacího období pouze jeden
4. ...

### 7.4.2 Spoření bez průběžného vybírání s jednou vloženou jistinou

Předpokládejme, že si vkladatel uložil do peněžního ústavu částku  $a_0$ . Roční úroková míra je  $p$  procent, daň z úroku je  $d$  procent a úrokovací období je  $\frac{1}{r}$  roku (tj. vklad se úročí  $r$ -krát ročně). Vývoj částky na účtu je tento:

1. na konci prvního úrokovacího období:  $a_1 = a_0 + a_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{100-d}{100} = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)$
2. na konci druhého úrokovacího období:  $a_2 = a_1 + a_1 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{100-d}{100} = a_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^2$
3. na konci třetího úrokovacího období:  $a_3 = a_2 + a_2 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{100-d}{100} = a_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^3$

$$4. \text{ na konci } n\text{-tého úrokovacího období: } a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^n$$

Částku  $a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^n$  bude mít tedy vkladatel uloženou na konci  $n$ -tého úrokovacího

období. Na konci prvního roku bude mít částku  $a_1 = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^1$ , protože  $n=r$  (úročí se  $r$ -krát ročně).

### **7.4.3 Spoření bez průběžného vybírání s pravidelně vkládanou jistinou na konci každého úrokovacího období**

Předpokládejme, že si vkladatel uložil do peněžního ústavu částku  $a_0$ , kterou bude ukládat pravidelně na konci každého úrokovacího období. Roční úroková míra je  $p$  procent, daň z úroku je  $d$  procent a úrokovací období je  $\frac{1}{r}$  roku (tj. vklad se úročí  $r$ -krát ročně). Vývoj částky na účtu je tento:

$$1. \text{ na konci prvního úrokovacího období: } s_2 = a_0 + a_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{100-d}{100} + a_0 = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0$$

2. na konci druhého úrokovacího období:

$$s_3 = \left(a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0 =$$

$$= a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^2 + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0$$

3. na konci třetího úrokovacího období:

$$s_4 = \left(a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^2 + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0 =$$

$$= a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^3 + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^2 + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0$$

4. na konci  $n$ -tého úrokovacího období:

$$s_{n+1} = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^n + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^{n-1} + \dots + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0 =$$

$$= a_0 \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^{n+1} - 1}{\left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) - 1} = a_0 \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^{n+1} - 1}{\frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}}$$

V tomto případě se jedná o součet geometrické řady, jejíž první člen je  $a_0$  a poslední (v pořadí  $(n+1)$ -ní) je  $a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^n$ . Z toho důvodu jsou posunuté i indexy u jednotlivých součtů, tj. u stavů na účtu na konci daného úrokovacího období.

### **7.4.4 Spoření bez průběžného vybírání s pravidelně vkládanou jistinou na začátku každého úrokovacího období**

Předpokládejme, že si vkladatel uložil do peněžního ústavu částku  $a_0$ , kterou bude ukládat pravidelně na začátku každého úrokovacího období. Roční úroková míra je  $p$  procent, daň z úroku je  $d$  procent a úrokovací období je  $\frac{1}{r}$  roku (tj. vklad se úročí  $r$ -krát ročně). Vývoj částky na účtu je tento:

$$1. \text{ na konci prvního úrokovacího období: } s_1 = a_0 + a_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{100-d}{100} = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)$$

$$2. \text{ na konci druhého úrokovacího období: } s_2 = \left(a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) =$$

$$= a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^2 + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)$$

3. na konci třetího úrokovacího období:

$$s_3 = \left( a_0 \cdot \left( 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} \right)^2 + a_0 \cdot \left( 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} \right) + a_0 \right) \cdot \left( 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} \right) =$$

$$= a_0 \cdot \left( 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} \right)^3 + a_0 \cdot \left( 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} \right)^2 + a_0 \cdot \left( 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} \right)$$

4. na konci  $n$ -tého úrokovacího období:

$$s_n = a_0 \cdot \left( 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} \right)^n + a_0 \cdot \left( 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} \right)^{n-1} + \dots + a_0 \cdot \left( 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} \right) =$$

$$= a_0 \cdot \left( 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} \right) \cdot \frac{\left( 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} \right)^n - 1}{\left( 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} \right) - 1} = a_0 \cdot \left( 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} \right) \cdot \frac{\left( 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} \right)^n - 1}{\frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}}$$

V tomto případě se jedná o součet geometrické řady, jejíž první člen je  $a_0 \left( 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} \right)$  a poslední (v pořadí  $n$ -tý) je  $a_0 \left( 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} \right)^n$ .

### 7.4.5 Poskytování úvěru

Předpokládejme, že peněžní ústav poskytne občanovi úvěr  $D$  na  $n$  let s roční úrokovou mírou  $p$  procent a úrokovacím obdobím 1 rok (tj. úročí se jednou ročně). Občan bude úvěr splácet v  $n$  stejných ročních splátkách. První část splatí po jednom roce po poskytnutí úvěru. Výši splátky  $s$  lze určit na základě následující úvahy, kdy budeme sledovat občanův dluh v jednotlivých letech:

1. na konci roku, v němž byl úvěr poskytnut:  $D + D \cdot \frac{p}{100} = D \left( 1 + \frac{p}{100} \right)$

2. na začátku roku první splátky:  $D \left( 1 + \frac{p}{100} \right) - s$

3. na začátku roku druhé splátky:  $\left( D \left( 1 + \frac{p}{100} \right) - s \right) \left( 1 + \frac{p}{100} \right) - s = D \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^2 - s \left( 1 + \frac{p}{100} \right) - s$

4. na začátku roku třetí splátky:

$$\left( D \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^2 - s \left( 1 + \frac{p}{100} \right) - s \right) \left( 1 + \frac{p}{100} \right) - s = D \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^3 - s \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^2 - s \left( 1 + \frac{p}{100} \right) - s$$

5. na začátku roku  $n$ -té splátky:  $D \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n - s \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^{n-1} - s \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^{n-2} - \dots - s \left( 1 + \frac{p}{100} \right) - s$

Na začátku  $n$ -tého roku bude ale úvěr zaplacen, tj. podnikatel nebude dlužit nic. To znamená, že nyní budeme postupně řešit rovnici:

$$D \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n - s \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^{n-1} - s \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^{n-2} - \dots - s \left( 1 + \frac{p}{100} \right) - s = 0$$

$$D \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n - s \left[ \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^{n-1} + \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^{n-2} + \dots + \left( 1 + \frac{p}{100} \right) + 1 \right] = 0$$

$$D \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n - s \left[ 1 \cdot \frac{\left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n - 1}{\left( 1 + \frac{p}{100} \right) - 1} \right] = 0 \quad (\text{jedná se o geometrickou posloupnost, jejíž první člen je } 1 \text{ a}$$

poslední (v pořadí  $n$ -tý) je  $\left( 1 + \frac{p}{100} \right)^{n-1}$ )

$$D \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n - s \frac{\left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n - 1}{\frac{p}{100}} = 0 \quad \text{a odtud } s = \frac{D \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n \cdot \frac{p}{100}}{\left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n - 1}. \text{ A to je hledaná výše roční splátky.}$$



## 7.5 Limita posloupnosti

ČÍSLO  $a$  SE NAZÝVÁ LIMITA POSLOUPNOSTI  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , PŘÁVĚ KDYŽ KE KAŽDÉMU Kladnému číslu  $\varepsilon$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro všechna přirozená čísla  $n \geq n_0$  platí:  $|a_n - a| < \varepsilon$ . Tuto skutečnost zapisujeme  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Poznámka: Definici limity je možné formulovat také tak, že místo podmínky  $|a_n - a| < \varepsilon$  uvedeme podmínku s ní ekvivalentní:  $a \in (a_n - \varepsilon; a_n + \varepsilon)$ .

Právě definovaná limita se nazývá vlastní limita (je jí číslo z množiny reálných čísel, tj. nejedná se o  $\pm\infty$ ).

Posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  se nazývá konvergentní posloupnost, právě když posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  má vlastní limitu, tj.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ .

Posloupnosti, které nejsou konvergentní, se nazývají divergentní.

**V:** Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

**V:** Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Pozor! Právě uvedenou větu není možné obrátit. To znamená, že omezená posloupnost nemusí být nutně konvergentní - např. posloupnost  $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ . Tato posloupnost je omezená (její členy nabývají střídavě hodnot  $-1$  a  $1$ , tudíž je omezená), ale není konvergentní, tj. neexistuje její limita.

Podrobněji je o některých typech omezených posloupností pojednáno v úvodu odstavce 7.6.

Následující věty umožňují určovat limity „složitějších“ posloupností na základě limit posloupností „jednodušších“.

**V:** Jestliže posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  a  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  jsou konvergentní a přitom  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , pak je konvergentní i posloupnost:

- $(a_n \pm b_n)_{n=1}^{\infty}$  a platí:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$ ;
- $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$  a platí:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$ ;
- $(c \cdot a_n)_{n=1}^{\infty}$  a platí:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a$ , kde  $c \in \mathbb{R}$ ;
- $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$  a platí:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$  za předpokladu, že  $b \neq 0$  a  $b_n \neq 0$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .

Zvláštním případem posloupností jsou posloupnosti aritmetické a geometrické. Proto se podíváme z hlediska limit na tyto dva druhy posloupností.

### 7.5.1 Aritmetické posloupnosti

Aritmetické posloupnosti s diferencí  $d = 0$  jsou konvergentní (jsou konstantní), aritmetické posloupnosti s diferencí  $d \neq 0$  nejsou omezené a proto jsou divergentní.

### 7.5.2 Geometrické posloupnosti

Geometrická posloupnost  $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ , ve které je:

- $|q| > 1$ , není omezená, a proto není konvergentní
- $q = 1$ , je konvergentní (je to posloupnost konstantní) a její limita je 1
- $q = -1$ , je divergentní (členy posloupnosti oscilují mezi  $-1$  a  $1$ )
- $|q| < 1$ , je konvergentní

**V:** Geometrická posloupnost  $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ , pro kterou je  $|q| < 1$ , je konvergentní a její limita je rovna 0.

Poznámka: Tato věta je velmi důležitá pro nekonečné řady.

**V:** Každá geometrická posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , pro jejíž kvocient  $q$  platí  $|q| < 1$ , je konvergentní a  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

## 7.6 Užití limit posloupností

Nejprve uvedeme 3 věty, které se ukáží jako velmi užitečné při dalších příkladech (viz odstavce 7.6.1 až 7.6.3).

**V:** Je-li omezená posloupnost monotónní, pak je konvergentní.

Pro neklesající resp. nerostoucí posloupnost odtud plyne:

**V:** Je-li posloupnost neklesající a přitom shora omezená, pak je konvergentní.

**V:** Je-li posloupnost nerostoucí a přitom zdola omezená, pak je konvergentní.

V odstavcích 7.6.1 až 7.6.3 se budeme zabývat výpočtem některých iracionálních čísel. Jejich výpočet je založen na následující větě:

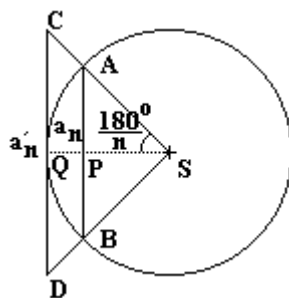
**V:** Pro každé reálné číslo  $r$  existuje neklesající posloupnost racionálních čísel  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  a nerostoucí posloupnost racionálních čísel  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  tak, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r$ .

### 7.6.1 Výpočet Ludolfova čísla

Řecký matematik Archimedes (287 př. n. l. - 212 př. n. l.) ukázal, že pro číslo  $\pi$  platí nerovnost  $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ . K tomuto závěru dospěl tak, že délku kružnice porovnával s obvodů pravidelných  $n$ -úhelníků, které jsou vepsány resp. opsány dané kružnici. Později byl jeho původní odhad čísla  $\pi$  zpřesňován tím, že matematici volili stále větší počet stran těchto mnohoúhelníků.

Uvažujme kružnici o poloměru 1, jejíž obvod je  $2\pi$ . Označíme  $(o_n)_{n=1}^{\infty}$  posloupnost obvodů pravidelných  $n$ -úhelníků kružnici vepsaných a  $(o'_n)_{n=1}^{\infty}$  posloupnost pravidelných  $n$ -úhelníků kružnici opsaných. Z geometrického pohledu na situaci je zřejmé, že posloupnost  $(o_n)_{n=1}^{\infty}$  je rostoucí a omezená (obvodem kružnice) a posloupnost  $(o'_n)_{n=1}^{\infty}$  je klesající a omezená (opět obvodem kružnice). Obě jsou monotónní a omezené, tedy konvergentní. Je možné ukázat, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí:  $o_n < 2\pi < o'_n$  a navíc  $\lim_{n \rightarrow \infty} o_n = 2\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} o'_n$ .

Nyní vyjádříme  $n$ -tý člen obou posloupností  $(o_n)_{n=1}^{\infty}$  a  $(o'_n)_{n=1}^{\infty}$  na základě obr. 90, na kterém je znázorněna jedna strana pravidelného  $n$ -úhelníka kružnici vepsaného i opsaného. Pravidelný  $n$ -úhelník vepsaný i opsaný kružnici lze rozdělit na  $n$  rovnostranných trojúhelníků, jejichž úhel proti základně má velikost  $\frac{360^\circ}{n}$ . Pro další odvození budou důležité pravoúhlé trojúhelníky  $APS$  a  $CQS$ , které jsou vytvořeny spuštěním výšky z bodu  $S$  na stranu  $AB$  resp.  $CD$ . Úhel při vrcholu  $S$  má v obou trojúhelnících velikost  $\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}$ .



obr. 90

V pravoúhlém trojúhelníku  $APS$  platí:  $\sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{\frac{a_n}{2}}{1} = \frac{a_n}{2}$ . Odtud  $a_n = 2 \sin \frac{180^\circ}{n}$  a pro obvod uvažovaného vepsaného  $n$ -úhelníka pak platí:  $o_n = 2n \sin \frac{180^\circ}{n}$ .

V pravoúhlém trojúhelníku  $CQS$  platí:  $\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = \frac{\frac{a'_n}{2}}{1} = \frac{a'_n}{2}$ . Odtud  $a'_n = 2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$  a pro obvod uvažovaného opsaného  $n$ -úhelníka pak platí:  $o'_n = 2n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$ .

Dosadíme-li do odhadu pro  $\pi$ , dostaneme:  $2n \sin \frac{180^\circ}{n} < 2\pi < 2n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$ , odkud  $n \sin \frac{180^\circ}{n} < \pi < n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$ . Podobným způsobem je možné dosadit i do vztahu pro limity:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2n \sin \frac{180^\circ}{n} \right) = 2\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \right)$ . Postupnými úpravami dostaneme  $2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \sin \frac{180^\circ}{n} \right) = 2\pi = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \right)$  a tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \sin \frac{180^\circ}{n} \right) = \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \right)$ .

Postupným dosazováním za  $n$  je možné určit  $\pi$  na libovolný počet desetinných míst. Např. pro  $n = 10000$  dostáváme  $\pi = 3,14159$ , tj. s přesností na pět desetinných míst.

Jméno získalo číslo  $\pi$  podle Holanďana Ludolpha von Ceulen (1540 - 1610), který už v roce 1596 vypočítal číslo  $\pi$  na 20 desetinných míst. V roce 1615 své výpočty zpřesnil a vypočítal hodnotu tohoto čísla na 35 desetinných míst.

### 7.6.2 Výpočet čísla $e$

S Eulerovým číslem jsme se setkali v učivu o exponenciálních funkcích a přirozených logaritmech, v učivu o komplexních číslech, .... Toto iracionální číslo, které hraje důležitou roli při řešení aplikací v přírodních vědách a technice (viz např. odstavec 0), lze definovat také pomocí limit posloupnosti.

Uvažujme posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Určíme nyní prvních několik členů této posloupnosti:

$$\begin{array}{llll} a_1 = 2 & a_3 = 2,370370 & a_{10} = 2,593742 & a_{1000} = 2,716923 \\ a_2 = 2,25 & a_4 = 2,441406 & a_{100} = 2,704813 & a_{10000} = 2,718145 \end{array}$$

Je možné ukázat, že posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  je rostoucí a omezená, a je tedy i konvergentní. Platí:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Dále je možné uvažovat posloupnost  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ . Určíme nyní prvních několik členů této posloupnosti:

$$\begin{array}{llll} b_1 = 4 & b_3 = 3,160494 & b_{10} = 2,853117 & b_{1000} = 2,719641 \\ b_2 = 3,375 & b_4 = 3,051758 & b_{100} = 2,731862 & a_{10000} = 2,718418 \end{array}$$

Je možné ukázat, že posloupnost  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  je klesající a omezená, a je tedy i konvergentní. Platí:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  tedy platí  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  a tudíž  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ .

### 7.6.3 Výpočet druhé odmocniny reálných čísel

Chceme-li vypočítat druhou odmocninu z kladného reálného čísla  $a$ , zvolíme nejprve kladné číslo  $x_1$ , jehož druhá mocnina je větší než  $a$ . Pak je  $x_1$  větší než  $\sqrt{a}$  a číslo  $\frac{a}{x_1}$  menší než  $\sqrt{a}$ , tj.  $\frac{a}{x_1} < \sqrt{a} < x_1$ .

Uvažujme dále posloupnost  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ , která je dána rekurentně takto:  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{x_n} + x_n \right)$ .

O této posloupnosti lze dokázat, že platí:

1. Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $\frac{a}{x_n} < \sqrt{a} < x_n$ .
2. Posloupnost  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  je klesající.
3. Posloupnost  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  je omezená.
4. Posloupnost  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  je konvergentní (vyplývá z předchozích dvou).

Posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  a  $(x_{n+1})_{n=1}^{\infty}$  mají stejnou limitu, kterou označíme  $c$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = c$ . Uvědomíme-li si, že pro hodně velká přirozená čísla můžeme místo  $x_n$  a  $x_{n+1}$  dosazovat  $c$  (dle předchozích limit), můžeme psát:  $c = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{c} + c \right)$ . Tento vztah je možné dále upravovat:  $2c = \frac{a}{c} + c$ , odkud  $c^2 = a$ . A tedy  $c = \sqrt{a}$ .

Při přibližném výpočtu druhé odmocniny z čísla  $a$  tedy stačí zvolit za první člen posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  dané rekurentně vztahem  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{x_n} + x_n \right)$  libovolné kladné číslo  $x_1$ , jehož druhá mocnina je větší než  $a$ . Poté je možné již dopočítávat další členy, které se budou „velmi rychle blížit“ hledanému číslu  $\sqrt{a}$ .

### **Příklady:**

1. Napište vyjádření pro  $n$ -tý člen posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , která je zadaná rekurentně:  $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ , kde  $a_1 = 2$  a  $a_2 = 4$ .
2. Napište vyjádření pro  $n$ -tý člen posloupnosti  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ , která je zadaná rekurentně:  $b_{n+2} = 6b_{n+1} - 9b_n$ , kde  $b_1 = 1$  a  $b_2 = 2$ .
3. Kolik korun je třeba ukládat počátkem každého roku po dobu 10 let, chceme-li mít koncem desátého roku nastřádáno 10000 Kč při 2% složeném úrokování a 15% dani? Úrokovací období je jeden rok.
4. Kolik korun budeme mít na účtu s úrokem 5% na konci sedmého měsíce, budeme-li počátkem každého měsíce ukládat částku 100 Kč. Počítejte s daní 15% a úrokovacím obdobím jeden měsíc.
5. Ve městě žilo na počátku roku 2000 25000 obyvatel. Kolik obyvatel bude mít město na začátku roku 2005, odhaduje-li se roční přírůstek na 1,5%?
6. Za kolik let vzroste jistina 1000 korun při úroku 3 % na 1500 korun. Počítejte s daní 15 % a uvažujte a) roční, b) měsíční úrokovací období.
7. Podnikatel si vypůjčil 100000 a zavázal se, že půjčku splatí dvěma stejnými splátkami, z nichž jedna bude splatná za 2 roky, druhá za 4 roky ode den vypůjčení. Jak velké budou tyto splátky při úroku 4 %?
8. Množství dřeva v určité lesní oblasti se odhaduje na  $1,5 \cdot 10^6 \text{ m}^3$  a roční přírůstek je 2 %. Jaký bude přibližně stav po 10 letech, těží-li se ročně  $2 \cdot 10^4 \text{ m}^3$  dřeva?

## 8. APLIKACE

### 8.1 Taylorův polynom (rozvoj)

Z funkcí, které se probírají nejen na střední ale i na vysoké škole, jsou nejjednodušší funkce polynomické (mezi něž patří např. i funkce lineární nebo kvadratická). Polynomické funkce mají řadu výhod:

1. jednoduchý definiční obor - nejsou-li nějak omezeny, tak je jejím definičním oborem množina všech reálných čísel
2. jsou spojité ve svém definičním oboru
3. ve všech bodech existuje derivace
4. derivace jsou spojité
5. snadno se s nimi pracuje (určit hodnotu polynomu lze velmi jednoduše i při manuálním počítání bez kalkulačky, což např. u většiny hodnot goniometrických, logaritmických a dalších funkcí není možné)
6. ...

Proto se matematikové snažili najít způsob, jak převést libovolnou funkci na vyjádření pomocí polynomu. Toto snažení završili anglický matematik Brook Taylor (1685 - 1731) a skotský matematik Colin Maclaurin (1698 - 1746). Taylor je autorem věty (postupu), který poté završil Maclaurin.

Polynom  $T_{f,a,n}(x)$ , který libovolnou funkci  $f$  nahradí v okolí daného bodu  $a$ , je nutné hledat tak, aby v okolí bodu  $a$  byl rozdíl mezi zadanou funkcí  $f$  a hledaným polynomem  $T_{f,a,n}(x)$  minimální. To znamená, že musí být splněny zároveň tyto podmínky:

1.  $T_{f,a,n}(x) = f(a)$  (funkční hodnoty v bodě  $a$  určené pomocí polynomu i pomocí funkce  $f$  musí být stejné)
2.  $T'_{f,a,n}(a) = f'(a) \wedge T''_{f,a,n}(a) = f''(a) \wedge T'''_{f,a,n}(a) = f'''(a) \wedge \dots \wedge T^{(n)}_{f,a,n}(a) = f^{(n)}(a)$  (derivace až do řádu  $n \in \mathbb{N}$  jsou stejné - funkce a polynom mají stejný průběh)

Hledaný polynom  $T_{f,a,n}(x)$  lze zavést takto:

**MÁ-LI FUNKCE  $f$  V BODĚ  $a$  VLASTNÍ DERIVACE AŽ DO ŘÁDU  $n \in \mathbb{N}$ , LZE DEFINOVAT POLYNOM (TAYLORŮV POLYNOM) STUPNĚ  $n$  FUNKCE  $f$  V BODĚ  $a$  PŘEDPÍSEM:**

$$T_{f,a,n}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$= f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Taylorův polynom je vlastně zobecněním diferenciálu funkce (viz odstavec 4.5).

*Poznámka:* Pro  $a = 0$  se někdy polynom nazývá Maclaurinův.

Definice říká, že lze sestavit polynom určitým způsobem. Zatím ale není zaručeno, že jsou splněny podmínky kladené na polynom (tj. rovnost funkčních hodnot polynomu a funkce a rovnost všech derivací až do řádu  $n$ ). Navíc je zřejmé, že i když se budeme snažit sebevíc, vždycky vznikne nějaká odchylka (chyba). Požadavek na odchylku polynomu  $T_{f,a,n}(x)$  od funkce  $f$  je jasný: musí být co nejmenší. Tato odchylka se většinou značí  $R_{n+1}(x)$  a platí:  $R_{n+1}(x) = f(x) - T_{f,a,n}(x)$ . A právě o této odchylce mluví Taylorova věta.

**V (Taylorova):** Necht'  $a < x$ , necht'  $f^{(n+1)}$  existuje v intervalu  $\langle a; x \rangle$ , necht'  $\varphi$  je spojitá funkce a necht'  $\varphi'$  existuje nenulová v intervalu  $\langle a; x \rangle$ . Potom existuje  $\xi \in (a; x)$  tak, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} \cdot f^{(n+1)}(\xi).$$

Touto problematikou se zabývala řada matematiků. Funkce  $R_{n+1}(x)$  může mít různé podoby, pokud splní požadavky, které na ni klade Taylorova věta. Nejrozšířenější jsou dva tvary této funkce:

1. Lagrangeův tvar zbytku:  $R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi)$  pro  $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$
2. Cauchyho tvar zbytku:  $R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n (x-a)}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi)$  pro  $\varphi(t) = t$

Nejsnáze pochopíme význam Taylorova polynomu na konkrétním příkladě.

**Příklad:** Najděte Taylorův polynom pro funkci  $f : y = \sin x$  v okolí bodu  $x = 0$ .

**Řešení:** Zadaný bod  $x = 0$  je ve značení Taylorova polynomu bod  $a = 0$ . Pro nalezení Taylorova polynomu je nutné znát funkční hodnotu a hodnotu derivací zadané funkce v daném bodě. Funkční hodnota funkce  $f$  v bodě  $a$  je  $f(0) = 0$ . Derivace určíme nejdříve obecně:

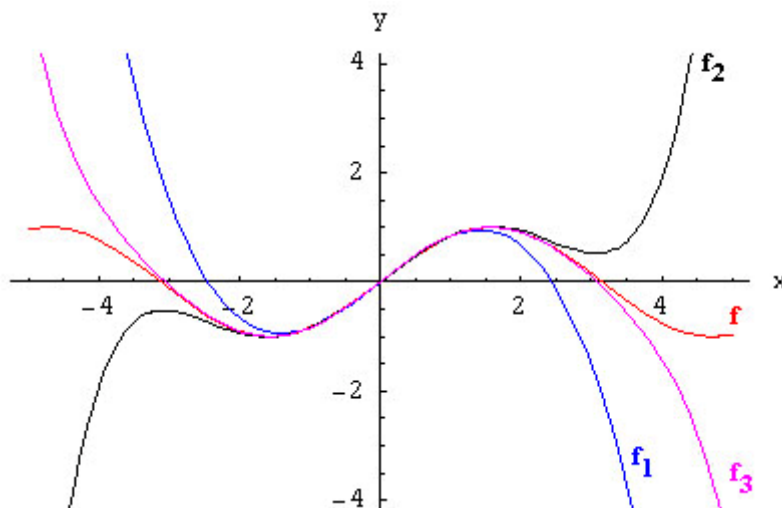
$f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\sin x$ ,  $f'''(x) = -\cos x$ ,  $f^{(4)}(x) = \sin x$ ,  $f^{(5)}(x) = \cos x$ , ... Je vidět, že od páté derivace se začínají funkce, které jsou derivacemi původní funkce  $f$ , opakovat. Lze tedy napsat obecně:

$f^{(4k+1)}(x) = \cos x$ ,  $f^{(4k+2)}(x) = -\sin x$ ,  $f^{(4k+3)}(x) = -\cos x$  a  $f^{(4k)}(x) = \sin x$  pro  $k \in \mathbb{N}_0$  (pro  $k = 0$  lze výraz  $f^{(4k)}(x) = f^{(0)}(x)$  chápat jako předpis původní funkce  $f$ ).

Po dosazení bodu  $a = 0$  dostáváme:  $f^{(4k+1)}(0) = 1$ ,  $f^{(4k+2)}(0) = 0$ ,  $f^{(4k+3)}(0) = -1$  a  $f^{(4k)}(0) = 0$ . Nyní je tedy možné napsat Taylorův polynom funkce  $f : y = \sin x$ .

$$\begin{aligned} T_{f,a,n}(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots = \\ &= 0 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{-1}{3!}(x-0)^3 + \frac{0}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}(x-0)^5 + \frac{0}{6!}(x-0)^6 + \frac{-1}{7!}(x-0)^7 + \dots = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Jak se mění funkce  $T_{f,a,n}(x)$  v závislosti na  $n$  je zobrazeno na obr. 91, na kterém  $f_1(x) = T_{f,0,3}(x)$ ,  $f_2(x) = T_{f,0,5}(x)$  a  $f_3(x) = T_{f,0,7}(x)$ .



obr. 91

Taylorův polynom je důležitý i v dnešní době, v níž používáme kalkulačky a počítače, neboť všechny funkce, které daný typ kalkulačky resp. počítače je schopen zpracovat, jsou v paměti uloženy jako Taylorovy rozvoje. Jinak by nebylo možné funkční hodnotu jiných než polynomických funkcí vyčíslit.

### **Příklady:**

9. Napište Taylorův polynom funkce  $f : y = \sin x$  v bodech  $\frac{\pi}{2}$  a  $\pi$ .
10. Napište Taylorův polynom funkce  $f : y = \cos x$  v bodech  $0$  a  $\pi$ .
11. Napište Taylorův polynom funkce  $f : y = \operatorname{tg} x$  v bodech  $0$  a  $\frac{\pi}{4}$ .
12. Napište Taylorův polynom funkce  $f : y = e^x$  v bodě  $0$ .
13. Napište Taylorův polynom funkce  $f : y = \ln x$  v bodě  $1$ .
14. Napište Taylorův polynom funkce  $f : y = \sqrt{x}$  v bodě  $1$ .

## 8.2 „Zajímavé“ výpočty

Tento odstavec popisuje některé výpočty, které byly v minulosti velmi důležité, neboť usnadňovaly matematikům složitější výpočty, pomáhaly dělat seriózní odhady, ... V současné době důležitost těchto výpočtů poklesla, neboť řadu matematických úloh lze řešit na počítači, který tyto „náhradní“ výpočty většinou nepotřebuje (pokud se zrovna nestuduje jejich přesnost, vlastnosti, ...). Jsou nicméně důležité pro teoretickou matematiku a pro některé další metody, které jdou ovšem za rámec tohoto textu.

### 8.2.1 Racionální kořeny rovnice s racionálními koeficienty

V tomto odstavci bude vysvětlen poměrně jednoduchý způsob, jak nalézt racionální kořeny rovnice s racionálními koeficienty.

Nechť  $b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0$ , kde  $b_i \in \mathbb{Q}$  pro  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $b_n \neq 0$  a  $b_0 \neq 0$ , je rovnice s racionálními koeficienty stupně  $n$ . Tuto rovnici lze upravit tak, že ji vynásobíme společným jmenovatelem všech koeficientů  $b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Dostaneme tak rovnici  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ , kde  $a_i \in \mathbb{Z}$  pro  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $a_n \neq 0$  a  $a_0 \neq 0$ . Každou rovnici stupně  $n$  s racionálními koeficienty tedy umíme převést na rovnici stupně  $n$  s celočíselnými koeficienty. Vzhledem k požadavku  $a_0 \neq 0$  nemá tato rovnice nulové řešení.

Platnost podmínky  $a_0 \neq 0$  lze předpokládat bez újmy na obecnosti. Kdyby totiž  $a_0 = 0$ , měla by rovnice kořen  $x = 0$  a bylo by možné ji převést na rovnici stupně  $(n-1)$ -ního.

**V:** Má-li rovnice  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ , kde  $a_i \in \mathbb{Z}$  pro  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $a_n \neq 0$  a  $a_0 \neq 0$ , racionální kořen  $\frac{p}{q}$ , kde  $p$  a  $q$  jsou celá nesoudělná čísla, pak  $p/a_0$  a  $q/a_n$ .

Pokud bude navíc  $a_n = 1$ , lze získat celočíselná řešení zadané rovnice.

Věta neříká nic o tom, které z možných kořenů uvažované rovnice, kořeny skutečně jsou. Věta říká jen to, že pokud má uvažovaná rovnice racionální kořeny, jsou to ty, které mají dané vlastnosti (rovnice může mít i kořeny reálné nebo komplexní). Jiné racionální kořeny nemá. Které z možných kořenů skutečně kořeny jsou, je nutné ověřit dosazením do uvažované rovnice. Lze též využít i Horerovo schéma (viz odstavec 8.2.2).

**Příklad:** Je dána rovnice  $5x^6 - 7x^5 - 17x^3 + 12x^2 - 8 = 0$ . Najděte racionální čísla, která by mohla být jejími kořeny.

**Řešení:** Podle právě uvedené věty jsou kořeny ve tvaru  $\frac{p}{q}$ , kde  $p$  a  $q$  jsou celá nesoudělná čísla taková, že  $p/(-8)$  a  $q/5$ . Jsou tedy tyto možnosti:  $p \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$  a  $q \in \{\pm 1; \pm 5\}$ . Proto případné racionální kořeny této rovnice jsou z množiny  $\frac{p}{q} \in \left\{ \pm 1; \pm \frac{1}{5}; \pm 2; \pm \frac{2}{5}; \pm 4; \pm \frac{4}{5}; \pm 8; \pm \frac{8}{5} \right\}$

Právě uvedený příklad ukazuje, že čísel „podezřelých z kořenů“ může být poměrně dost. Jisté zjednodušení přináší následující věta.

**V:** Má-li rovnice  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ , jejíž koeficienty jsou celá nesoudělná čísla taková, že  $a_n \neq 0$  a  $a_0 \neq 0$ , racionální kořen  $\frac{p}{q}$ , kde  $p$  a  $q$  jsou celá nesoudělná čísla, potom  $(p-q)/L(1)$  a  $(p+q)/L(-1)$ . Čísla  $L(1)$  resp.  $L(-1)$  jsou přitom hodnoty polynomu na levé straně rovnice pro  $x = 1$  resp.  $x = -1$ .

**Příklad:** Vráťme se k předchozímu příkladu a pokusíme se zúžit množinu všech možných kořenů zadané rovnice  $5x^6 - 7x^5 - 17x^3 + 12x^2 - 8 = 0$ .

**Řešení:** Využijeme právě uvedenou větu. Nejdříve určíme hodnotu polynomu  $L(x)$  na levé straně rovnice pro  $x = 1$  resp.  $x = -1$ . Dostaneme  $L(1) = 5 - 7 - 17 + 12 - 8 = -15$  a  $L(-1) = 5 + 7 + 17 + 12 - 8 = 33$ . Rozdíl  $p - q$  může nabývat pouze hodnot  $\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 15$ , součet  $p + q$  pak hodnot  $\pm 1; \pm 3; \pm 11; \pm 33$ . Jednoduchou úvahou zjistíme, že těmto podmínkám vyhovují dvojice  $p_1 = 2$  a  $q_1 = 1$ ,  $p_2 = \pm 2$  a  $q_2 = \mp 1$  a dvojice  $p_3 = \pm 4$  a  $q_3 = \mp 1$ . Místo původních 16 čísel, která by mohla být kořeny zadané rovnice, se výběr zúžil jen na tři:  $-2; 2; -4$ . Provedením zkoušky dosazením těchto čísel do původní rovnice zjistíme, že racionálním kořenem zadané rovnice je pouze číslo 2.

Zbývající kořeny jsou čísla reálná nebo komplexní.

**8.2.2 Hornerovo schéma**

Nechť  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  je polynom proměnné  $x \in \mathbb{R}$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$  a necht' existují polynomy  $Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$

a  $R(x)$  takové, že platí:  $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R(x)$ , přičemž stupeň polynomu  $R(x)$  je menší než stupeň polynomu  $(x - \alpha)$ , tj. stupeň polynomu  $R(x)$  je menší než 1 ( $R(x)$  je tedy reálná konstanta). Dosazením prvku  $\alpha$  do této rovnosti dostáváme  $P(\alpha) = R$  a tedy lze psát  $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$ . Potom lze psát:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i x^i &= (x - \alpha) \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + P(\alpha). \text{ Pravou stranu výrazu lze dále postupně upravovat: } (x - \alpha) \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + P(\alpha) = \\ &= x \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i - \alpha \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + P(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha b_i x^i + P(\alpha) = \sum_{j=1}^n b_{j-1} x^j - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha b_i x^i - \alpha b_0 x^0 + P(\alpha) = \\ &= \sum_{i=1}^n b_{i-1} x^i - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha b_i x^i - \alpha b_0 x^0 + P(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} b_{i-1} x^i + b_{n-1} x^n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha b_i x^i - \alpha b_0 x^0 + P(\alpha) = \\ &= b_{n-1} x^n + \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i-1} x^i - \alpha b_i x^i) - \alpha b_0 x^0 + P(\alpha). \text{ Toto je vyjádření polynomu } P(x), \text{ který byl původně definován} \end{aligned}$$

vztahem  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ . Lze tedy u jednotlivých mocnin porovnat koeficienty:  $a_n = b_{n-1}$ ,  $a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha b_{n-1}$ ,  
 $\dots$ ,  $a_i = b_{i-1} - \alpha b_i$ ,  $\dots$ ,  $a_1 = b_0 - \alpha b_1$ ,  $a_0 = P(\alpha) - \alpha b_0$ . Vzhledem k tomu, že budeme mít zadaný polynom

$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ , chceme z těchto vztahů vyjádřit koeficienty  $b_i$  pro  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Lze tedy postupně psát:

$b_{n-1} = a_n$ ,  $b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1}$ ,  $\dots$ ,  $b_{i-1} = a_i + \alpha b_i$ ,  $\dots$ ,  $b_0 = a_1 + \alpha b_1$ ,  $P(\alpha) = a_0 + \alpha b_0$ . Toto jsou tedy koeficienty částečného podílu  $Q(x)$  včetně hodnoty polynomu  $P(x)$  v bodě  $\alpha$ . Tento postup zvaný Hornerovo schéma (pojmenované podle anglického učitele Williama Hornera (1786 - 1837)) se zpravidla zapisuje způsobem podle tab. 2:

$\alpha$	$a_n$	$a_{n-1}$	$\dots$	$a_i$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
		$\alpha b_{n-1}$	$\dots$	$\alpha b_i$	$\dots$	$\alpha b_1$	$\alpha b_0$
	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$\dots$	$b_{i-1}$	$\dots$	$b_0$	$P(\alpha)$

tab. 2

S použitím Hornerova schématu lze:

1. určit hodnotu zadaného polynomu pro zadanou hodnotu (a bez nutnosti umocňovat na  $n$ -tou)
2. najít racionální kořen polynomu
3. určit násobnost racionálního kořenu polynomu
4. najít rozklad polynomu na součin lineárních činitelů (pokud takový rozklad existuje a obsahuje racionální kořeny polynomu - viz též odstavec 8.2.1)

Vše bude ukázáno na příkladech.

**Příklad:** Určete hodnotu polynomu  $P(x) = x^5 + 5x^4 - 10x^2 - 2x + 5$  v bodě  $x = 3$ .

**Řešení:** Využijeme Hornerova schématu a přepíšeme si koeficienty polynomu do tabulky analogické tab. 2:

3	1	5	0	-10	-2	5
		3	24	72	186	552
	1	8	24	62	184	557

Ze schématu je vidět, že hodnota polynomu  $P(x) = x^5 + 5x^4 - 10x^2 - 2x + 5$  v bodě  $x = 3$  je 557, tj.  $P(3) = 557$ .

**Příklad:** Určete hodnotu polynomu  $P(x) = x^7 - 6x^6 - x^5 + 70x^4 - 120x^3 - 112x^2 + 432x - 288$  v bodě  $x = 2$ . Jestliže je  $x = 2$  kořenem polynomu, určete jeho násobnost.

**Řešení:** S využitím Hornerova schématu lze psát:



2	1	-6	-1	70	-120	-112	432	-288
								288
	1	-4	-9	52	-16	-144	144	0
	1	-2	-13	26	36	-72	0	
	1	0	-13	0	36	0		
	1	2	-9	-18	0			
	1	4	-1	-20				

Ze schématu je vidět několik věcí. Jednak hledaná hodnota  $P(2) = 0$  - vyplývá ze třetího řádku (počítáme všechny řádky bez ohledu na vodorovný oddělovač) schématu. To ovšem znamená, že výraz  $(x-2)$  dělí polynom beze zbytku. Na třetím řádku dokonce můžeme přečíst koeficienty polynomu, který dostaneme po vydělení polynomu  $P(x)$  výrazem  $(x-2)$ ; je to polynom  $P_{x-2}(x) = x^6 - 4x^5 - 9x^4 + 52x^3 - 16x^2 - 144x + 144$ . Na pátém řádku je vidět, že výraz  $(x-2)$  dělí beze zbytku i polynom  $P_{x-2}(x)$ .

Na základě skutečnosti, že 3., 5., 7. i 9. řádek končí nulou, je jasné, že  $x=2$  je čtyřnásobný kořen polynomu  $P(x)$ , přičemž na 9. řádku jsou vidět koeficienty příslušného podílu. Lze tedy psát:  $P(x) = (x-2)^4(x^3 + 2x^2 - 9x - 18)$ . Na určení dalších případných reálných kořenů polynomu  $P(x)$  lze buď znovu použít Hornerovo schéma a nebo stávající mezivýsledek upravit:  $P(x) = (x-2)^4(x^3 + 2x^2 - 9x - 18) = (x-2)^4(x^2(x+2) - 9(x+2)) = (x-2)^4(x+2)(x^2 - 9) = (x-2)^4(x+2)(x+3)(x-3)$ .

**Příklad:** Najděte všechna reálná řešení rovnice  $x^6 + 4x^5 - 9x^3 - 10x^2 - 34x - 12 = 0$ .

**Řešení:** Podle odstavce 8.2.1 lze najít všechna racionální čísla, která by mohla být kořenem zadané rovnice. Vzhledem k tomu, že  $a_6 = 1$ , najdeme celá čísla, která by mohla být kořenem. Připadají v úvahu čísla z množiny  $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$ . Tyto kořeny lze postupně prověřit pomocí Hornerova schématu. Po příslušném výpočtu zjistíme, že z uvažované množiny vyhovují pouze kořeny  $x_1 = -3$  a  $x_2 = 2$ . Víme tedy, že původní rovnici lze napsat ve tvaru  $(x+3)(x-2)Q(x) = 0$  a po úpravě  $(x^2 + x - 6)Q(x) = 0$ . Polynom  $Q(x)$  lze určit vydělením polynomu tvořícího levou stranu rovnice polynomem  $(x^2 + x - 6)$ .

$$\begin{array}{r}
 (x^6 + 4x^5 + 0x^4 - 9x^3 - 10x^2 - 34x - 12) : (x^2 + x - 6) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 6x + 2 \\
 \underline{-(x^6 + x^5 - 6x^4)} \\
 3x^5 + 6x^4 - 9x^3 \\
 \underline{-(3x^5 + 3x^4 - 18x^3)} \\
 3x^4 + 9x^3 - 10x^2 \\
 \underline{-(3x^4 + 3x^3 - 18x^2)} \\
 6x^3 + 8x^2 - 34x \\
 \underline{-(6x^3 + 6x^2 - 36x)} \\
 2x^2 + 2x - 12 \\
 \underline{-(2x^2 + 2x - 12)} \\
 0
 \end{array}$$

Dostáváme tedy:  $(x+3)(x-2)(x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 6x + 2) = 0$  a po dalších úpravách:

$(x+3)(x-2)(x^2(x^2+3x+1)+2x^2+6x+2) = (x+3)(x-2)(x^2+2)(x^2+3x+1) = 0$ . Rovnice  $x^2+2=0$

nemá v reálných číslech řešení, rovnice  $x^2+3x+1=0$  má řešení ve tvaru  $x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Zadaná rovnice má tedy reálná řešení  $\left\{-3; 2; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$ . Podle základní věty algebry má ale rovnice  $n$ -tého stupně obecně v komplexních číslech  $n$  řešení. Dvě zbývající řešení jsou řešení přímo z množiny komplexních čísel a to  $\{\pm i\sqrt{2}\}$ .

Princip Hornerova schématu lze využít ale i v programování. Pokud by bylo nutné napsat program na výpočet hodnot polynomů různých stupňů, bylo při „klasickém“ vyčíslování hodnoty polynomu zapotřebí uchovávat v paměti počítače všechny koeficienty polynomu. Je pravda, že při opakovaném výpočtu s tímž polynomem se tomu stejně nevyhneme, navíc v současné době není problém do paměti tyto hodnoty (pro rozumný stupeň polynomu) uložit. Přesto ale následující metoda může být v praxi použitelná.

V rámci snadnějšího zápisu bude metoda popsána na polynomu pátého stupně, ale je použitelná pro polynom libovolného stupně.

Nechť je dán polynom  $P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ . Tento polynom lze postupným vytýkáním upravit na tvar

$$P(x) = (a_5x^4 + a_4x^3 + a_3x^2 + a_2x + a_1)x + a_0 = ((a_5x^3 + a_4x^2 + a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0 =$$

$$= (((a_5x^2 + a_4x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0 = (((((a_5x + a_4)x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0).$$

Při výpočtu hodnoty polynomu v daném lze postupovat „zevnitř“: vynásobíme  $a_5x$  a přičteme  $a_4$ ; tento součet vynásobíme  $x$  a přičteme  $a_3$ ; ... Tento postup lze elegantně převést do programu případně aplikovat i v praxi, pokud nebude k dispozici kalkulačka. Místo umocňování budeme pouze násobit a sčítat - a to jde bez použití výpočetní techniky výrazně lépe než umocňování!

Tímto způsobem lze upravit polynom libovolného stupně  $n \in \mathbb{N}$ .

### 8.2.3 Euklidův algoritmus hledání největšího společného dělitele

Autorem Euklidova algoritmu na hledání největšího společného dělitele dvou čísel byl řecký matematik Euklides ze Alexandrie (365 - 280 př. n. l.) a publikoval ho v 7. knize svého díla *Základy (Stocheia, Elementa)*. Toto dílo obsahovalo všechny do té doby známé matematické poznatky logicky utříděné. Euklides v tomto díle začal budovat axiomatickou výstavbu matematiky.

Euklidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele čísel celých čísel  $a$  a  $b$  (dále  $NSD(a, b)$ ) lze na tato čísla aplikovat dvěma způsoby.

První způsob spočívá v postupném odčítání menšího z čísel od většího. Tento postup lze shrnout do těchto tří podmínek (kroků):

1.  $NSD(a, b) = NSD(a - b, b)$ , je-li  $a > b$
2.  $NSD(a, b) = NSD(a, b - a)$ , je-li  $a < b$
3.  $NSD(a, b) = a = b$ , je-li  $a = b$

Velmi snadno tuto metodu pochopíme na příkladu.

**Příklad:** Určete největšího společného dělitele čísel 65 a 26.

**Řešení:** Pomocí Euklidova algoritmu lze postupně psát:  $NSD(65, 26) = NSD(39, 26) = NSD(13, 26) = NSD(13, 13) = 13$ .

Největším společným dělitelem čísel 65 a 26 je číslo 13.

Druhý způsob aplikace Euklidova algoritmu spočívá v postupném celočíselném dělení většího čísla menším. Vzhledem k tomu, že pro tuto metodu je nezbytné celočíselné dělení, připomeneme jej na příkladě.

**Příklad:** Vydělte celočíselně číslo 36 pěti.

**Řešení:** Při celočíselném dělení nás zajímá pouze podíl ve tvaru celého čísla. Desetinou část neuvažujeme. Lze tedy psát:  $36 : 5 = 7 + 1$ . Celočíselný podíl čísel 36 a 5 je 7.

Programátorům bude asi bližší zápis  $36 \text{ div } 5 = 7$  resp.  $36 \text{ mod } 5 = 1$ .

V tomto případě lze tedy Euklidův algoritmus hledání  $NSD(a, b)$  shrnout do těchto kroků:

1. pro  $a > b$  je  $NSD(a, b) = NSD(a - bq, b)$ , kde  $q = a \text{ div } b$ ; lze též psát  $NSD(a, b) = NSD(a \text{ mod } b, b)$

2. pro  $a < b$  je  $NSD(a, b) = NSD(a, b - aq)$ , kde  $q = b \operatorname{div} a$ ; lze též psát  $NSD(a, b) = NSD(a, b \bmod a)$
3. pro  $a = kb$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) je  $NSD(a, b) = NSD(0, b) = b$
4. pro  $b = ka$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) je  $NSD(a, b) = NSD(a, 0) = a$

Právě popsany postup bude ukázán na příkladu, v němž budou vystupovat stejná čísla jako v příkladu procvičujícím „odčítací“ metodu Euklidova algoritmu.

**Příklad:** Určete největšího společného dělitele čísel 65 a 26.

**Řešení:** Je vhodné si nejprve připravit příslušné podíly a zbytky, aby byl postup zřejmější.

$$65 = 26 \cdot 2 + 13$$

$$26 = 13 \cdot 2 + 0 \text{ a tím jsme u konce.}$$

Postup lze zapsat takto:  $NSD(65, 26) = NSD(13, 26) = NSD(13, 0) = 13$ .

Největším společným dělitelem čísel 65 a 26 je číslo 13.

Jak je vidět, tento postup vyžaduje méně kroků než „odčítací“ metoda.

Euklidův algoritmus lze použít i pro polynomy. Vzhledem k tomu, že u polynomů není definovaná relace „je větší než“, není možné použít metodu „odčítací“, ale je nutné používat metodu „dělicí“. U polynomů je nutné upozornit na důležitý fakt: největších společných dělitelů dvou polynomů je nekonečně mnoho; liší se ale jen konstantním násobkem.

Nejlépe vše vysvětlíme na příkladu.

**Příklad:** Jsou dány polynomy  $P(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$  a  $Q(x) = x^3 - 7x^2 - 9x + 63$ . Určete jejich největší společný dělitel.

**Řešení:** S využitím Euklidova algoritmu začneme polynomy postupně dělit.

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 - 9x - 9) : (x^3 - 7x^2 - 9x + 63) = 1 \\ \underline{-(x^3 - 7x^2 - 9x + 63)} \\ 8x^2 - 0x - 72 \end{array} \quad \begin{array}{r} (x^3 - 7x^2 - 9x + 63) : (8x^2 - 72) = \frac{1}{8}x \\ \underline{-(x^3 - 9x)} \\ -7x^2 - 0x + 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (8x^2 - 72) : (-7x^2 + 63) = -\frac{8}{7} \\ \underline{-(8x^2 - 72)} \\ 0 \end{array}$$

Největším společným dělitelem zadaných dvou polynomů je polynom  $x^2 - 9$ ; platí totiž  $8x^2 - 72 = 8(x^2 - 9)$ .

Největší společný násobek dvou polynomů lze hledat také tak, že najdeme pomocí Hornerova schématu (viz odstavec 8.2.2) rozklad daných dvou polynomů na součin lineárních členů a polynomů, které nemají v reálných číslech kořen, a na základě tohoto rozkladu určíme největší společný dělitel zadaných polynomů.

## 8.2.4 Diferenciál funkce

**Příklad:** Vypočítejte bez použití kalkulačky a)  $\sqrt{9,1}$ , b)  $\sqrt{8,95}$ .

**Řešení:** Tyto příklady vyřešíme s využitím diferenciálu funkce. Jeho definiční vztah je  $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + \tau(\Delta x)$ , kde  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tau(\Delta x)}{\Delta x} = 0$ . Lze tedy psát:  $f(x + \Delta x) \doteq f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ .

V tomto případě je  $f(x) = \sqrt{x}$  a tedy  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Nyní lze už začít počítat.

$$\text{a) } \sqrt{9,1} = \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0,1 = 3 + \frac{0,1}{6} = 3,01\bar{6} \text{ (správná hodnota určená s kalkulačkou je } 3,01662)$$

$$\text{b) } \sqrt{8,95} = \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot (-0,05) = 3 - \frac{0,05}{6} = 3 - 0,008\bar{3} = 2,991\bar{6} \text{ (správná hodnota je } 2,991655)$$

**Příklad:** Určete hodnotu výrazu  $\log_{10} 2$  s využitím diferenciálu funkce.

**Řešení:** Na základě minulého příkladu je řešení zřejmé.  $f(x) = \log x$  a tedy  $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$ . Můžeme tedy psát:

$$\log 10,2 = \log 10 + \frac{1}{10 \cdot \ln 10} \cdot 0,2 \doteq 1,00868 \quad (\text{správná hodnota je } 1,00860)$$

**Poznámka:** Při pokusu počítat tímto způsobem hodnoty goniometrických funkcí je nutné mít na paměti, že goniometrické funkce jsou velmi citlivé (díky svému průběhu) na zaokrouhlování a na aplikaci přibližných výpočtů. Rozdíl pouhého jednoho stupně dá velmi nepřesný odhad!

V současné době, kdy každý vlastní kalkulačku i osobní počítač, jsou tyto výpočty již zastaralé. Před masivním rozšířením techniky bylo nutné podobné výpočty zvládat za pomoci tabulek. A v tabulkách nebyly všechny hodnoty odmocnin, logaritmů, goniometrických funkcí, .... Proto bylo nutné znát a umět používat tyto přibližné metody.

Následující příklad je použitelný i v současné době ve fyzice a dalších vědeckých oborech.

**Příklad:** Měřením byl určen poloměr kuličky  $r = 10$  mm s chybou  $dr = 0,01$  mm. Jakou chybou bude zatížen výpočet objemu kuličky?

**Řešení:** Objem  $V$  kuličky o poměru  $r$  je dán vztahem  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Diferenciál  $dV$  funkce  $V$  je dán vztahem

$$dV = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 dr = 4\pi r^2 dr. \quad \text{A to je vztah pro absolutní chybu určení objemu. Po dosazení dostaneme}$$

$$dV = 4,3,14 \cdot 100 \cdot 0,01 \text{ mm}^3 = 12,56 \text{ mm}^3. \quad \text{Pro relativní chybu určení objemu pak platí } \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3dr}{r}, \text{ což}$$

po dosazení dává  $\frac{dV}{V} = \frac{3 \cdot 0,01}{10} \cdot 100\% = 0,3\%$ . Relativní chyba určení poloměru kuličky přitom je jen

$$\frac{dr}{r} = \frac{0,01}{10} \cdot 100\% = 0,1\%.$$

### **Příklady:**

15. Najděte celočíselné kořeny rovnice  $x^7 + 4x^6 - 3x^5 - 18x^4 + x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = 0$ .

16. Najděte celočíselné kořeny rovnice  $x^5 - 8x^3 - x^2 + 12x - 4 = 0$ .

17. Najděte celočíselné kořeny rovnice  $x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36 = 0$ .

18. Najděte celočíselné kořeny rovnice  $x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12 = 0$ .

19. Najděte celočíselné kořeny rovnice  $x^5 - 3x^4 - 21x^3 + 11x^2 + 48x - 36 = 0$ .

20. Najděte největší společný dělitel polynomů  $x^2 + 3x + 2$  a  $x^2 - 2x - 3$ .

21. Najděte největší společný dělitel polynomů  $x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$  a  $x^5 - 11x^4 + 47x^3 - 99x^2 - 108x - 54$ .

22. Najděte největší společný dělitel polynomů  $x^4 - 5x^3 + x^2 - 21x - 18$  a  $x^4 - 13x^2 + 36$ .

23. Délka hrany krychle je  $a = (5,0 \pm 1,0)$  m. Určete absolutní a relativní chybu při výpočtu a) objemu, b) povrchu této krychle.

24. S jakou přesností je třeba změřit poloměr koule, abychom se při výpočtu jejího a) objemu, b) povrchu dopustili chyby nepřesahující 1%?

## **8.3 Iterační metody hledání reálných kořenů polynomů**

V současné době je řada iteračních metod na hledání kořenů polynomů (resp. nulových bodů funkcí) přímo vestavěná do různých počítačových programů zabývajících se matematickými výpočty, do řady kalkulátorů, ... a tak by se mohlo zdát zbytečné se jimi zabývat. Přesto uvedeme základní metody hledání reálných kořenů polynomů (resp. nulových bodů funkcí), neboť tyto metody se mohou použít i k řešení jiných problémů (hledání určitého prvku v poli, ...).

### **8.3.1 Před aplikací metody ...**

Dříve než aplikujeme některou z popsaných metod (viz odstavec 8.3.2 až 8.3.4), lze některé kořeny najít jiným způsobem, případně zúžit interval hledání kořene. Většina dále popsaných iteračních metod najde totiž pouze jeden z několika kořenů, které může daná rovnice mít. Proto je nutné (zejména řešíme-li danou úlohu z hlediska aplikace do fyziky, elektrotechniky, ...) předem vědět, který z kořenů nás zajímá. Odhadnout interval, ve kterém se hledaný kořen nachází, nebývá složité. Výrazně složitější by bylo bez dále uvedených metod hledat přesnou hodnotu daného kořene.

V odstavci 8.2.1 je uvedena věta, na základě které je možné najít racionální kořeny zadané polynommické rovnice (obsahuje-li tato rovnice pouze racionální koeficienty). Budou-li čísla „podezřelá z kořenů“ skutečnými kořeny, lze snížit stupeň zadaného polynomu před další aplikací některé z metod vydělením kořenovým činitelem.

Dále lze využít znalosti grafu zadané funkce. Budeme-li znát ovšem graf funkce (vykreslený patrně na počítači), nebude problém použít nějakou vestavěnou funkci na hledání kořenů. Pokud by ale graf byl zadán obrázkem nebo byl sestojen bez využití výpočetní techniky, lze ho využít k lokalizaci kořenů zadané funkce.

Dále je možné využít větu, kterou vyslovil francouzský matematik a filosof René Descartes (1596 - 1650):

**VĚTA:** POČET Kladných kořenů polynomu stupně  $n \geq 1$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ , s reálnými koeficienty je nejvýše roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů tohoto polynomu.

*Poznámka:* Podle této věty lze určit i počet záporných kořenů daného polynomu.

**Příklad:** Určete nejdříve počet kladných kořenů rovnice  $P(x)=0$ , kde  $P(x)=x^4-x^3-15x^2+9x+54$  je polynom čtvrtého stupně. Pak se pokuste tyto kořeny určit.

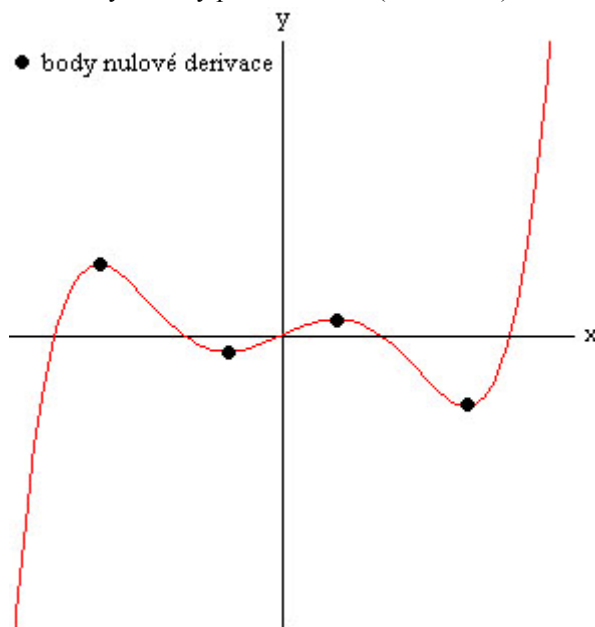
**Řešení:** Počet znaménkových změn v posloupnosti koeficientů zadaného polynomu (tj. v posloupnosti čísel 4, -1, -15, 9, 54) je roven 2. To znamená, že i zadaná rovnice má nejvýše 2 kladné kořeny.

Je-li  $x$  záporný kořen, pak  $-x$  je číslo kladné. Zadaný polynom lze tedy přepsat ve tvaru:

$P(-x) = (-x)^4 - (-x)^3 - 15(-x)^2 + 9(-x) + 54 = x^4 + x^3 - 15x^2 - 9x + 54$ . Počet znaménkových změn tohoto polynomu je roven 2. Proto má také rovnice  $P(-x)=0$  maximálně dva kladné kořeny, tj. zadaná polynommická rovnice  $P(x)=0$  má nejvýše dva záporné kořeny. Vzhledem k tomu, že 0 není kořenem zadaného polynomu, má zadaný polynom právě dva kladné a právě dva záporné kořeny.

Pomocí věty z odstavce 8.2.1 může mít pouze tyto racionální kořeny  $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 18; \pm 27; \pm 54\}$ . S použitím např. Hornerova schématu (viz odstavce 8.2.2) zjistíme, že kořeny zadaného polynomu jsou čísla  $\{-2; \pm 3\}$ , kořen 3 je dvojnásobný.

Další pomocí jak lokalizovat kořeny dané rovnice může být aplikace Rolleovy věty (viz odstavce 4.7.1). Tato věta říká, že pokud je  $f$  taková spojitá funkce na uzavřeném intervalu, která nabývá v krajních bodech tohoto intervalu stejných funkčních hodnot a která má ve všech vnitřních bodech derivaci, pak na uvažovaném intervalu má tato funkce určité extrém. Jinými slovy: na uvažovaném intervalu existuje bod, v němž je první derivace funkce nulová. Tento bod je tedy nulovým bodem první derivace dané funkce. V případě spojitě funkce proto leží její nulové body mezi nulovými body první derivace (viz obr. 92).



obr. 92

### 8.3.2 Metoda půlení intervalu (bisekce)

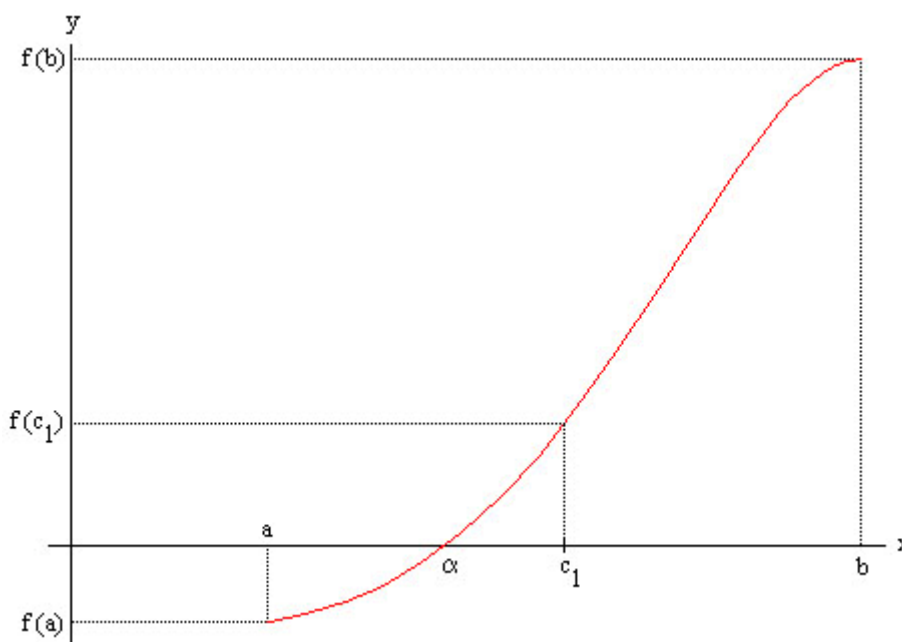
Nechť  $f$  je spojitá funkce na intervalu  $\langle a; b \rangle$  taková, že  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (tj. funkční hodnoty v krajních bodech intervalu mají opačná znaménka), a nechť  $\varepsilon > 0$ . Potom v intervalu  $(a; b)$  leží alespoň jedno číslo  $\alpha$  takové, že  $f(\alpha) = 0$ . Označíme-li  $c_1 = \frac{a+b}{2}$ , pak buď  $f(c_1) = 0$  a  $\alpha = c_1$  a nebo  $f(c_1) \neq 0$ .

Pokud  $f(c_1) \neq 0$ , metoda pokračuje analogicky dále (viz obr. 93).

V  $n$ -tém kroku aplikace této metody najdeme střed  $c_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$  intervalu  $(a_{n-1}; b_{n-1})$ . Jestliže  $c_n - a_{n-1} < \varepsilon$ , výpočet končí a platí  $\alpha = c_n$ . Jestliže  $c_n - a_{n-1} \geq \varepsilon$ , pak z předpokladu  $f(a_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0$  vyplývá, že platí jedna z následujících podmínek:

1.  $f(a_{n-1}) \cdot f(c_n) < 0$ ; v tom případě volíme  $a_n = a_{n-1}$  a  $b_n = c_n$ ;
2.  $f(c_n) \cdot f(b_{n-1}) < 0$ ; v tom případě volíme  $a_n = c_n$  a  $b_n = b_{n-1}$ ;
3.  $|f(c_n)| < \varepsilon$  (to je obecnější podmínka než  $f(c_n) = 0$ ) - výpočet končí a platí  $\alpha = c_n$ .

Pokud budeme chtít na základě tohoto rozboru naprogramovat metodu bisekce v nějakém počítačovém programu, je lepší používat testování splnění podmínky  $|f(c_n)| < \varepsilon$ , než podmínky  $f(c_n) = 0$ . Rovnost nule totiž nemusí teoreticky nastat nikdy, protože kořen prostě s takovou přesností nenalezneme. Podmínka  $|f(c_n)| < \varepsilon$  je mírnější: bude splněna tehdy, bude-li se funkční hodnota  $f(c_n)$  lišit od nuly o předem zadanou přesností výpočtu  $\varepsilon$ .



obr. 93

### 8.3.3 Metoda sečen (regula falsi)

Tato metoda je založena na hledání kořene funkce (rovnice) pomocí sečny vedené k funkci v krajních bodech uvažovaného intervalu. Nejprve odvodíme rovnici sečny spojující krajní body funkce na intervalu  $\langle a; b \rangle$  a potom tento postup zobecníme.

Nechť  $f$  je spojitá funkce na intervalu  $\langle a; b \rangle$  taková, že  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (tj. funkční hodnoty v krajních bodech intervalu mají opačná znaménka), a nechť  $\varepsilon > 0$ . Potom v intervalu  $(a; b)$  leží alespoň jedno číslo  $\alpha$  takové, že  $f(\alpha) = 0$ .

Sečna je určena body  $[a; f(a)]$  a  $[b; f(b)]$  (viz obr. 94). Nyní je nutné najít průsečík  $[c_1; 0]$  této sečny s osou  $x$ . Tento průsečík lze najít dvěma způsoby:

1. „klasicky“ - napsat směrnicový tvar rovnice sečny ve tvaru  $y = kx + q$ , do ní dosadit uvažované body a vyjádřit koeficienty  $k$  a  $q$ ; poté dosadit za  $y$  nulu a dopočítat  $x$ , tj.  $c_1$ ;
2. pomocí podobnosti trojúhelníků.

Rovnici sečny nyní odvodíme pomocí podobnosti trojúhelníků. Na základě obr. 94 lze psát:

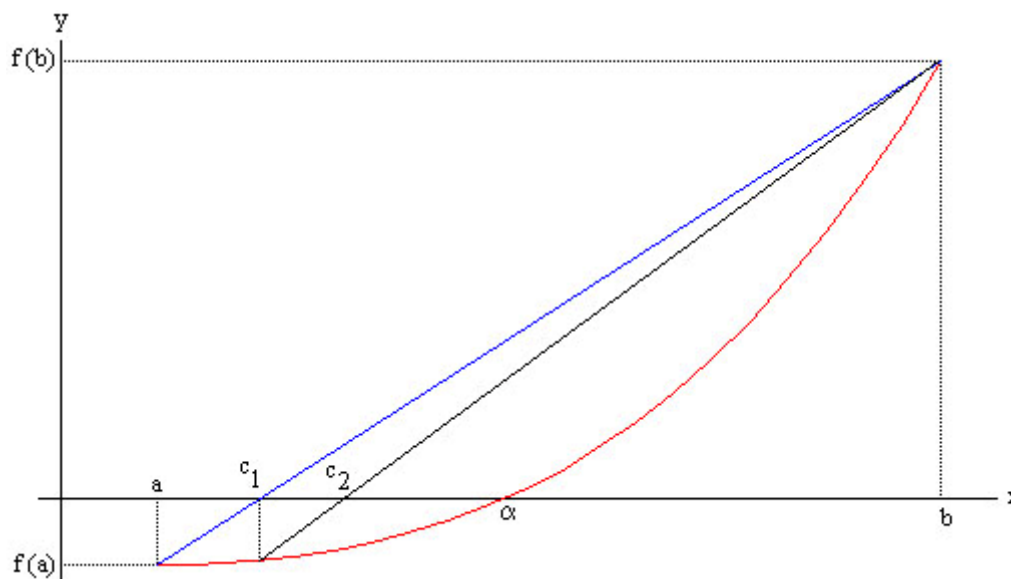
$$\frac{c_1 - a}{b - a} = \frac{-f(a)}{f(b) - f(a)} \text{ a odtud } c_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Pokud  $f(c_1) = 0$ , je  $\alpha = c_1$ . Pokud  $f(c_1) \neq 0$ , pokračuje metoda analogickým postupem dále.

V  $n$ -tém kroku určíme průsečík s osou  $x$  podle vztahu  $c_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f(b_{n-1}) - f(a_{n-1})}(b_{n-1} - a_{n-1})$ ; tento průsečík leží v intervalu  $(a_{n-1}; b_{n-1})$ . Jestliže  $b_{n-1} - a_{n-1} < \varepsilon$ , výpočet končí a platí  $\alpha = c_n$ . Jestliže  $b_{n-1} - a_{n-1} \geq \varepsilon$ , pak z předpokladu  $f(a_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0$  vyplývá, že platí jedna z následujících podmínek:

1.  $f(a_{n-1}) \cdot f(c_n) < 0$ ; v tom případě volíme  $a_n = a_{n-1}$  a  $b_n = c_n$ ;
2.  $f(c_n) \cdot f(b_{n-1}) < 0$ ; v tom případě volíme  $a_n = c_n$  a  $b_n = b_{n-1}$ ;
3.  $|f(c_n)| < \varepsilon$  (to je obecnější podmínka než  $f(c_n) = 0$ ) - výpočet končí a platí  $\alpha = c_n$ .

Důvody, proč je  $|f(c_n)| < \varepsilon$  obecnější podmínka než podmínka  $f(c_n) = 0$ , jsou popsány v odstavci 8.3.2.



obr. 94

Pokud na daném intervalu  $\langle a; b \rangle$  nebude měnit druhá derivace funkce  $f$  znaménko, určování krajních bodů nových intervalů se zjednoduší:

1. pokud  $f'(x) > 0$  a zároveň  $f''(x) < 0$  (resp.  $f'(x) < 0$  a zároveň  $f''(x) > 0$ ) pro všechna  $x \in (a; b)$ , pak platí  $a_i = a$  pro  $i = 1, 2, \dots, n$  a mění se jen pravý krajní bod intervalu;
2. pokud  $f'(x) > 0$  a zároveň  $f''(x) > 0$  (resp.  $f'(x) < 0$  a zároveň  $f''(x) < 0$ ) pro všechna  $x \in (a; b)$ , pak platí  $b_i = b$  pro  $i = 1, 2, \dots, n$  a mění se jen levý krajní bod intervalu.

### 8.3.4 Metoda tečen (Newtonova metoda)

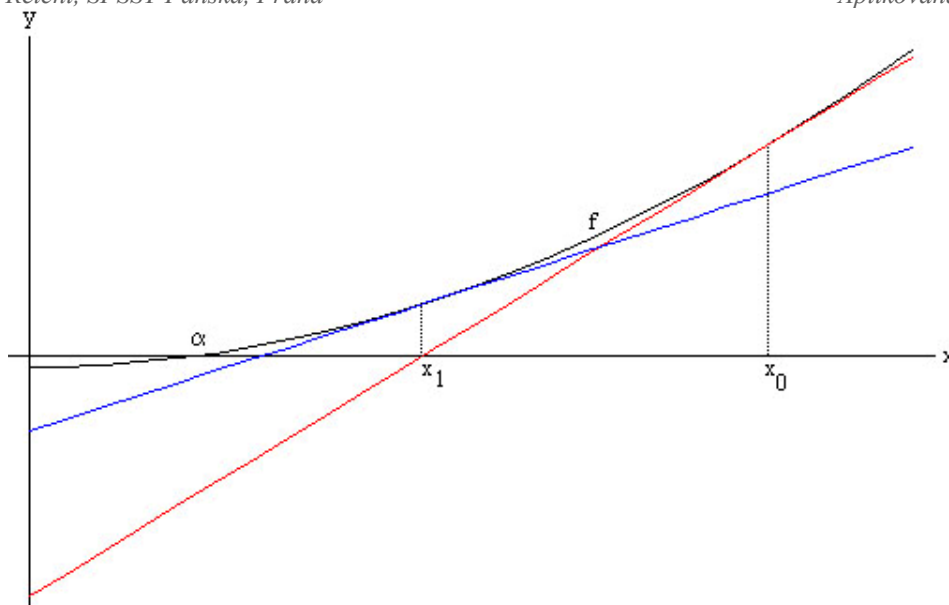
Metodu tečen publikoval v roce 1669 britský matematik a fyzik Isaac Newton (1642 - 1727). Tato metoda je limitním případem metody sečen (viz odstavce 8.3.3): místo sečny se využívá tečna sestavená ke grafu funkce  $f$  v určitém bodě. V dalším kroku se vypočítá průsečík této tečny s osou  $x$  kartézského systému souřadnic a v tomto bodě se sestrojí další tečna.

Nechť  $f$  je spojitá funkce na intervalu  $\langle a; b \rangle$  taková, že  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (tj. funkční hodnoty v krajních bodech intervalu mají opačná znaménka), a necht'  $\varepsilon > 0$ . Potom v intervalu  $(a; b)$  leží alespoň jedno číslo  $\alpha$  takové, že  $f(\alpha) = 0$ .

Tečnu ke grafu funkce  $f$  v bodě  $x_0$  lze popsat rovnicí ve směrniciovém tvaru  $y = kx + q$ , kde  $k = f'(x_0)$ . Po dosazení souřadnic bodu dotyku  $[x_0; f(x_0)]$  do této rovnice získáme rovnici  $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + q$  a odtud dostáváme  $q = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ . Rovnici tečny tedy lze psát ve tvaru  $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ . Pro průsečík  $x_1$  této tečny s osou  $x$  platí rovnice:

$$0 = f'(x_0) \cdot x_1 + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \text{ a tedy } x_1 = \frac{-f(x_0) + f'(x_0) \cdot x_0}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Poznámka: Tento vztah lze odvodit i ze vztahu pro bod  $c_n$  z metody sečen (viz odstavce 8.3.3).



obr. 95

V  $n$ -tém kroku určíme průsečík s osou  $x$ :  $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$  (viz obr. 95). Mohou nastat tyto případy:

1.  $|f(x_n)| < \varepsilon$  nebo  $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$  - výpočet končí a platí  $\alpha = x_n$ ;
2.  $|f(x_n)| \geq \varepsilon$  a zároveň  $|x_n - x_{n-1}| \geq \varepsilon$  - výpočet pokračuje dál.

Metoda tečen a metoda sečen se v rychlosti konvergence ke kořenu  $\alpha$  příliš neliší - konvergují obě poměrně rychle.

#### 8.4 Matematické zpracování naměřených dat

Při zpracování dat naměřených při určitém fyzikálním měření je v řadě případů nutné použít některou z dále uvedených metod:

1. aproximace - jedná se o metodu, jejímž výsledkem je křivka procházející co nejpřesněji body odpovídajícími naměřeným datům. Současně by takto nalezená křivka měla odpovídat i příslušné fyzikální teorii popisující provedený experiment a naměřená data. Touto metodou lze přitom najít křivku, která bude mít principiálně odlišné vlastnosti.
  - a) Křivka přesně prochází body odpovídajícím naměřeným datům - tento úkol je poměrně náročné splnit a použité metody mají své meze. Většinou se naměřená data prokládají polynommickými funkcemi; se zvyšováním jejich stupně sice klesá chyba mezi naměřenými daty a teoreticky dopočítanými hodnotami, ale současně se zvyšují nároky na počítačové zpracování takové úlohy. Proto se velmi často používá metoda, při které se naměřená data rozdělí na vhodné intervaly, na těchto intervalech se aproximují příslušnou křivkou a tyto křivky se pak vhodným způsobem k sobě spojí. Jedná se o tzv. **spline-křivky** (viz obr. 96). Detailně jsou spline-křivky popsány v odstavci 8.4.6.
  - b) Křivka neprochází přesně uvažovanými body - křivka co nejpřesněji aproximuje (nahrazuje) naměřená data, aby tato nespojitá data bylo možné popsat spojitou funkcí. Výpočetní algoritmy jsou jednodušší, než v části a), i když principiálně velmi podobné (viz obr. 97).

V tomto případě nemusí být přesnost nalezení polynomů tak vysoká, jako v případě přesného nahrazení naměřených dat.

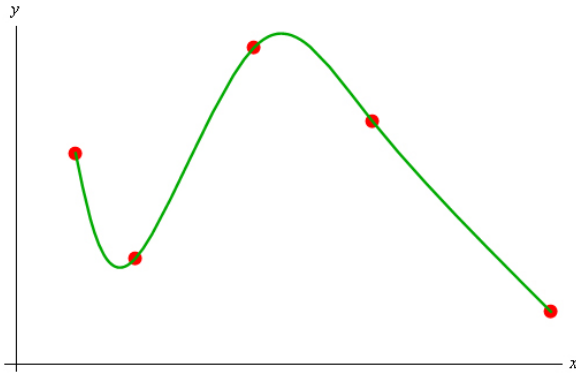
2. interpolace - jedná se o metodu, při které se na základě nespojitě naměřených dat hledá hodnota dané veličiny v bodě ležícím mezi již naměřenými body. Hledanou hodnotu je nutno nalézt na základě informací z naměřených dat.

Např. proměříme závislost elektrického napětí na rezistoru na procházejícím elektrickém proudu. Vlivem reostatu, kterým měníme procházející elektrický proud, můžeme hodnotu proudu měnit od 100 mA do 1000 mA po 100 mA. Z určitých důvodů ovšem potřebujeme znát hodnotu napětí v případě, že rezistorem prochází elektrický proud 350 mA. Proto je nutné na základě naměřených dat a příslušné fyzikální teorie najít hodnotu napětí i pro tento proud, který naměřit z technických důvodů nemůžeme.

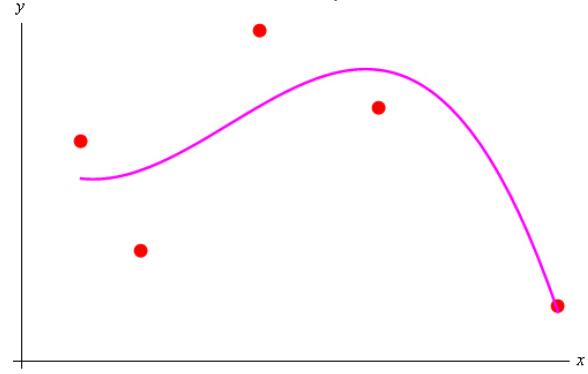
3. extrapolace - jedná se o metodu, pomocí které je možné na základě naměřených dat dopočítat souřadnice dalších bodů odpovídajících datům mimo proměřený interval.

Budeme-li uvažovat výše uvedené měření závislosti elektrického napětí na rezistoru na procházejícím proudu, můžeme pomocí extrapolace určit napětí na rezistoru např. pro elektrický proud 1,5 A. A to i přesto, že měření bylo provedeno pouze pro hodnoty elektrického proudu do 1 A.





obr. 96



obr. 97

Základní algoritmy aproximace, interpolace i extrapolace jsou velmi podobné. Tyto algoritmy se liší svojí přesností, mezemi platnosti, ...

Jednou z aproximačních metod je i lineární regrese (viz odstavec 8.4.1).

Kromě zpracování měření z různých experimentů se tyto metody používají také při zpracování fotografií nebo filmu. Pokud je nutné zmenšit nebo zvětšit rozlišení obrazu, mění se počet pixelů, které daná fotografie resp. snímek filmu obsahuje. Příslušný software tedy musí provést převzorkování dané fotografie resp. snímku filmového pásu tak, aby po změně rozlišení byl pokud možno obraz opět ostrý a neobsahoval artefakty obrazu.

### 8.4.1 Lineární regrese

Pojem lineární regrese se používá v matematice a aplikovaných vědách většinou pro dvě mírně odlišné metody:

1. Lineární regrese je aproximace daných bodů v grafu polynomelem prvního řádu (tj. lineární funkcí). Koeficienty této lineární funkce lze určit metodou nejmenších čtverců (viz dále).

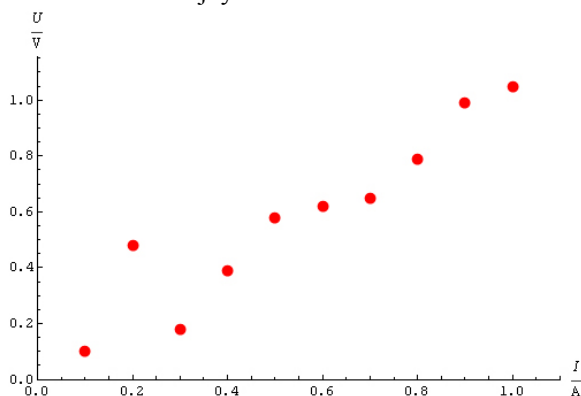
Jinými slovy to tedy znamená proložit danými body takovou přímkou, která dané body nejpřesněji nahrazuje. To znamená, že chyba mezi zadaným bodem a funkční hodnotou nalezené lineární funkce v tomto bodě musí být minimální.

2. V obecnějším případě může lineární regrese znamenat aproximaci zadaných bodů v grafu pomocí funkce, kterou lze vyjádřit jako lineární kombinaci jiných funkcí. Tyto dílčí funkce přitom nemusejí být už lineární.

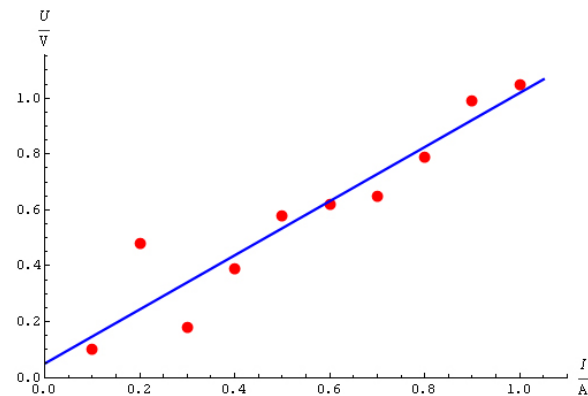
Typickým příkladem je závislost odporu rezistoru na teplotě. Pro malé teplotní rozdíly  $\Delta T$  platí lineární vztah  $R = R_0(1 + \alpha \cdot \Delta T)$ , kde  $R_0$  je počáteční hodnota odporu daného rezistoru,  $R$  je hodnota rezistoru po zvýšení jeho teploty o  $\Delta T$  a  $\alpha$  je součinitel teplotní závislosti odporu. Pro větší rozdíly teplot je uvedený vztah nedostatečně přesný, a tak se nahrazuje vztahem složitějším:  $R = R_0(1 + \alpha_1 \cdot \Delta T + \alpha_2 \cdot (\Delta T)^2 + \alpha_3 \cdot (\Delta T)^3 + \dots)$ .

Roznásobíme-li závorku v tomto vztahu dostaneme vztah  $R = R_0 + R_0\alpha_1 \cdot \Delta T + R_0\alpha_2 \cdot (\Delta T)^2 + R_0\alpha_3 \cdot (\Delta T)^3 + \dots$ , který představuje lineární kombinaci funkcí s proměnnými  $\Delta T$ ,  $(\Delta T)^2$ ,  $(\Delta T)^3$ , ...;  $R_0$  a jednotliví součinitelé teplotní závislosti odporu jsou pro daný rezistor konstantní.

V dalším textu se budeme zabývat pouze první metodou lineární regrese. Druhá metoda je principiálně velmi podobná, jen pracuje s nelineárními funkcemi. A proto se komplikuje samotný výpočet; jeho princip ovšem zůstává stejný.



obr. 98



obr. 99

Předpokládejme tedy, že máme naměřená určitá data - např. závislost elektrického napětí na rezistoru na elektrickém proudu, který tímto rezistorem prochází. Tato data můžeme zobrazit do grafu - viz obr. 98. Z příslušné teorie (Ohmův zákon pro část elektrického obvodu) vyplývá, že naměřená závislost by měla být lineární (pokud nebudeme uvažovat teplotní změnu odporu rezistoru resp. tento rezistor budeme během měření

chladit). Proto se budeme snažit aproximovat naměřená data lineární funkcí, jejímž grafem je přímka nahrazující optimálně naměřená data (viz obr. 99).

S lineárním průběhem naměřené závislosti se dále bude pracovat lépe, než s jednotlivými body. Navíc touto metodou lze potvrdit případně vyvrátit soulad teorie s reálným experimentem.

Zobrazené body jsou zvoleny záměrně tak, aby se od ideální lineární závislosti odchylovaly.

Nyní odvodíme na základě naměřených dat hodnoty koeficientů lineární funkce, kterou naměřená data budeme aproximovat. Použitá metoda se nazývá **metoda nejmenších čtverců**.

Předpokládejme, že máme naměřená data ve tvaru

$$[x_i; y_i], \quad (64)$$

kde  $i$  je z množiny čísel  $1, 2, \dots, n$ , přičemž  $n$  je počet měření, která jsme provedli.

Máme prostě  $n$  uspořádaných dvojic získaných na základě měření - např. výše uvedený příklad měření proudu a napětí v obvodu s rezistorem.

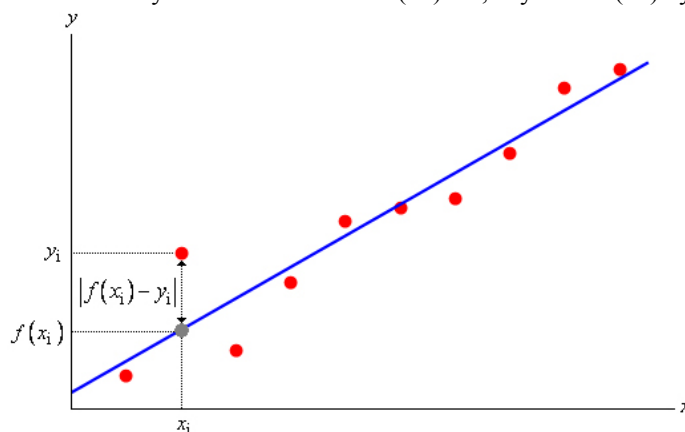
Tato data chceme aproximovat lineární funkcí  $f$  ve tvaru

$$f(x) = ax + b, \quad (65)$$

kde  $a$  a  $b$  jsou reálná čísla a navíc  $a \neq 0$ . Přitom chceme, aby chyba, které se při aproximaci dopustíme, byla co možná nejmenší. Jinými slovy to znamená, aby odchylka naměřené hodnoty  $y_i$  od teoreticky dopočítané funkční hodnoty  $f(x_i)$  lineární závislosti popsané vztahem (65) byla pro všechna přípustná  $i$  minimální. Budeme uvažovat absolutní odchylku, tj. bez ohledu na to, zda je pro danou hodnotu  $x_i$  větší naměřená hodnota  $y_i$  nebo funkční hodnota  $f(x_i)$  hledané aproximace. Budeme chtít tedy minimalizovat výraz  $|f(x_i) - y_i|$ . Pro jeden vybraný bod je tento rozdíl vyznačen v grafu na obr. 100. Analogickou úvahu můžeme provést pro všechny naměřené a v grafu zobrazené body, a proto bychom měli uvažovat součet výrazů  $|f(x_i) - y_i|$  pro všechny přípustné hodnoty  $i$ , tj. součet

$$S = |f(x_1) - y_1| + |f(x_2) - y_2| + \dots + |f(x_n) - y_n|. \quad (66)$$

Přitom chceme určit koeficienty  $a$  a  $b$  lineární funkce (65) tak, aby součet (66) byl minimální.



obr. 100

Pro zvýšení přesnosti nalezené aproximační lineární funkce ve tvaru (65) se místo součtu ve tvaru (66) uvažuje součet druhých mocnin popsanych odchylek, tj. součet ve tvaru

$$S = (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + \dots + (f(x_n) - y_n)^2. \quad (67)$$

Jedná se součet druhých mocnin odchylek, tj. „čtverců“ odchylek. Proto se tato metoda nazývá metoda nejmenších čtverců.

Dosazením předpisu lineární funkce (65) do součtu (67) získáme funkci  $S$  závislou na dvou proměnných  $a$  a  $b$  (koeficienty lineární funkce (65)), ve tvaru

$$S(a, b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2. \quad (68)$$

Funkce (68) má mít minimální hodnotu, čehož docílíme vhodnou volbou koeficientů  $a$  a  $b$ .

Naměřená data (64) jsou pevně dána, jediné, co se může ve vztahu (68) měnit, jsou právě koeficienty  $a$  a  $b$ , které určující lineární funkci (65), která nejlépe vystihuje (aproximuje) naměřená data.

Hledáme-li extrémní hodnotu funkce (68) (v našem případě hledáme minimum), je nutné určit první derivaci dané funkce. Funkce (68) je funkcí dvou proměnných, proto budeme určovat parciální derivace této funkce podle každé proměnné zvlášť.

Parciální derivace se řídí stejnými pravidly jako „normální“ derivace. Rozdíl je pouze v tom, že proměnné, podle nichž právě nederivujeme, považujeme za konstantní.

Derivací funkce (68) podle proměnné  $a$  získáme

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} = 2(ax_1 + b - y_1)x_1 + 2(ax_2 + b - y_2)x_2 + \dots + 2(ax_n + b - y_n)x_n \quad (69)$$

a derivací téže funkce podle proměnné  $b$  dostaneme

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = 2(ax_1 + b - y_1) + 2(ax_2 + b - y_2) + \dots + 2(ax_n + b - y_n). \quad (70)$$

Hledáme-li extrém funkce (68), musí být obě parciální derivace (69) a (70) nulové. To znamená, že musí platit

$$2(ax_1 + b - y_1)x_1 + 2(ax_2 + b - y_2)x_2 + \dots + 2(ax_n + b - y_n)x_n = 0 \quad (71)$$

a

$$2(ax_1 + b - y_1) + 2(ax_2 + b - y_2) + \dots + 2(ax_n + b - y_n) = 0. \quad (72)$$

Rovnici (71) nyní postupně upravíme. Vydělením číslem dva a roznásobením závorek dostaneme rovnici  $ax_1^2 + bx_1 - y_1x_1 + ax_2^2 + bx_2 - y_2x_2 + \dots + ax_n^2 + bx_n - y_nx_n = 0$ , v níž můžeme z příslušných členů vytknout koeficient  $a$  i  $b$ , čímž dostaneme rovnici ve tvaru

$$a(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - y_1x_1 - y_2x_2 - \dots - y_nx_n = 0. \quad (73)$$

Podobným způsobem upravíme i rovnici (72). Vydělíme jí číslem dva a dostaneme rovnici ve tvaru  $ax_1 + b - y_1 + ax_2 + b - y_2 + \dots + ax_n + b - y_n = 0$ . Nyní vytkneme z příslušných členů koeficient  $a$  a získáme rovnici ve tvaru

$$a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + nb - y_1 - y_2 - \dots - y_n = 0. \quad (74)$$

Rovnice (73) a (74) jsou dvě lineární rovnice pro dvě neznámé  $a$  a  $b$ . S využitím maticového počtu lze dokázat, že tato soustava má pro všechna  $n \geq 2$  právě jedno řešení, což znamená, že aproximační lineární funkce (65) je určena jednoznačně. Soustavu rovnic (73) a (74) vyřešíme dosazovací metodou: z rovnice (74) vyjádříme koeficient  $b$  ve tvaru

$$b = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n - a(x_1 + x_2 + \dots + x_n)) \quad (75)$$

a dosadíme jej do rovnice (73). Dostaneme rovnici ve tvaru

$$a(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n - a(x_1 + x_2 + \dots + x_n))(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - y_1x_1 - y_2x_2 - \dots - y_nx_n = 0,$$

kteřou lze upravit na tvar

$$na(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - a(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = n(y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n).$$

Vytknutím koeficientu  $a$  dostaneme rovnici ve tvaru

$$a(n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = n(y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n),$$

odkud můžeme vyjádřit koeficient  $a$  ve tvaru

$$a = \frac{n(y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n) - (y_1 + y_2 + \dots + y_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}. \quad (76)$$

Dosazením výrazu (76) do výrazu (75) určíme koeficient  $b$  a vyjádříme ho pouze na základě naměřených dat. Tímto dosazením dostaneme výraz ve tvaru

$$b = \frac{1}{n} \left( y_1 + y_2 + \dots + y_n - \frac{n(y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n) - (y_1 + y_2 + \dots + y_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \right),$$

který dále upravíme do tvaru

$$b = \frac{1}{n} \left( y_1 + y_2 + \dots + y_n - \frac{n(y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (y_1 + y_2 + \dots + y_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2} \right).$$

Nyní převedeme zlomky uvnitř závorky na společného jmenovatele. Touto úpravou, která je na první pohled nepřehledná, se výraz nakonec zjednoduší

$$b = \frac{1}{n} \left( \frac{n(y_1 + y_2 + \dots + y_n)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - (y_1 + y_2 + \dots + y_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2} \right)$$

$$\left. \frac{n(y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (y_1 + y_2 + \dots + y_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2} \right\} \text{ Další úpravou}$$

tedy dostaneme výraz ve tvaru

$$b = \frac{1}{n} \frac{n(y_1 + y_2 + \dots + y_n)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n(y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}. \quad \text{Po zkrácení}$$

dostaneme výslednou podobu vztahu

$$b = \frac{(y_1 + y_2 + \dots + y_n)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - (y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}. \quad (77)$$

Dosazením vztahů (76) a (77) do předpisu lineární funkce (65) získáme hledaný předpis aproximační funkce.

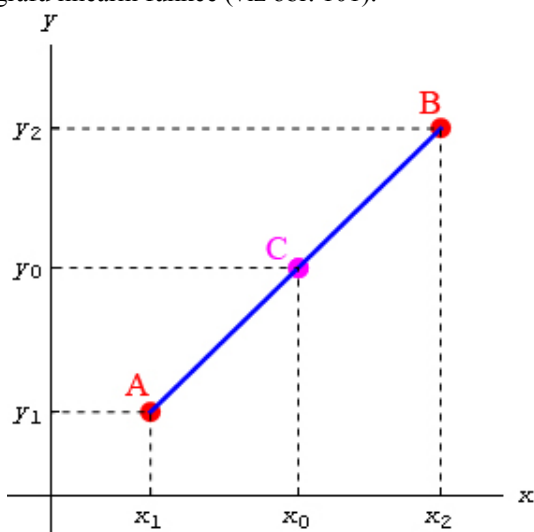
Metodu nejmenších čtverců lze použít i v případě, že aproximační funkce nebude lineární, ale bude dána např. polynomicou funkcí, goniometrickou funkcí, ... Výpočet derivací funkce i následné řešení rovnic bude složitější, ale princip metody zůstane stejný.

### 8.4.2 Lineární interpolace

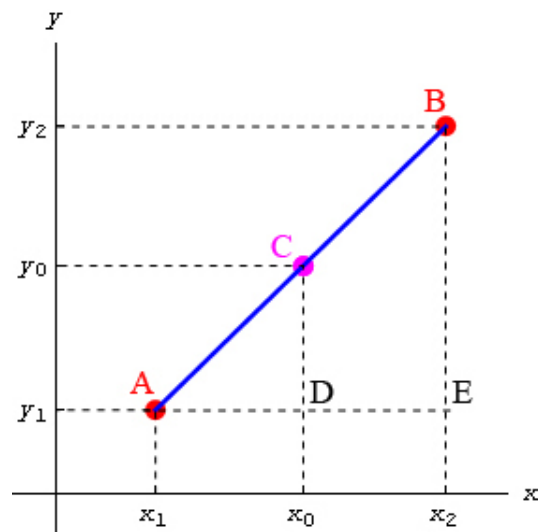
Metoda lineární interpolace je nejjednodušší interpolační metodou, proto základy interpolace vysvětlíme právě na této metodě. Lineární interpolace na základě souřadnic dvou bodů zobrazených v kartézském systému souřadnic určuje souřadnici  $y$  třetího bodu, jehož souřadnice  $x$  leží mezi  $x$ -ovými souřadnicemi zadaných bodů; souřadnici třetího bodu je přitom nutné určit tak, aby všechny tři body ležely na téže přímce.

Interpolace se nazývá lineární právě proto, že zadané body mají ležet na přímce, tj. na grafu lineární funkce.

Mějme tedy dány navzájem různé body  $A = [x_1; y_1]$  a  $B = [x_2; y_2]$ . U bodu  $C$  známe pouze jeho souřadnici  $x_0$ ; souřadnici  $y_0$  chceme určit na základě podmínky, že body  $A$ ,  $B$  a  $C$  leží na přímce, tj. leží na grafu lineární funkce (viz obr. 101).



obr. 101



obr. 102

Např. s využitím podobnosti trojúhelníků  $ADC$  a  $AEB$  zobrazených na obr. 102 můžeme odvodit rovnost poměrů ve tvaru

$$\frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (78)$$

Ve vztahu (78) jsou zlomky, a proto bychom měli být opatrní vzhledem k jejich definičnímu oboru. Je nutné si ale uvědomit, že z praktického využití lineární interpolace vyplývá platnost vztahu ve všech přípustných případech. Abychom totiž mohli sestavit rovnici přímky, musíme mít dány dva navzájem různé body (tj. musí platit  $x_1 \neq x_2$  nebo  $y_1 \neq y_2$ ). Pokud by platilo  $x_1 = x_2$ , zadané body nedefinují funkci. Pokud by platilo  $y_1 = y_2$ , leží zadané body na grafu konstantní funkce a interpolace je tedy velmi jednoduchá, a proto se vztah (78) používat nebude.

Vztah (78) je možné také odvodit na základě úvah o směrnici přímky  $AB$  a skutečnosti, že na této přímce má ležet také bod  $C$ .

Ze vztahu (78) můžeme nyní vyjádřit  $y_0$ . Postupně dostaneme  $y_0 - y_1 = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1)$  a odtud již máme vztah

$$y_0 = (x_0 - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + y_1, \quad (79)$$

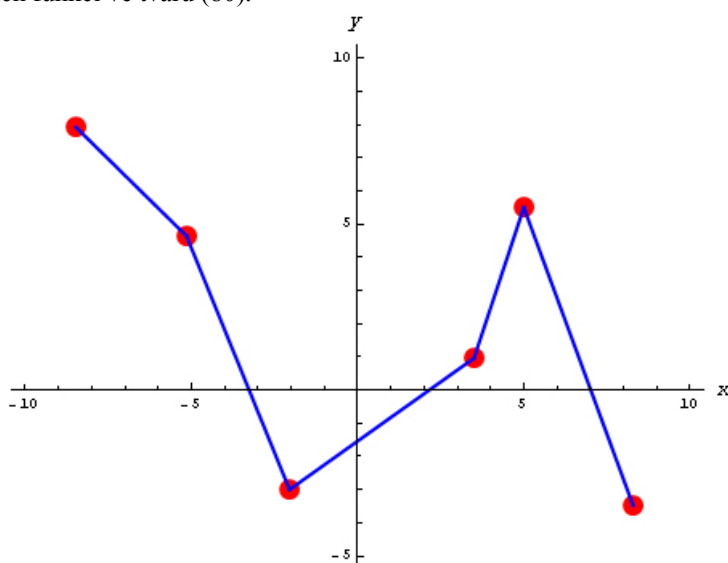
resp.

$$y = (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + y_1, \quad (80)$$

který platí pro libovolnou souřadnici  $x$  bodu, jehož  $y$ -ovou souřadnici chceme vypočítat.

Na vztah (80) lze nahlížet také tak, že podíl  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  určuje směrnici přímky  $AB$ . Činitel  $x - x_1$  pak určuje posun grafu přímky  $AB$  po ose  $x$ , zatímco člen  $y_1$  určuje posun tohoto grafu po ose  $y$ .

Výše popsanou metodu je možné použít i pro případ tzv. po částech lineární funkce (viz obr. 103). Jedná se o případ, kdy výslednou funkci, jejímž grafem je lomená čára, lze na jednotlivých intervalech nahradit lineárními funkcemi. Pro  $n$  bodů získáme  $n - 1$  intervalů, na které aplikujeme výše uvedený postup, a odvodíme  $n - 1$  předpisů lineárních funkcí ve tvaru (80).



obr. 103

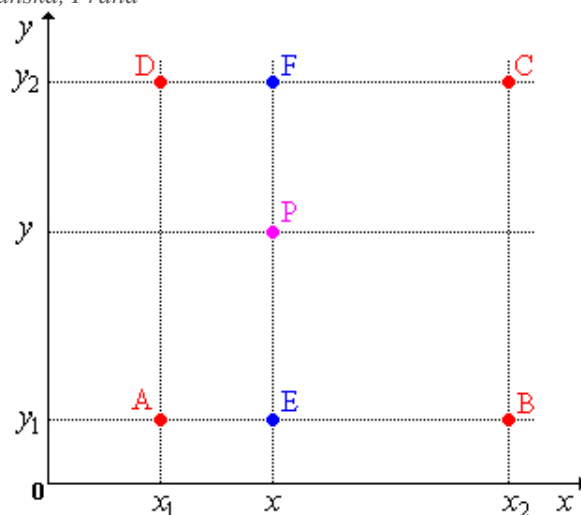
### 8.4.3 Bilineární interpolace

Bilineární interpolace je rozšíření lineární interpolace (viz odstavec 8.4.2) pro funkce dvou proměnných. Na základě naměřených dat (tentokrát se jedná o uspořádané trojice hodnot) je možné získat funkční hodnotu v bodě, ve kterém nebylo možné hodnoty naměřit přímo.

Funkci více proměnných si lze představit např. jako plastickou mapu nějakého pohoří. Dvěmi nezávislými proměnnými jsou v tomto případě zeměpisná délka a zeměpisná šířka - ty jsou definované v rovině. A každému bodu v rovině (tj. každému bodu popsanému zeměpisnou délkou a zeměpisnou šířkou) odpovídá nadmořská výška tohoto bodu. A to je právě funkční hodnota v daném bodě. Na základě nadmořských výšek ve všech bodech daného pohoří (tj. na základě všech funkčních hodnot) získáme onu plastickou mapu (tj. získáme graf dané funkce). Grafem funkce dvou proměnných je tedy zvlněná plocha, která připomíná právě plastické mapy krajiny, „létající vlnící se kobereček“, ...

Základní myšlenka bilineární interpolace je jednoduchá: je nutné provést lineární interpolaci v obou směrech - tj. ve směru osy  $x$  i ve směru osy  $y$ .

Předpokládejme, že chceme určit hodnotu funkce  $f$  v bodě  $P = [x; y]$  na základě znalostí funkčních hodnot dané funkce v navzájem různých bodech  $A = [x_1; y_1]$ ,  $B = [x_2; y_1]$ ,  $C = [x_2; y_2]$  a  $D = [x_1; y_2]$  (viz obr. 104). Nejdříve provedeme lineární interpolaci ve směru osy  $x$ , tj. najdeme funkční hodnoty funkce  $f$  v bodech  $E$  a  $F$  a poté najdeme funkční hodnotu funkce  $f$  v bodě  $P$ .



obr. 104

Vztah (80) můžeme psát ve tvaru  $y = (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + y_1 = \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$ . Po roznásobení činitelů v závorkách získáme tvar  $y = \frac{xy_2 - xy_1 - x_1y_2 + x_1y_1 + x_2y_1 - x_1y_1}{x_2 - x_1}$ . Po úpravě v čitateli dostaneme výraz ve tvaru  $y = \frac{xy_2 - xy_1 - x_1y_2 + x_2y_1}{x_2 - x_1}$ , odkud vytknutím získáme výraz ve tvaru

$$y = \frac{y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (81)$$

Výraz (81) nyní použijeme postupně pro nalezení funkčních hodnot funkce  $f$  v bodech  $E$  a  $F$ . Můžeme tedy psát:

$$f(E) = \frac{(x_2 - x) \cdot f(A) + (x - x_1) \cdot f(B)}{x_2 - x_1} \quad (82)$$

a

$$f(F) = \frac{(x_2 - x) \cdot f(D) + (x - x_1) \cdot f(C)}{x_2 - x_1}. \quad (83)$$

S využitím vztahu (81) můžeme nyní určit funkční hodnotu funkce  $f$  v bodě  $P$ . Stačí, když si uvědomíme, že funkční hodnotu v bodě  $P$  hledáme velmi analogicky jako např. funkční hodnotu v bodě  $E$ . Odlišnost spočívá pouze v tom, že nyní budou důležité  $y$ -ové souřadnice bodů  $E$ ,  $P$  a  $F$ . Můžeme tedy psát

$$f(P) = \frac{(y_2 - y) \cdot f(E) + (y - y_1) \cdot f(F)}{y_2 - y_1}. \quad (84)$$

Dosadíme-li ze vztahů (82) a (83) do vztahu (84) získáme pro funkční hodnotu v bodě  $P$  výraz  $f(P) = \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} \cdot \frac{(x_2 - x) \cdot f(A) + (x - x_1) \cdot f(B)}{x_2 - x_1} + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \cdot \frac{(x_2 - x) \cdot f(D) + (x - x_1) \cdot f(C)}{x_2 - x_1}$ . Po úpravě dostaneme vztah

$$f(P) = \frac{(y_2 - y) \cdot (x_2 - x)}{(y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1)} \cdot f(A) + \frac{(y_2 - y) \cdot (x - x_1)}{(y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1)} \cdot f(B) + \frac{(y - y_1) \cdot (x_2 - x)}{(y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1)} \cdot f(D) + \frac{(y - y_1) \cdot (x - x_1)}{(y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1)} \cdot f(C). \quad (85)$$

Vztah (85) tedy udává funkční hodnotu funkce  $f$  v libovolném bodě  $P$ , přičemž funkční hodnota  $f(P)$  je určena na základě funkčních hodnot a souřadnic bodů  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$ . Ze vztahu (85) je zřejmé, že tato interpolace není lineární, ač se tak nazývá. Název vychází ze skutečnosti, že interpolace je lineární podél jedné osy kartézského systému souřadnic - podél osy  $x$  i podél osy  $y$ ; jako celek ale tato interpolace lineární není.

Skutečnost, že interpolace není lineární vyplývá z toho, že v předpisu interpolačního vztahu jsou členy obsahující součin „ $x$  krát  $y$ “.

Vztah (85) se zjednoduší, pokud budeme uvažovat funkci  $f$  danou čtyřmi body  $A_0 = [0; 0]$ ,  $B_0 = [1; 0]$ ,  $C_0 = [1; 1]$  a  $D_0 = [0; 1]$ ; tyto body tedy tvoří vrcholy jednotkového čtverce. V tom případě lze vztah (85) psát ve tvaru

$$f(P) = \frac{(1-y) \cdot (1-x)}{(1-0) \cdot (1-0)} \cdot f(A_0) + \frac{(1-y) \cdot (x-0)}{(1-0) \cdot (1-0)} \cdot f(B_0) + \frac{(y-0) \cdot (1-x)}{(1-0) \cdot (1-0)} \cdot f(D_0) + \frac{(y-0) \cdot (x-0)}{(1-0) \cdot (1-0)} \cdot f(C_0).$$

Po úpravě pak dostáváme vztah

$$f(P) = (1-x)(1-y) \cdot f(A_0) + x(1-y) \cdot f(B_0) + (1-x)y \cdot f(D_0) + x \cdot y \cdot f(C_0). \quad (86)$$

Funkce definovaná na jednotkovém čtverci se v praxi občas používá právě proto, že výsledný vztah pro funkční hodnotu v libovolném vnitřním bodě tohoto čtverce (tj. vztah (86)) je jednodušší, než obecný vztah (85).

Funkce definovaná na jednotkovém čtverci se používá např. i při použití bilineární aproximace při převzorkování obrazu (jeho zmenšení nebo zvětšení).

Vztah (86) lze vyjádřit také pomocí maticového zápisu ve tvaru

$$f(P) = \begin{pmatrix} 1-x & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(A_0) & f(D_0) \\ f(B_0) & f(C_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-y \\ y \end{pmatrix}. \quad (87)$$

Výsledek bilineární interpolace je nezávislý na pořadí, ve kterém jednotlivé interpolace provedeme.

#### 8.4.4 Polynomická aproximace

V případě polynomické interpolace, která se v praxi také velmi často používá, je nutné uvažovat  $n+1$  navzájem různých bodů  $A_0 = [x_0; y_0]$ ,  $A_1 = [x_1; y_1]$ ,  $A_2 = [x_2; y_2]$ , ...,  $A_n = [x_n; y_n]$  definovaných v rovině. Tyto body budeme chtít proložit polynomickou funkcí  $f$  definovanou předpisem

$$f: y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \quad (88)$$

Pokud budeme chtít uvažované body  $A_0$ ,  $A_1$  až  $A_n$  přesně proložit polynomickou funkcí  $f$  danou předpisem (88) je nutné si uvědomit, že každý z uvažovaných bodů musí ležet na grafu funkce  $f$ . To znamená, že souřadnice všech zadaných bodů musí splňovat tyto vztahy

$$\begin{aligned} y_0 &= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 \\ y_1 &= a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 \\ &\dots \\ y_n &= a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0. \end{aligned} \quad (89)$$

Souřadnice každého bodu dosadíme prostě do předpisu uvažované funkce.

Vztahy (89) určují soustavu  $n+1$  lineárních rovnic o  $n+1$  neznámých; neznámými jsou přitom koeficienty  $a_0$ ,  $a_1$  až  $a_n$ , které charakterizují danou polynomickou funkcí. Tato soustava rovnic je tedy snadno řešitelná některou z běžných metod řešení soustavy lineárních rovnic (např. Gaussova eliminační metoda - viz odstavec 2.3.2).

Soustava je lineární proto, že neznámé (tj. koeficienty polynomické funkce  $f$ ) jsou ve všech rovnicích obsaženy v první mocnině.

Po vyřešení soustavy rovnic (89), tj. po nalezení hodnot koeficientů  $a_0$ ,  $a_1$  až  $a_n$ , dosadíme tyto koeficienty do předpisu funkce (88). Pak již můžeme sestrojít graf této funkce, provádět interpolaci (tj. dopočítávat souřadnice dalších bodů, které nebyly ve výčtu původních  $n+1$  zadaných bodů), ...

Z hlediska matematiky polynomická funkce daná předpisem (88) existuje vždy a je jediná taková, která přesně prochází danými (navzájem různými) body.

S rostoucím počtem daných bodů  $A_0$ ,  $A_1$  až  $A_n$  roste stupeň polynomu, kterým budeme dané body prokládat, a také náročnost řešení soustavy (89). Nicméně oba tyto faktory nejsou v současné době pro počítače zásadním způsobem limitující.

#### 8.4.5 Lagrangeovy polynomy

Metoda využívající Lagrangeovy polynomy je další z metod, která slouží pro proložení zadaných bodů polynomickou funkcí, jejíž stupeň je o jedna nižší, než je počet zadaných bodů.

Pro snadnější pochopení konstrukce Lagrangeových polynomů uvedeme postupně tři situace.

Začneme se dvěma zadanými body, které budeme aproximovat polynomickou funkcí prvního stupně, tj. přímkou. Uvažujme zadané dva různé body  $A_1 = [x_1; y_1]$  a  $A_2 = [x_2; y_2]$ . Polynomická funkce  $f_1$  prvního stupně bude mít předpis

$$f_1: y = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} y_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} y_2. \quad (90)$$

Lze poměrně snadno dokázat, že předpisem (90) definovaná funkce prochází zadanými body  $A_1$  a  $A_2$ .

Platí totiž  $f_1(x_1) = \frac{x_1-x_2}{x_1-x_2} y_1 + \frac{x_1-x_1}{x_2-x_1} y_2 = y_1$  a  $f_1(x_2) = \frac{x_2-x_2}{x_1-x_2} y_1 + \frac{x_2-x_1}{x_2-x_1} y_2 = y_2$ .

Budou-li dány tři navzájem různé body  $A_1 = [x_1; y_1]$ ,  $A_2 = [x_2; y_2]$  a  $A_3 = [x_3; y_3]$ , bude polynomická funkce  $f_2$  druhého stupně a její předpis bude mít tvar

$$f_2 : y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3. \quad (91)$$

I v tomto případě lze snadno dokázat, že funkce  $f_2$  prochází zadanými body.

Postupným dosazením  $x$ -ových souřadnic za proměnnou  $x$  v předpisu funkce se postupně vždy vynulují čitatelé všech zlomků kromě jednoho.

V případě, že bude zadáno  $n+1$  navzájem různých bodů  $A_1 = [x_1; y_1]$ ,  $A_2 = [x_2; y_2]$  až  $A_{n+1} = [x_{n+1}; y_{n+1}]$ , bude mít polynomická funkce  $f_n$  předpis

$$f_n : y = \frac{(x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot \dots \cdot (x-x_{n+1})}{(x_1-x_2) \cdot (x_1-x_3) \cdot \dots \cdot (x_1-x_{n+1})}y_1 + \quad (92)$$

$$+ \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_3) \cdot \dots \cdot (x-x_{n+1})}{(x_2-x_1) \cdot (x_2-x_3) \cdot \dots \cdot (x_2-x_{n+1})}y_2 +$$

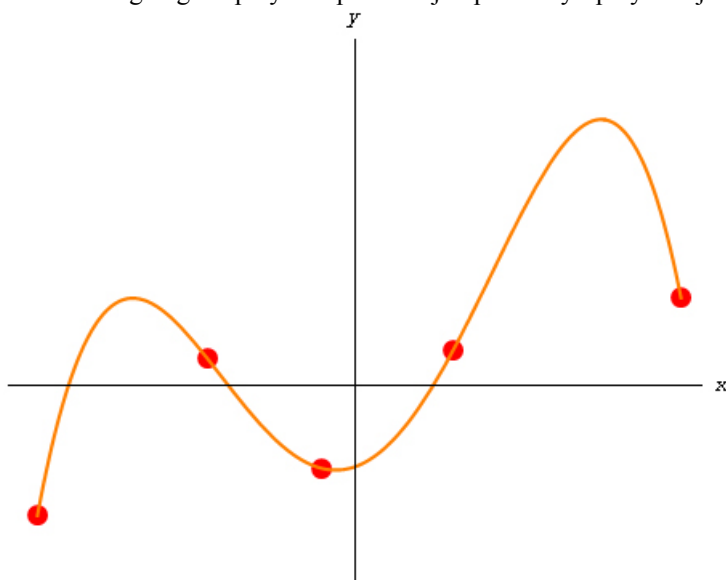
$$+ \dots + \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_3) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1) \cdot (x_{n+1}-x_3) \cdot \dots \cdot (x_{n+1}-x_n)}y_{n+1}$$

Definice Lagrangeova polynomu, ač vypadá na první pohled komplikovaně, je relativně jednoduchá. Je to součet vždy tolika členů, kolik je zadaných bodů a výsledkem je polynom, který má stupeň o jednu nižší. Každý člen je tvořen zlomkem. V čitateli je vždy součin činitelů ve tvaru  $(x-x_i)$ , kde za  $i$  postupně dosazujeme přirozená čísla od jedné do čísla udávajícího počet bodů. Ale pozor! Vynecháme činitel odpovídající tomu zadanému bodu, kolikátý člen řady právě píšeme. Tj. v prvním členu Lagrangeova polynomu bude chybět ve jmenovateli činitel  $(x-x_1)$ , ve druhém bude chybět činitel  $(x-x_2)$ , ...

Jmenovatelé uvedených zlomků mají také jednotný tvar. Jsou dány součinem činitelů ve tvaru  $(x_{\text{aktuální bod}} - x_{\text{ostatní body vyjma aktuálního}})$ . Každý z uvažovaných zlomků je postupně násoben  $y$ -ovou souřadnicí příslušného zadaného bodu.

Také v tomto případě lze snadno dokázat, že funkce daná předpisem (92) prochází zadanými body.

Na obr. 105 je zobrazen Lagrangeův polynom procházející pěti body - polynom je tedy čtvrtého stupně.



obr. 105

### 8.4.6 Spline-křivky

Spline-křivky jsou v matematice a aplikačních předmětech obecně velmi často používané křivky. Pomocí nich je možné matematicky popsat řadu závislostí, které jsou jinak velmi obtížně popsatelné. Analogicky je možné pak tyto křivky využít i k popisu ploch, které se používají také v řadě aplikací (design, návrhy střech, návrhy karosérií automobilů, ...).

Jako jistý druh spline-křivky je možné chápat i interpolaci resp. aproximaci pomocí polynomické funkce (viz odstavec 8.4.4). Častěji se ale pod názvem spline-křivky chápe aproximace (nebo interpolace) taková, kdy jsou jednotlivé zadané body nahrazovány spojitou křivkou po částech. To znamená, že výsledná křivka aproximující zadané body je složena z několika křivek (typicky vždy každé dva navzájem sousedící body spojuje



jedna spline-křivka) tak, aby tato výsledná křivka byla spojitá, měla spojitě první derivace a spojitě druhé derivace.

Hledáme tedy takovou křivku, která je „poslepována“ z více křivek, které spojují vždy dva vedle sebe ležící body. Při „slepování“ křivek musí vzniknout křivka, která má „hezké“ matematické vlastnosti: je nakreslitelná jedním tahem (tj. je spojitá) a nemá nikde v grafu žádný zlom (tj. má spojitě první a druhé parciální derivace).

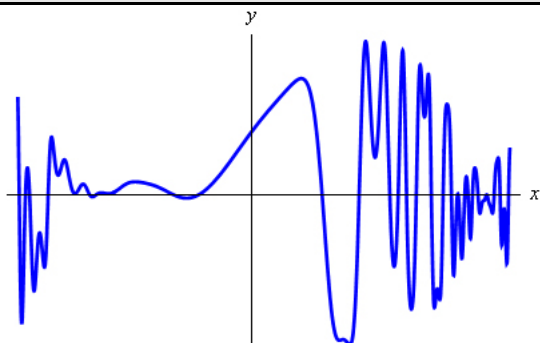
Spline-křivky jsou většinou tvořeny polynomickými funkcemi třetího stupně. Tento stupeň polynomických funkcí se používá z několika důvodů:

1. Je to polynomická funkce nejmenšího stupně, která má inflexní body. Tato vlastnost umožňuje konstruovat zajímavé funkce z hlediska střídání monotonie funkce, z hlediska konvexnosti a konkávnosti, ...

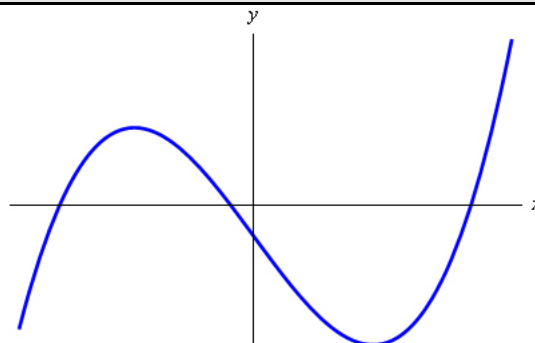
Můžeme tedy vytvořit zajímavě vypadající křivku.

2. Je to polynomická funkce, která má z hlediska matematiky a výpočetních nároků na její nalezení vhodné vlastnosti: určit koeficienty polynomické funkce třetího stupně je snadné, protože graf této funkce nekontrolovatelně neosciluje (viz obr. 106), ale má rozumný průběh (viz obr. 107).

S takovou funkcí se tedy i numericky velmi dobře pracuje, výpočetní metody (metoda hledání kořene, přibližné řešení rovnic, ...) „neutíkají do nekonečna“, ...



obr. 106



obr. 107

Uvažujme nyní  $n + 1$  navzájem různých bodů  $A_1 = [x_1; y_1]$ ,  $A_2 = [x_2; y_2]$ , ...,  $A_n = [x_n; y_n]$  až  $A_{n+1} = [x_{n+1}; y_{n+1}]$  definovaných v rovině. Tyto body budeme chtít aproximovat spline-křivkami definovanými pomocí polynomických funkcí třetího stupně. Máme tedy:

1.  $n + 1$  navzájem různých bodů  $A_i = [x_i; y_i]$  pro  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ ;
2.  $n$  intervalů určených zadanými body, tj. intervaly  $\langle x_i; x_{i+1} \rangle$ , kde  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  pro  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
3.  $n$  polynomických funkcí třetího stupně  $f_i$  pro  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
4.  $n - 1$  vnitřních bodů  $A_i = [x_i; y_i]$  pro  $i = 2, 3, \dots, n$ .

Předpisy uvažovaných polynomických funkcí jsou tyto:

$$f_i : y = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad (93)$$

kde  $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$  a  $a_i \neq 0$  pro všechna  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Pro nalezení všech  $4n$  koeficientů polynomických funkcí daných předpisem (93) je proto nutné sestavit  $4n$  rovnic, na základě kterých koeficienty nalezneme.

V každé funkci dané předpisem (93) jsou čtyři neznámé ( $a, b, c$  a  $d$ ) a těchto funkcí je celkem  $n$ . Proto je celkem  $4n$  neznámých.

Podmínky, na základě kterých sestavíme příslušné rovnice, jsou tyto:

1. Výsledná funkce daná složením všech dílčích spline-křivek musí být ve všech zadaných bodech spojitá. V žádném ze zadaných bodů nesmí nastat situace zobrazená na obr. 108, ale pouze situace zobrazená na obr. 109.

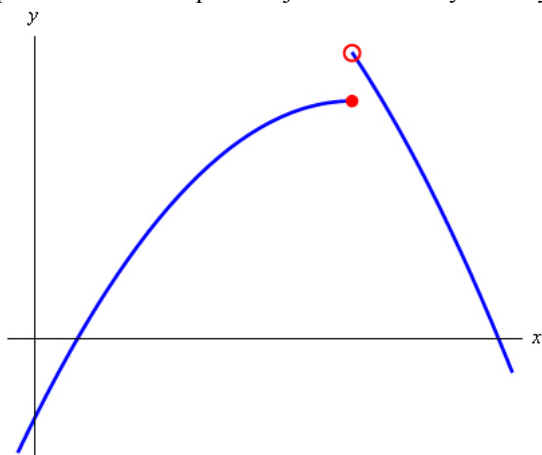
Situace zobrazená na obr. 109 není ideální, protože nejsou splněny další nutné podmínky. Na obr. 108 a obr. 109 jsou pouze zobrazeny dvě různé situace týkající se nespojitosti funkce v daném bodě.

To znamená, že funkční hodnoty funkcí daných předpisem (93) na dvou po sobě jdoucích intervalech musejí být v hraničním bodě obou intervalů stejné a navíc tyto funkce musejí procházet zadanými body, tj. musí platit

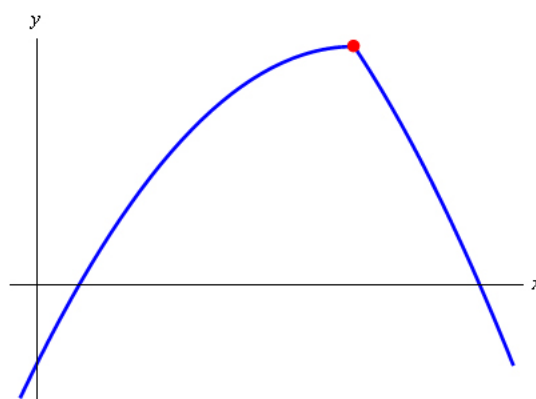
$$f_i(x_i) = y_i \text{ a } f_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad (94)$$

pro  $i = 1, 2, \dots, n$ . Těchto rovnic je tedy  $2n$ .

Rovnice (94) udávají podmínky pro to, aby každá ze spline-křivek, které jsou dány předpisem (93), procházela dvěma po sobě jdoucími zadanými body. Tyto podmínky zaručují, že výsledná funkce bude spojitá.



obr. 108



obr. 109

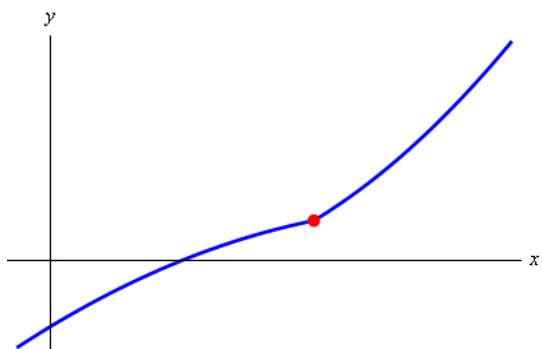
2. Dílčí funkce, které se spojují v zadaných bodech, musejí mít v zadaných bodech stejnou první derivaci. Jinými slovy to znamená, v každém zadaném bodě lze sestrojít tečnu k výsledné funkci. Platností vztahů (94) je zaručeno, že výsledná funkce je spojitá, proto by tečnu nebylo možné sestrojít pouze v případě, že by dílčí funkce měly ve vybraném zadaném bodě různou hodnotu první derivace. Tuto situaci dokumentují grafy zobrazené na obr. 110 a obr. 111. Na obr. 110 je zobrazen graf funkce, která je ve vyznačeném bodě spojitá, ale nemá v něm stejné první derivace z levé a z pravé strany. Takový případ nemůže pro spline-křivky nastat. Na obr. 111 je zobrazen graf funkce, která je ve vyznačeném bodě spojitá a má v něm také stejné první derivace z obou stran.

Graf výsledné funkce tedy nesmí být nikde „nalomený“. Pokud si představíme graf výsledné funkce vymodelovaný z drátku, po kterém budeme přejíždět prstem, nesmíme se nikde o drátek píchnout.

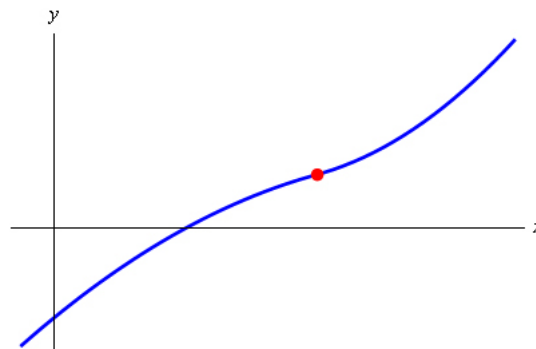
Požadavky na výše uvedené vlastnosti lze popsat rovnicemi ve tvaru

$$f'_i(x_{i+1}) = f'_{i+1}(x_{i+1}), \quad (95)$$

kde symbolem  $f'(x)$  je označena první derivace funkce  $f$  a  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Vztahem (95) je tedy definováno  $n-1$  rovnic.



obr. 110



obr. 111

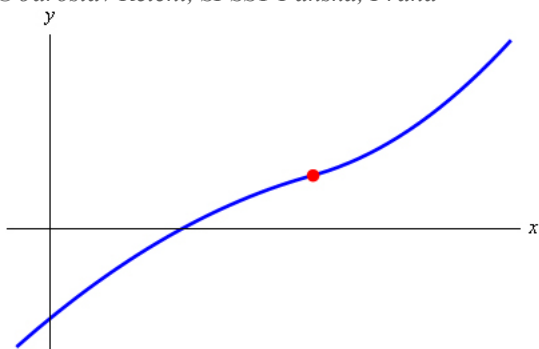
3. Dílčí funkce musejí mít v každém zadaném bodě, ve kterém se spojují, navzájem stejné hodnoty druhých derivací. Druhá derivace udává křivost grafu dané funkce, takže křivost obou spojovaných funkcí musí být v daném bodě stejná. Na obr. 112 je zobrazen graf funkce, která má ve vyznačeném bodě stejnou funkční hodnotu, stejnou hodnotu první derivace, ale liší se hodnotou druhé derivace zleva a zprava. Na obr. 113 je zobrazen graf funkce, která má navíc stejnou hodnotu druhé derivace zleva i zprava ve vybraném bodě.

Druhá derivace udává zakřivení grafu funkce. Pokud bychom tedy jeli po grafu funkce na kole, v grafu zobrazeném na obr. 112 bychom museli ve vyznačeném bodě pohnout s řídky, museli bychom trochu zatočit. Pokud bychom jeli po grafu zobrazeném na obr. 113, tak bychom vyznačeným bodem projeli, aniž bychom museli změnit natočení řídek kola.

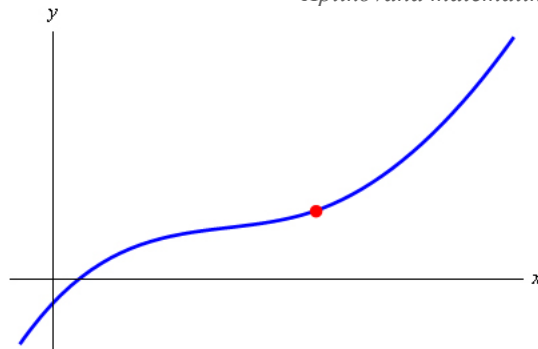
Požadavek na spojitost druhých derivací dílčích funkcí v zadaných bodech lze matematicky formulovat pomocí rovnic ve tvaru

$$f''_i(x_{i+1}) = f''_{i+1}(x_{i+1}), \quad (96)$$

kde symbolem  $f''(x)$  je označena druhá derivace funkce  $f$  a  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Vztahem (96) je tedy definováno dalších  $n-1$  rovnic.



obr. 112



obr. 113

Pomocí vztahů (94) až (96) je tedy definováno celkem  $2n + n - 1 + n - 1 = 4n - 2$  rovnic. Abychom mohli jednoznačně určit všechny dílčí funkce dané předpisem (93), musíme mít celkem  $4n$  rovnic. Proto musíme ještě dvě další rovnice přidat. Tyto rovnice, ale již nejsou nezbytné z hlediska geometrie řešeného problému (tj. z hlediska nalezení spojitě a hladké funkce procházející zadanými body), ale z hlediska jednoznačnosti nalezení takové funkce. Dvě podmínky, které můžeme vzít v úvahu a které jsou popsitelné dvěma rovnicemi, jsou podmínky na sklon výsledné funkce v krajních bodech (tj. podmínky definující hodnoty první derivace výsledné funkce v těchto bodech) nebo podmínky na křivost výsledné funkce v krajních bodech (tj. podmínky definující hodnoty druhé derivace funkce v těchto bodech). V závislosti na typu úlohy, na použité numerické metodě, ... je možné využít jednu nebo druhé podmínky. Tím získáme ke stávajícím rovnicím ještě rovnice

$$f_1'(x_1) = k_1 \text{ a } f_n'(x_{n+1}) = k_n, \quad (97)$$

kde  $k_1$  resp.  $k_n$  je směrnice tečny k výsledné funkci v prvním resp. posledním zadaném bodě, nebo rovnice

$$f_1''(x_1) = r_1 \text{ a } f_n''(x_{n+1}) = r_n, \quad (98)$$

kde  $r_1$  resp.  $r_n$  je křivost výsledné funkce v prvním resp. posledním zadaném bodě.

Nyní máme k dispozici celkem  $4n$  rovnic pro  $4n$  neznámých. Tato soustava je soustavou lineárních rovnic, protože neznámými jsou koeficienty dílčích funkcí, které jsou dány předpisy (93). A v nich vystupují jednotlivé koeficienty v první mocnině. Tato soustava rovnic je tedy relativně snadno řešitelná.

Problémem by mohlo být nalezení derivací daných funkcí, protože první derivace a druhé derivace dílčích funkcí vystupují ve vztazích (95) až (98). Vzhledem k tomu, že známe předpis polynomických funkcí, jejichž derivace budeme při výpočtu potřebovat, není problém tyto derivace nalézt manuálně a příslušné rovnice (tj. rovnice (95) až (98)) psát do použitého programu, kterým budeme úlohu řešit, již s vypočtenými prvními derivacemi resp. druhými derivacemi.

## 8.5 Momenty setrvačnosti tuhého tělesa

### 8.5.1 Tuhé těleso a jeho pohyby

Moment setrvačnosti je fyzikální veličina, která je charakteristická pro **tuhé těleso**. Tuhé těleso je model (abstrakce, idealizace) skutečných těles, který zavádíme do fyziky proto, abychom si zjednodušili situaci a nemuseli studovat všechny fyzikální děje najednou. U tuhého tělesa se nebudeme zajímat o jeho deformace, tj. tuhé těleso bude reprezentovat model tělesa, které není možné deformovat účinkem libovolně velkých sil. Tuhé těleso je charakterizováno svojí hmotností a objemem (a tedy i hustotou). Síly, které na tuhé těleso působí, mohou způsobit pouze pohyb tuhého tělesa.

Každý pohyb tuhého tělesa si lze představit jako pohyb složený z pohybu:

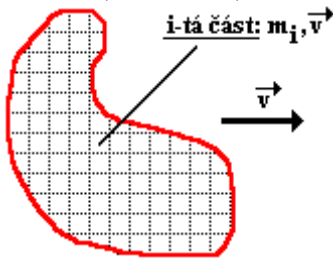
1. posuvného (translace) - při něm se všechny body tělesa pohybují stejnou rychlostí po vzájemně rovnoběžných trajektoriích. Např. vagón jedoucí po přímé trati, bedna posunovaná po podlaze, píst ve spalovacím motoru, ...
2. otáčivého (rotace) - při něm se všechny body tělesa pohybují se stejnou úhlovou rychlostí po soustředných kružnicích, jejichž středy leží na ose otáčení. Otáčivý pohyb se děje vždy kolem nějaké okamžité osy otáčení. Pro jednoduchost budeme uvažovat, že se poloha osy, kolem níž těleso rotuje, nemění. Příklady pohybů: vodní kohoutek, dveře, ventilátor, brusný kotouč, CD, ...

V praxi dochází ke skládání obou pohybů v jeden - valící se kolo, Země při svém pohybu kolem Slunce, ... Např. přední kolo u bicyklu koná tyto dva pohyby současně: jeho střed (těžiště) se posunuje směrem dopředu a zároveň se kolo odvaluje (valí).

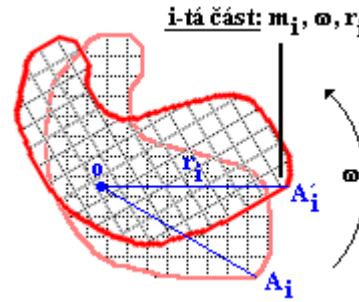
### 8.5.2 Kinetická energie tuhého tělesa

Na základě klasifikace pohybů tuhého tělesa (viz odstavec 8.5.1) se poněkud zkomplikuje výpočet kinetické energie tuhého tělesa. Při posuvném pohybu je celková kinetická energie tělesa rovna součtu kinetických energií jednotlivých bodů tělesa. Při posuvném pohybu se pohybují všechny body tělesa stejnou rychlostí, tedy pro kinetickou energii posuvného pohybu je možné psát:  $E_{kp} = \frac{1}{2}v^2 (m_1 + m_2 + \dots + m_n) = \frac{1}{2}mv^2$ .

Hmotnosti  $m_i$  (pro  $i=1, 2, \dots, n$ ) jsou hmotnosti jednotlivých částí tuhého tělesa, na které jsme tuhé těleso pomyslně rozdělili (viz obr. 114).



obr. 114



obr. 115

Při otáčivém pohybu tuhého tělesa kolem nehybné osy se všechny body pohybují po kružnicích, jejichž středy leží na ose otáčení, stejnou úhlovou rychlostí  $\omega$ . Kinetickou energii tělesa určíme opět jako součet kinetických energií jednotlivých bodů tělesa. Tedy můžeme psát:

$$\begin{aligned} E_{\text{kr}} &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n r_n^2 \omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2) \end{aligned}$$

Hmotnosti  $m_i$  (pro  $i=1, 2, \dots, n$ ) jsou hmotnosti jednotlivých částí tuhého tělesa, na které jsme si opět pomyslně tuhé těleso rozdělili,  $r_i$  (pro  $i=1, 2, \dots, n$ ) je vzdálenost uvažované  $i$ -té části tuhého tělesa od osy otáčení  $o$  (viz obr. 115).

Při otáčení tuhého tělesa kolem nehybné osy závisí jeho kinetická energie jednak na velikosti úhlové rychlosti, jednak na hmotnostech jednotlivých bodů (částí) a jejich vzdálenostech od osy otáčení. Kinetická energie tedy závisí na rozložení látky v daném tělese. Rozložení látky v tělese vzhledem k ose rotace vyjadřuje fyzikální veličina **moment setrvačnosti**  $J$  tuhého tělesa vzhledem k ose otáčení, který je definován vztahem  $J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2$ ;  $[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$ .

Existují metody (viz odstavec 8.5.3) pomocí nichž se dá moment setrvačnosti daného tělesa vypočítat. Vždy tak dostaneme moment setrvačnosti ve tvaru  $J = kmr^2$ , kde  $m$  je hmotnost tuhého tělesa,  $r$  je poloměr (resp. délka) tuhého tělesa a  $k$  bezrozměrná konstanta.

Kinetická energie tuhého tělesa otáčejícího se kolem nehybné osy úhlovou rychlostí  $\omega$  je dána vztahem

$$E_{\text{kr}} = \frac{1}{2} J \omega^2, \text{ kde } J \text{ je moment setrvačnosti vzhledem k dané ose otáčení.}$$

Koná-li těleso současně posuvný pohyb a otáčivý pohyb kolem osy procházející těžištěm tělesa, je kinetická energie dána součtem energie posuvného a otáčivého pohybu:  $E_k = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2$ , kde  $J_0$  je moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm tělesa.

### 8.5.3 Výpočet momentů setrvačnosti

Výpočet momentů setrvačnosti následujících těles vychází z použití integrálního počtu (viz odstavec 5). Pro výpočet momentu setrvačnosti je v podstatě nutné zopakovat výpočet uvedený v odstavci 8.5.2, tj. „napodobit“ vztah  $J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2$ . Abychom dostali co nejpřesnější výsledek, je třeba dané tuhé těleso rozdělit na „hodně velký počet velmi tenkých plátků“, s nimiž si už „dokážeme poradit“. Pokud ale chceme dělit těleso na „hodně velký počet velmi tenkých plátků“, které pak musíme opět „dát dohromady“ (tj. sečíst), je použití integrálního počtu nezbytné.

S využitím integrálního počtu je možné moment setrvačnosti definovat vztahem:  $J = \int_0^m r^2 dm$ , což v případě homogenního tuhého tělesa (jiné v tomto textu vyšetřovat nebudeme), které má konstantní hustotu, lze přepsat ve tvaru:  $J = \int_0^m r^2 dm = \int_0^V r^2 \rho dV = \rho \int_0^V r^2 dV$ .

Všechny momenty setrvačnosti jsou počítány vůči ose rotace, která je shodná s osou symetrie daného útvaru.

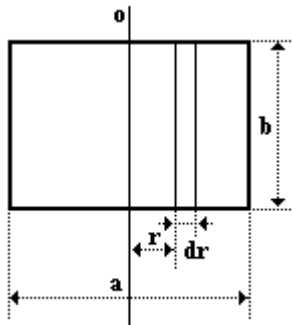
#### 8.5.3.1 Obdélníková deska

Obdélníkovou desku si pro účely výpočtu momentu setrvačnosti rozdělíme na úzké obdélníčky, jejichž šířka je  $dr$ . Vzdálenost uvažovaného obdélníčku od osy rotace  $o$  je pak  $r$  (viz obr. 116). Hmotnost  $m$  desky vyjádříme pomocí **plošné hustoty**  $\sigma$ :  $m = \sigma S = \sigma ab$ . Hmotnost  $dm$  uvažovaného obdélníčku je pak rovna  $dm = \sigma b \cdot dr$ .

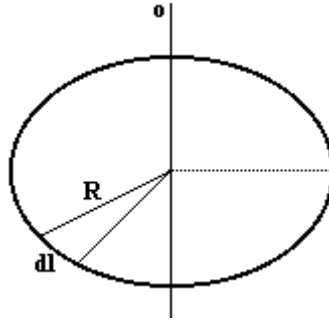
Nyní je možné už psát pro moment setrvačnosti:

$$J = \int_0^m r^2 dm = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} r^2 \sigma b dr = 2\sigma b \int_0^{\frac{a}{2}} r^2 dr = 2\sigma b \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^{\frac{a}{2}} = 2\sigma b \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{8} =$$

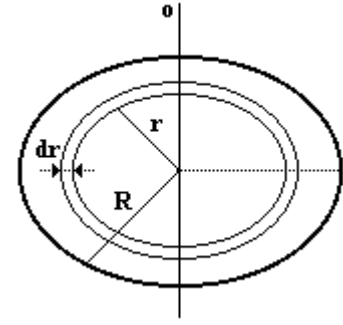
$$= \sigma b a \frac{a^2}{12} = \frac{1}{12} m a^2$$



obr. 116



obr. 117



obr. 118

Vzhledem k tomu, že právě odvozený vztah nezávisí na šířce desky  $b$ , platí pro libovolně širokou destičku. Tedy i pro tenkou tyč, která se bude otáčet okolo osy procházející jejím středem kolmo na podélnou osu tyče.

### 8.5.3.2 Obruč

Při výpočtu momentu setrvačnosti obruče si tuto obruč rozdělíme na takové kousky, že danou obruč vlastně nahradíme uzavřenu lomenou čarou, tj. mnohoúhelníkem s velmi velkým („nekonečným“) počtem vrcholů (stran). Dále zavedeme pojem **délková hustota**  $\rho_l$  jako podíl hmotnosti obruče a její délky. Pomocí délkové hustoty vyjádříme nyní hmotnost jednoho dílku:  $dm = \rho_l dl$ . Ilustrační náčrt je na obr. 117.

Nyní je možné již výpočtem určit moment setrvačnosti obruče:

$$J = \int_0^m r^2 dm = \int_0^{2\pi R} R^2 \rho_l dl = R^2 \rho_l \int_0^{2\pi R} dl = R^2 \rho_l [l]_0^{2\pi R} = R^2 \rho_l \cdot 2\pi R = R^2 m$$

### 8.5.3.3 Plášť válce

Výpočet momentu setrvačnosti pláště válce provedeme na základě momentu setrvačnosti obruče (viz odstavec 8.5.3.1). Plášť válce si představíme jako „velké množství nekonečně tenkých“ obručí naskládaných na sebe, přičemž jedna obruč má výšku  $dz$  (viz obr. 119). Pomocí **plošné hustoty**  $\sigma$ , která je definována jako podíl hmotnosti uvažovaného tělesa (pláště válce) a jeho plochy, vyjádříme hmotnost  $m$  pláště válce:  $m = \sigma S = 2\pi R \sigma v$ . Hmotnost  $dm$  jedné obruče, z níž je plášť válce sestaven, pak bude:  $dm = 2\pi R \sigma dz$ .

Nyní je možné přistoupit k samotnému výpočtu momentu setrvačnosti pláště válce:

$$J = \int_0^m r^2 dm = R^2 \int_0^v 2\pi \sigma R dz = 2\pi \sigma R^3 \int_0^v dz = 2\pi \sigma R^3 [z]_0^v = 2\pi \sigma R^3 v = 2\pi \sigma R v R^2 = m R^2$$

Z výpočtu je vidět, že moment setrvačnosti obruče a pláště válce jsou stejné. Jinými slovy, u obruče nezávisí na její výšce - i kdybychom jí brali jako nízký dutý válec, její moment setrvačnosti se nezmění.

### 8.5.3.4 Kruhová deska

Při výpočtu momentu setrvačnosti kruhové desky budeme postupovat analogicky jako při výpočtu momentu setrvačnosti obruče (viz odstavec 8.5.3.1) jen s tím rozdílem, že zavedeme tentokrát **plošnou hustotu**  $\sigma$  jako podíl hmotnosti tělesa (kruhu) a jeho plochy. Platí tedy:  $m = S\sigma = \pi R^2 \sigma$ . Kruh si nyní rozdělíme na soustavu mezikruží, které mají šířku  $dr$ . Budeme uvažovat takové mezikruží, jehož menší ohraničující kružnice má poloměr  $r$  a jehož šířka je  $dr$ . Pro jeho plochu pak dostáváme (podle obr. 118):  $S_{\text{mezikruží}} = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 2r \cdot dr + (dr)^2 - r^2) = \pi(2r \cdot dr + (dr)^2)$ .

Vzhledem k tomu, že šířka mezikruží  $dr$  je infinitezimálně malá, je možné psát:  $S_{\text{mezikruží}} \doteq 2\pi r \cdot dr$ , tj. výraz  $(dr)^2$  vůči druhému členu zanedbat.

Hmotnost uvažovaného mezikruží pak bude:  $dm = 2\pi \sigma r \cdot dr$ . Nyní už můžeme přistoupit k výpočtu vlastního momentu setrvačnosti kruhu:

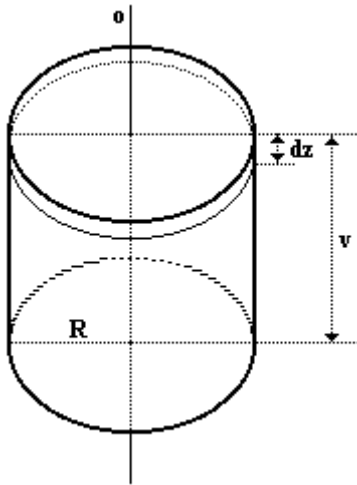
$$J = \int_0^m r^2 dm = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi \sigma r \cdot dr = 2\pi \sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi \sigma \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2\pi \sigma \frac{R^4}{4} = \pi R^2 \cdot \sigma \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

### 8.5.3.5 Plný válec

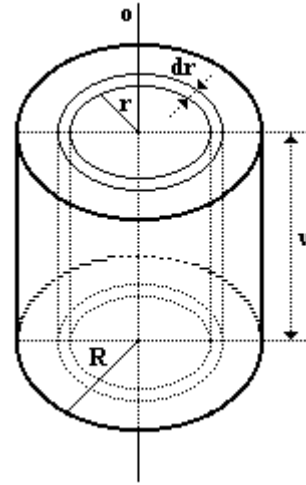
K odvození momentu setrvačnosti válce je možno přistoupit dvěma různými způsoby (analogicky jako u pláště válce - viz odstavec 8.5.3.3).

**8.5.3.5.1 VÝPOČET NA ZÁKLADĚ MOMENTU SETRVAČNOSTI KRUHOVÉ DESKY**

Máme-li k dispozici výpočet (resp. výsledek výpočtu) momentu setrvačnosti kruhové desky (viz odstavec 8.5.3.3), je možné jej použít k výpočtu momentu setrvačnosti plného válce. Válec si složíme z kruhových desek, tj. rozdělíme si jej na tenké plátky, které budou mít „skoro nulovou“ tloušťku  $dz$  (viz obr. 119). Hmotnost  $m$  válce vyjádříme pomocí jeho **objemové hustoty**  $\rho$  takto:  $m = \rho V = \rho \pi R^2 v$ . Pro hmotnost  $dm$  jedné uvažované kruhové desky, z nichž je válec složen, pak dostáváme  $dm = \rho dV = \rho \pi R^2 dz$ .



obr. 119



obr. 120

Nyní můžeme (ze znalostí výsledku z odstavce 8.5.3.3) vypočítat moment setrvačnosti plného válce:

$$J = \int_0^m \frac{1}{2} R^2 dm = \frac{1}{2} R^2 \int_0^v \rho \pi R^2 dz = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 \int_0^v dz = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 [z]_0^v = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 v = \frac{1}{2} R^2 \rho \pi R^2 v = \frac{1}{2} m R^2$$

**8.5.3.5.2 VÝPOČET BEZ ZNALOSTI MOMENTU SETRVAČNOSTI KRUHOVÉ DESKY**

Pokud není výsledek výpočtu momentu setrvačnosti kruhové desky znám, použijeme metodu, která byla vysvětlena právě v odstavci popisující výpočet jejího momentu setrvačnosti (viz odstavec 8.5.3.3). Válec si rozdělíme na souosé válce, které budou mít velmi malé vzdálenosti od sebe, tj. jejich poloměry se budou lišit o vzdálenost  $dr$  (viz obr. 120). Hmotnost  $m$  válce vyjádříme pomocí **objemové hustoty**  $\rho$ :  $m = \rho V$ . Pro hmotnost  $dm$  jednoho uvažovaného válečku dostáváme tedy  $dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi r v \cdot dr$ , kde výraz  $2\pi r dr$  udává plochu mezikruží, které vznikne řezem vedeným kolmo na osu  $o$  válce. Odvození tohoto vztahu je uvedeno v odstavci 8.5.3.4 u výpočtu momentu setrvačnosti kruhové desky.

Moment setrvačnosti plného válce je nyní možno určit takto:

$$J = \int_0^m r^2 dm = \int_0^R 2\pi r v \rho r^2 dr = 2\rho\pi v \int_0^R r^3 dr = 2\rho\pi v \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2\rho\pi v \frac{R^4}{4} = \rho\pi R^2 v \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

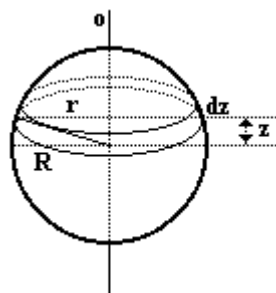
Jak způsobem uvedeným zde, tak způsobem uvedeným v odstavci 8.5.3.5.1 jsme obdrželi moment setrvačnosti ve stejném tvaru, jako je moment setrvačnosti kruhové desky. Jinými slovy, u kruhové desky, jejíž výšku jsme původně neuvažovali, na její výšce nezávisí. Moment setrvačnosti je stejný a na výšce desky nezávislý.

**8.5.3.6 Koule**

Při výpočtu momentu setrvačnosti koule vyjdeme z momentu setrvačnosti kruhové desky (viz odstavec 8.5.3.4). Kouli je možné si totiž představit složenou z řady na sebe položených kruhových desek, jejichž poloměr se plynule zvětšuje (a pak zase zmenšuje). Nicméně v rámci jedné desky, která má tloušťku  $dz$  budeme pokládat tuto desku za všude stejně silnou (tj. za válec). Hmotnost  $m$  koule vyjádříme pomocí její objemové hustoty  $\rho$  a

jejího objemu:  $m = \rho V = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ . Pro hmotnost  $dm$  jedné uvažované desky (která je vlastně válcem) platí:

$$dm = \rho \pi r^2 dz$$



obr. 121

Pro moment setrvačnosti koule pak platí:  $J = \int_0^m \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \rho \pi r^2 r^2 dz = \rho \pi \int_0^R r^4 dz$ . Nyní je třeba si

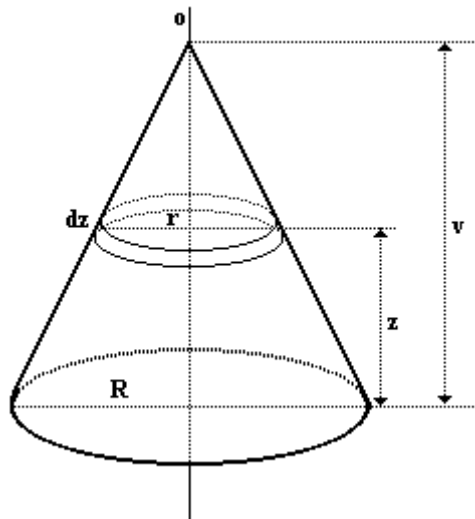
uvědomit (viz obr. 121), že na základě Pythagorovy věty je možné psát:  $r = \sqrt{R^2 - z^2}$ . Dosazením do integrálu v momentu setrvačnosti je možné pokračovat ve výpočtu dále:

$$\begin{aligned} J &= \rho \pi \int_0^R r^4 dz = \rho \pi \int_0^R (\sqrt{R^2 - z^2})^4 dz = \rho \pi \int_0^R (R^2 - z^2)^2 dz = \rho \pi \int_0^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz = \\ &= \rho \pi \left[ R^4 z - \frac{2R^2 z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right]_0^R = \rho \pi \left( R^5 - \frac{2R^5}{3} + \frac{R^5}{5} \right) = \rho \pi \frac{8R^5}{15} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{2R^2}{5} = \frac{2}{5} m R^2 \end{aligned}$$

### 8.5.3.7 Kužel

Moment setrvačnosti kužele určíme analogicky jako moment setrvačnosti koule (viz odstavec 8.5.3.6). Kužel si rozdělíme na tenké kruhové desky, jejichž tloušťka je  $dz$  a jejichž poloměr se od vrcholu kužele postupně zvyšuje. Pomocí objemové hustoty  $\rho$  vyjádříme hmotnost  $m$  kužele:  $m = \rho V = \frac{1}{3} \pi R^2 v \rho$ . Pro hmotnost  $dm$  kruhové desky, která je vlastně tenkým válcem a pomocí nichž je tvořen kužel, pak platí:  $dm = \rho \pi r^2 dz$ .

Pro moment setrvačnosti kužele je pak možné psát:  $J = \int_0^m \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^v \rho \pi r^2 r^2 dz = \frac{1}{2} \rho \pi \int_0^v r^4 dz$ . Poloměr  $r$  jedné uvažované kruhové desky je možné určit na základě obr. 122 pomocí podobnosti trojúhelníků. Platí totiž  $\frac{v-z}{r} = \frac{v}{R}$ . Odtud je možné vyjádřit  $r$  takto:  $r = (v-z) \frac{R}{v}$ .



obr. 122

Dosadíme-li nyní do integrálu, pomocí něhož počítáme moment setrvačnosti kužele, dostaneme:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \rho \pi \int_0^v r^4 dz = \frac{1}{2} \rho \pi \int_0^v (v-z) \frac{R^4}{v^4} dz = \frac{1}{2} \frac{R^4}{v^4} \rho \pi \int_0^v (v^4 - 4v^3 z + 6v^2 z^2 - 4v z^3 + z^4) dz = \\ &= \frac{1}{2} \frac{R^4}{v^4} \rho \pi \left[ v^4 z - \frac{4v^3 z^2}{2} + \frac{6v^2 z^3}{3} - \frac{4v z^4}{4} + \frac{z^5}{5} \right]_0^v = \frac{1}{2} \frac{R^4}{v^4} \rho \pi \left( v^5 - 2v^5 + 2v^5 - v^5 + \frac{v^5}{5} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{R^4}{v^4} \rho \pi \frac{v^5}{5} = \frac{1}{10} R^4 \rho \pi v = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} \rho \pi R^2 v R^2 = \frac{3}{10} m R^2 \end{aligned}$$

### 8.5.4 Přehled momentů setrvačnosti některých těles

Momenty setrvačnosti jsou uváděny vzhledem k ose rotace, která je zároveň osou symetrie tělesa o hmotnosti  $m$ .  $R$  značí poloměr těles (resp. jejich podstav) s výjimkou tyče, kde  $R$  představuje její délku.

tyč (rotuje kolem osy symetrie kolmé k tyči)	$J = \frac{1}{12} R^2 m$
obruč	$J = R^2 m$
kruhová deska	$J = \frac{1}{2} R^2 m$
válec	$J = \frac{1}{2} R^2 m$

plášť tenkostěnného válce	$J = R^2 m$
koule	$J = \frac{2}{5} R^2 m$
kužel	$J = \frac{3}{10} R^2 m$

## 8.6 Fourierova transformace

Fourierova transformace je matematický postup, který umožňuje spojitou a periodickou funkci vyjádřit pomocí funkcí sinus a kosinus, tj. jako harmonickou řadu. Při následujícím výkladu se budeme opírat o fyzikální aspekty problému a proto některé věci zjednodušíme. V obecném případě by se problém komplikoval matematicky (např. by se musely zvlášť vyšetřit nespojitě funkce, s nimiž se ve fyzice stejně nesetkáváme). Autorem zmíněného matematického postupu je francouzský matematik a fyzik baron Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830).

### 8.6.1 Matematický popis

Jestliže funkce  $f(t)$  vyjadřuje časovou závislost (např. tlaku vzduchu v případě hudebního tónu), dá se očekávat, že se funkce  $f(t)$  dá vyjádřit jako součet jistého počtu jednoduchých harmonických funkcí času pro každou z různých harmonických frekvencí. Toto oprávnění je na místě, protože jak už bylo zmíněno, funkce používané ve fyzice jsou spojitě - tlak vzduchu se nemění skokem (nespojité), ale spojitě. Jestliže je perioda kmitů  $T$ , potom základní úhlová frekvence bude  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  a harmonické úhlové frekvence pak budou  $2\omega$ ,  $3\omega$ ,  $4\omega$ , ...

Situace je ale trochu složitější, protože nemůžeme očekávat, že počáteční fáze všech dílčích kmitání budou stejné. Musíme tedy pracovat s funkcemi typu  $\cos(\omega t + \varphi)$ , kde  $\varphi$  je zmíněná počáteční fáze. Vzhledem k tomu, že platí  $\cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi$ , rozepíšeme danou funkci  $f(t)$  i pomocí funkce sinus. Pro další výpočty je důležité si uvědomit, že počáteční fáze  $\varphi$  je konstantní a tedy  $\sin \varphi$  resp.  $\cos \varphi$  je také konstantní. Tím docházíme k závěru, že každou spojitou a periodickou funkci  $f(t)$  s periodou  $T$  je možné rozepsat ve tvaru:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots,$$

kde  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $a_i$  a  $b_i$  jsou číselné konstanty, které udávají s jakou vahou je každá (harmonická) složka kmitů přítomna v kmitu funkce  $f(t)$ . Uvedené vyjádření funkce  $f(t)$  se nazývá **Fourierova řada** pro funkci  $f(t)$ .

*Poznámka:* Člen  $a_0$  je většinou v hudebních tónech (o něž se ve výkladu Fourierovy transformace opíráme) nulový, ale s jeho zavedením do transformace je tato transformace obecnější.

Pokud jsou dané všechny koeficienty  $a_i$  a  $b_i$  je jednoduché dopočítat funkční hodnotu funkce  $f(t)$  v libovolném časovém okamžiku  $t$  (pro jakoukoliv hodnotu neznámé  $t$ , která vystupuje ve výrazu  $f(t)$ ). Zajímavější (a v praxi častější a složitější) případ je zjišťování koeficientů  $a_i$  a  $b_i$  pro danou funkci  $f(t)$ , kterou chceme vyjádřit pomocí harmonických frekvencí. Základní idea je relativně jednoduchá, jen je komplikovaná matematicky - neobejde se totiž bez integrálního počtu.

### 8.6.2 Odvození koeficientů

Fourierova geniální myšlenka vedla k určení jednotlivých koeficientů  $a_i$  a  $b_i$ . Člen  $a_0$  vyjadřuje posun střední hodnoty za jednu periodu (tj. za časový interval od 0 do  $T$ ). Jinými slovy určuje „posun nulové hladiny“ dané funkce. Střední hodnota funkce  $y = A \cdot \sin kx$  nebo  $y = A \cdot \cos kx$ , kde  $A$  a  $k$  jsou reálné konstanty, je rovna nule.

Střední hodnota součtu se rovná součtu středních hodnot. Proto je střední hodnota funkce  $f(t)$  rovna právě střední hodnotě z  $a_0$ . Vzhledem k tomu, že  $a_0$  je konstanta, je její střední hodnota totožná s ní samou.

Střední (průměrnou) hodnotu u spojitě funkce je možné definovat výrazem:  $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ .

*Poznámka:* V případě (diskrétních, tj. nespojitých) hodnot naměřených během experimentu by střední hodnota (průměr) definován výrazem  $a_{\text{střední}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i = \frac{1}{N} (f_1 + f_2 + \dots + f_n)$ .

Pro určení dalších koeficientů použijeme trik, který použil Fourier. Vynásobíme obě strany rovnice Fourierovy řady nějakou harmonickou funkcí - např.  $\cos 7\omega t$ , čímž dostaneme:



$$f(t) \cos 7\omega t = a_0 \cos 7\omega t + a_1 \cos \omega t \cdot \cos 7\omega t + b_1 \sin \omega t \cdot \cos 7\omega t + a_2 \cos 2\omega t \cdot \cos 7\omega t + b_2 \sin 2\omega t \cdot \cos 7\omega t + \dots$$

Nyní najdeme střední hodnoty obou stran právě napsané rovnice. Nejprve se podívejme na členy, které obsahují  $a_1$ . Střední hodnota členu s koeficientem  $a_0$  je nulová, protože střední hodnota  $\cos n\omega t$ , kde  $n \in \mathbb{Z}$ , je nulová.

Obecně platný vztah  $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$  použijeme pro zjednodušení dalších členů.

Člen u  $a_1$  je  $\frac{1}{2} a_1 (\cos 8\omega t + \cos 6\omega t)$  (víme, že funkce kosinus je funkce sudá, tj.  $\cos x = \cos(-x)$ ). Střední hodnota tohoto členu je tedy nulová. Podobně dostaneme pro člen s  $a_2$ :  $\frac{1}{2} a_2 (\cos 9\omega t + \cos 5\omega t)$  - tedy opět střední hodnota tohoto členu je nulová. Podobným způsobem bychom mohli postupovat dále a pro všechny členy až na jeden jediný (v našem případě člen s  $a_7$ ) dostáváme střední hodnotu nulovou. Člen s  $a_7$  je možné rozepsat takto:  $\frac{1}{2} a_7 (\cos 14\omega t + \cos 0)$ . Střední hodnota toho členu je tedy rovna  $\frac{1}{2} a_7$ , protože střední hodnota  $\cos 0$  je jedna.

Pro členy, které obsahují  $b_1$  je situace podobná. Nyní ale využijeme vztah  $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$ , s jehož pomocí opět určíme střední hodnoty jednotlivých členů. Nyní je situace ještě jednodušší než u členů s  $a_1$ : všechny členy s  $b_1$  jsou totiž nulové.

Použitý Fourierův trik tedy působil jako síto: po vynásobení Fourierovy řady výrazem  $\cos 7\omega t$  zůstal jediný člen nenulový: člen  $a_7$ . Dostali jsme tak, že střední hodnota výrazu  $f(t) \cos 7\omega t$  je rovna  $\frac{1}{2} a_7$ , což se dá zapsat matematicky takto:  $\frac{1}{2} a_7 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos 7\omega t dt$ . Odtud dostáváme:  $a_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos 7\omega t dt$ .

Naprostu analogicky bychom postupovali v případě určení jednoho z koeficientů  $b_1$  - např. člen  $b_7$  bychom určili násobením Fourierovy řady výrazem  $\sin 7\omega t$ .

Právě popsany postup výpočtu koeficientů členů  $a_7$  a  $b_7$  je možné zobecnit pro výpočet libovolného členu Fourierovy řady. Výsledky v obecnějším matematickém tvaru nyní zobecníme. Pro libovolná nenulová čísla  $n$  a  $m$  a  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  platí:

1.  $\int_0^T \sin n\omega t \cdot \cos m\omega t dt = 0$
2.  $\int_0^T \cos n\omega t \cdot \cos m\omega t dt = \int_0^T \sin n\omega t \cdot \sin m\omega t dt = 0$  pro  $n \neq m$
3.  $\int_0^T \cos n\omega t \cdot \cos m\omega t dt = \int_0^T \sin n\omega t \cdot \sin m\omega t dt = \frac{T}{2}$  pro  $n = m$
4.  $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$
5.  $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ ,  $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega t dt$ ,  $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega t dt$

Nyní tedy umíme periodickou funkci „rozložit“ na její harmonické složky. Tento postup se nazývá **rozvoj do Fourierovy řady** a jednotlivé členy se nazývají **Fourierovy složky**.

Matematicky je možné pro širokou třídu funkcí (všechny, které se uplatní ve fyzice) dokázat, že pokud umíme vypočítat integrály, které vystupují v jednotlivých **Fourierových koeficientech**  $a_1$  a  $b_1$ , pak se jejich sečtením dostaneme zpět k původní funkci  $f(t)$ .

Pokud je ale funkce  $f(t)$  nespojitá (tj. změní se skokem z jedné hodnoty na jinou), dostaneme součtem Fourierovy řady v bodě nespojitosti hodnotu, která leží uprostřed mezi dolní a horní hodnotou skutečné funkce v daném bodě nespojitosti. Tuto výjimku ale můžeme klidně akceptovat, protože ve fyzice se s nespojitými funkcemi setkáme v případě, kdy si zjednodušujeme reálnou fyzikální funkci.

### 8.6.3 Praktický výpočet

Ve Fourierově řadě se vyskytují dvě sumy, v nichž se počítá od jedné až do nekonečna. To je v praxi nemožné, takže vždy musíme volit jisté zanedbání a řadu  $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$  nahradit

řadou  $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^N b_n \sin n\omega t$ , kde za  $N$  volíme „dostatečně vysoké číslo“, abychom Fourierovu řadu dostali s „dostatečnou přesností“.

Jak se mění tvar Fourierovy řady v závislosti na počtu sečtených členů si ukážeme na konkrétním příkladu.

**Příklad:** Funkce  $f(t)$  je dána takto:

$$f(t) = 1 \text{ pro } kT \leq t < (2k+1)\frac{T}{2}$$

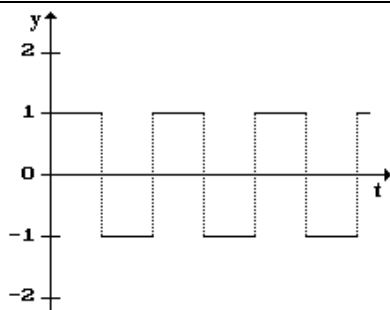
$$f(t) = -1 \text{ pro } (2k+1)\frac{T}{2} \leq t < (k+1)T, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Najděte její Fourierovskou řadu v závislosti na počtu sečtených členů.

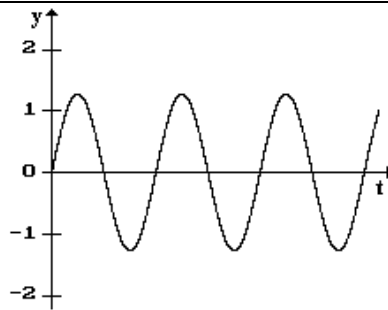
**Řešení:** Tato funkce  $f(t)$  je zobrazena na obr. 123 a její Fourierova řada je:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)\omega t), \text{ kterou pro praktický výpočet uijíme}$$

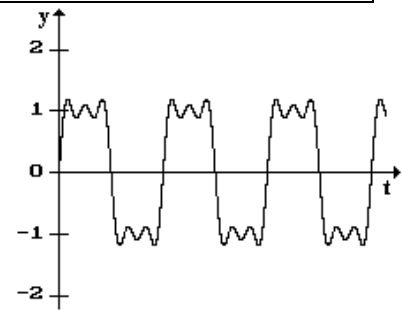
ve tvaru  $f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)\omega t)$ . Na obr. 124 až obr. 128 jsou postupně vykresleny Fourierovy řady této funkce pro  $N = 2; 5; 15; 50; 200$ .



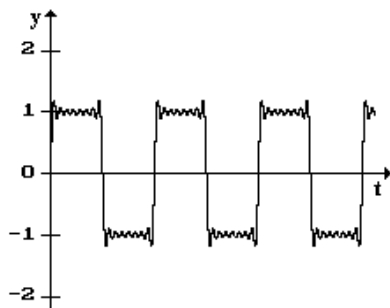
obr. 123



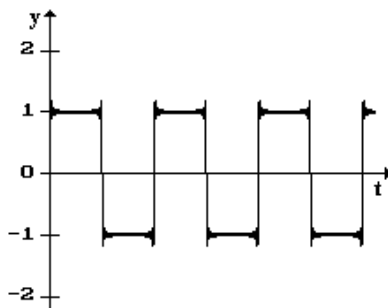
obr. 124



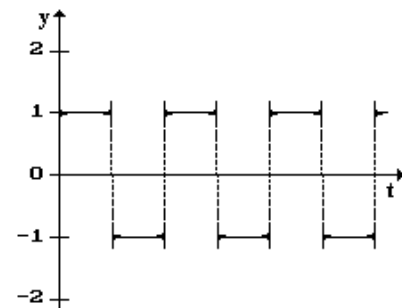
obr. 125



obr. 126



obr. 127



obr. 128

## 8.7 Vlnová rovnice

Kmitání a vlnění patří mezi relativně jednoduché mechanické pohyby. Proto si jimi fyzikové často modelují situace, které s kmitáním a vlněním na první pohled nemají příliš mnoho společného, ale přesto závěry vyplývající z kmitavého pohybu a ze šíření vlnění daným prostředím mohou výrazným způsobem zjednodušit popis výrazně komplikovanějších jevů (šíření tepla látkou, pohyb elektronu v potenciálové jámě, ...). Přitom je možné najít takový model, který je jednoduchý na počítání a pochopení, ale který přitom zároveň relativně přesně vystihuje daný komplikovaný fyzikální jev. (Je to model, takže nikdy nemůže dojít k plnému souhlasu modelu a zkoumaného jevu!)

Poměrně často fyzikové používají v řadě případů právě vlnění na struně u kytary a šíření zvuku v plynech.

### 8.7.1 Připomenutí diferenciálu

V odstavci 4.5 byl vysvětlen pojem (totální) diferenciál, který byl zaveden vztahem  $f(x + \Delta x) = f(x) + A \Delta x + \tau(\Delta x)$ , kde  $A = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$  je (totální) diferenciál funkce  $f$  v bodě  $x$  a

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tau(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

**Poznámka:** Vztah v odstavci 4.5 je uveden s jinými proměnnými, ale to na definičním vztahu nic nemění.

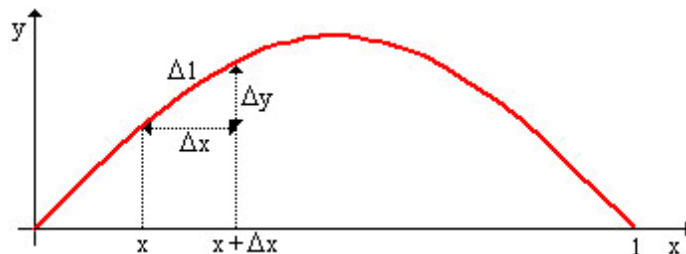
Uvedený vztah je možné přepsat v přibližném tvaru  $f(x + \Delta x) - f(x) \doteq A \cdot \Delta x$ . Funkce  $\tau(\Delta x)$  má být pro malá  $\Delta x$  téměř nulová. Omezíme-li se fyzikálně na malé výchylky, malé kmity, ... lze říci, že funkční hodnota funkce  $f$  bude v bodě  $x + \Delta x$  téměř stejná jako hodnota v tomto bodě určená pomocí tečny sestrojené ke grafu funkce  $f$  v bodě  $x$ . Fyzikálně si budeme moci toto zanedbání dovolit a proto lze psát  $f(x + \Delta x) - f(x) = A \cdot \Delta x = \frac{df(x)}{dx} \cdot \Delta x$ .

### 8.7.2 Šíření příčného vlnění

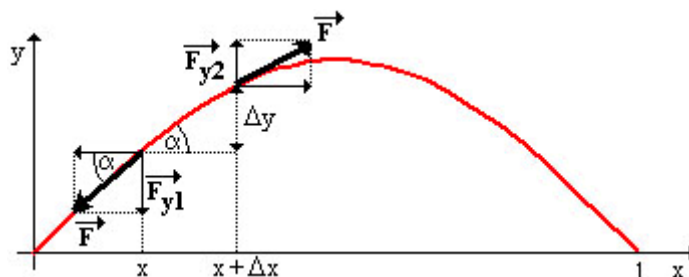
Šíření příčného vlnění lze nejlépe studovat na struně na kytáře. Uvažujme takovou strunu délky  $l$  s příčným průřezem  $S$  vyrobenou z materiálu o hustotě  $\rho$ , která je upevněná na dvou koncích. Rozkmitáme-li tuto strunu silou  $\vec{F}$ , vychýlí se struna ze své klidové polohy a bude kmitat tak, že se na ní vytvoří stojatá vlna s jednou kmitnou právě uprostřed délky struny. Budeme-li uvažovat dva blízké body na struně (body  $x$  a  $x + \Delta x$ ), lze pro délku výchylky  $\Delta l$  struny (tj. délku, o kterou se struna mezi těmito dvěma body prodlouží vlivem síly  $\vec{F}$ ) psát (viz obr. 129):  $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$ . Vzhledem

k malým výchylkám, lze člen  $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$  (vzhledem k jedničce) zanedbat, a můžeme psát  $\Delta l \doteq \Delta x$ . Hmotnost tohoto elementu (kousku) struny je  $\Delta m = \rho \Delta V = \rho S \cdot \Delta l = \rho S \cdot \Delta x$ .

Pro výchylku struny způsobenu silou  $\vec{F}$ , která má v daném bodě směr tečny sestrojené ke struně v tomto bodě, je podstatná svislá složka této síly  $\vec{F}_y$  (složka ve směru osy  $y$ ). Podle obr. 130 lze psát:  $\text{tg } \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  a  $\sin \alpha = \frac{F_y}{F}$ . Vzhledem k tomu, že jsme se omezili na malé výchylky, je i úhel  $\alpha$  malý. Proto  $\text{tg } \alpha \doteq \sin \alpha$  a tedy je možné psát  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F_y}{F}$ , odkud  $F_y = F \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Uvažujeme-li malé výchylky, lze přírůstky  $\Delta x$  a  $\Delta y$  nahradit diferenciály a pak psát  $F_y = F \frac{\partial y}{\partial x}$ . Parciální derivace je zde použita proto, že  $y$ -ová souřadnice polohy daného bodu  $x$  závisí nejen na vzdálenosti tohoto bodu  $x$  od konce struny (resp. od uzlu vlnění), ale také na čase. Jde tedy o funkci dvou proměnných  $y = y(x, t)$ , a proto je nutné použít při derivování parciální derivace (viz odstavec 4.4.6.2).



obr. 129



obr. 130

Pro velikost  $y$ -ové složky síly (tj. té složky, která skutečně vychyluje strunu) v bodě  $x$  tedy lze psát  $F_y(x) = -F \frac{\partial y}{\partial x}(x)$ . Analogicky lze psát pro velikost této síly v bodě  $x + \Delta x$ :  $F_y(x + \Delta x) = F \frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x)$ . (Opačná znaménka sil vyplývají z obr. 130.) Pro sílu, která působí na element struny délky  $\Delta x$  lze psát  $\Delta \vec{F}_y = \vec{F}_y(x + \Delta x) + \vec{F}_y(x)$ ; skalárně pak platí  $\Delta F_y = F_y(x + \Delta x) + F_y(x)$ . Po dosazení a dalších úpravách lze postupně psát:  $\Delta F_y = F \frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x) - F \frac{\partial y}{\partial x}(x) = F \left( \frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x) - \frac{\partial y}{\partial x}(x) \right) = F \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot \Delta x = F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \Delta x$ . (Při výpočtu byla využita vlastnost totálního diferenciálu - viz připomenutí v odstavci 8.7.1).

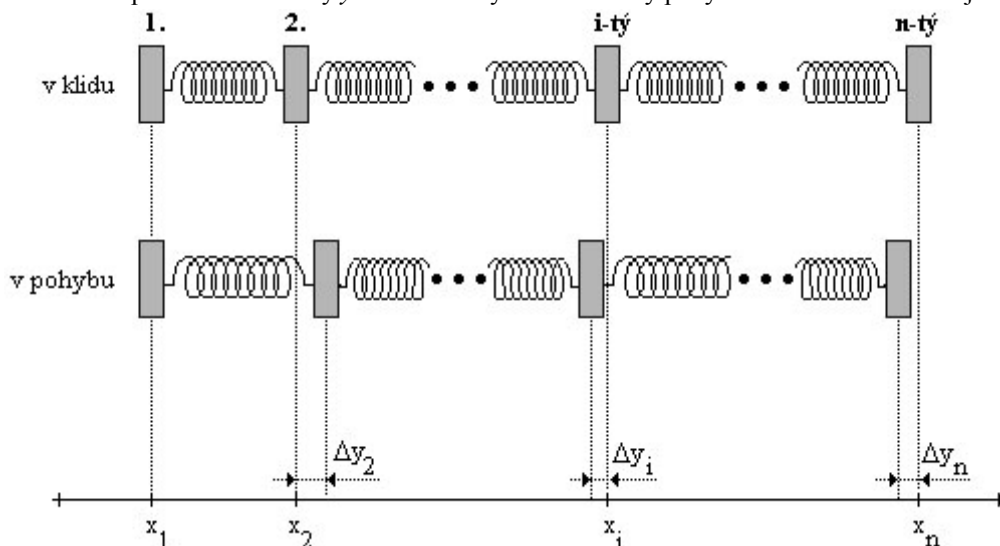
**Poznámka:** Na obr. 130 jsou síly značené  $\overline{F_{y1}}$  a  $\overline{F_{y2}}$ , zatímco ve výpočtu jsou jejich velikosti značeny  $F_y(x)$  a  $F_y(x + \Delta x)$ . Toto značení během výpočtu je vhodnější kvůli aplikaci zjednodušení vztahu pomocí (totálního) diferenciálu.

Tato síla způsobuje pohyb elementu struny o délce  $\Delta x$ . Proto je možné na tento pohyb aplikovat druhý Newtonův zákon:  $\Delta m a = \Delta F_y$ . Po dosazení dostaneme  $\rho S \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x$  a odtud dále  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho S}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ . Aby byla rovnice splněna z fyzikálního hlediska, musí mít člen  $\frac{\rho S}{F}$  stejnou jednotku jako převrácená hodnota kvadrátu velikosti rychlosti. Proto můžeme psát:  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ . Tato rovnice se nazývá **vlnová rovnice** a popisuje šíření daného typu vlnění v daném prostředí (zde šíření příčného vlnění na struně kytary). Velikost rychlosti šíření vlnění na struně pak splňuje vztah  $\frac{1}{v^2} = \frac{\rho S}{F}$  a tedy  $v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}$ .

### 8.7.3 Šíření podélného vlnění

Podélné vlnění lze asi nejlépe studovat na šíření zvuku ve vzduchu, i když si tento jev trochu zjednodušíme. Budeme uvažovat, že jednotlivé kmitající části daného prostředí mají hmotnost  $\Delta m$  a jsou navzájem pospojované pružinkami o tuhosti  $\Delta k$ . Tento na první pohled zvláštní a poněkud nestandardní předpoklad nám ale ulehčí následující odvozování.

Podle obr. 131 označíme počáteční stav (počáteční souřadnici)  $i$ -té části daného prostředí  $x_i$  a její výchylku z rovnovážné polohy  $\Delta y_i$ . Vlnění se šíří pouze ve směru osy  $x$ , ve směru osy  $y$  se námi uvažovaná podélná vlna nešíří a proto ve směru osy  $y$  nebudeme vyšetřovat žádný pohyb. Označení má ale svojí výhodu.



obr. 131

Pro sílu, která vychyluje  $i$ -tou část ze své rovnovážné polohy o  $\Delta y_i$ , lze s využitím druhého Newtonova zákona psát  $\Delta m a = \Delta F$ . Po dosazení  $\Delta m \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = -\Delta k (y_i - y_{i+1}) - \Delta k (y_i - y_{i-1})$ . Pravá strana rovnice odpovídá síle, která působí na těleso kmitající na pružině o tuhosti  $\Delta k$  při určité výchylce.

Vzhledem k tomu, že výchylka  $y_i$  je funkcí jak počáteční polohy  $i$ -té části  $x_i$ , tak i času, lze obecně psát  $y = y(x, t)$ . Proto i zde budou vystupovat parciální derivace (viz odstavec 4.4.6.2).

Další úpravou pravé strany pohybové rovnice postupně dostaneme:  $\Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \Delta k \left( \frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x) \cdot \Delta x - \frac{\partial y}{\partial x}(x) \cdot \Delta x \right) = \Delta k \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \Delta x \cdot \Delta x = \Delta k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot (\Delta x)^2$ . Hmotnost  $\Delta m$  části prostředí lze vyjádřit (analogicky jako v odstavci 8.7.2)  $\Delta m = S \rho \cdot \Delta x$ . Nyní je potřeba dát nějaký fyzikální význam tuhosti  $\Delta k$  „imaginárních“ pružinek, jimiž jsou jednotlivé části prostředí spojeny. Velikost síly  $\overline{F}$  vychylující danou část z rovnovážné polohy, lze psát ve tvaru  $F = \Delta k \cdot \Delta y$ . Tato síla ale deformuje jednotlivé části prostředí.

V nejjednodušším případě lze předpokládat platnost Hookova zákona:  $\frac{F}{S} = E \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Z posledních dvou vztahů lze

postupně vyjádřit  $\Delta k$ . Po dosazení získáme  $\frac{\Delta k \cdot \Delta y}{S} = E \frac{\Delta y}{\Delta x}$  a odtud  $\Delta k = \frac{SE}{\Delta x}$ .

Dosadíme-li nyní za  $\Delta k$  a za  $\Delta m$  do pohybové rovnice, lze psát:  $S\rho \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{SE}{\Delta x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot (\Delta x)^2$ . Odtud již dostaneme:  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ . Získali jsme tedy opět **vlnovou rovnici** ve tvaru  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ , kde  $\frac{1}{v^2} = \frac{\rho}{E}$  a tedy  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ . Velikost rychlosti podélného vlnění tedy závisí na hustotě prostředí  $\rho$  a modulu pružnosti  $E$  daného prostředí, který lze chápat jako intenzitu síly, kterými na sebe jednotlivé částice prostředí působí.

## 8.8 Diferenciální rovnice

V tomto odstavci budou popsány základní metody řešení diferenciálních rovnic, s nimiž se student může setkat hlavně ve fyzice. Matematicky přesně budeme definovat minimum pojmů - hlavním cílem bude seznámit se pokud možno jednoduchou formou se základními pravidly řešení diferenciálních rovnic. A k jejich řešení (ačkoliv si občas „půjčím“ příklad z matematiky) budeme přistupovat fyzikálně. Pohled fyzika na řadu matematických problémů je zásadně odlišný od přístupu matematika. Matematik, chce-li např. používat diferenciální či integrální počet (viz odstavce 4 a 5), musí nejprve (má-li být jeho řešení korektní) ověřit splnění předpokladů, za nichž mají tvrzení smysl: ověření, že daná funkce je spojitá, že má v každém bodě svého definičního oboru derivaci (a pokud existují nějaké „problémové“ body, tak v nich derivaci určit nějak jinak než „klasickým“ postupem), ... Tímto se fyzik nemusí zabývat, neboť fyzika popisuje skutečný svět, skutečně existující objekty, a proto všechny funkce a vztahy, které tento svět popisují, odpovídají skutečnému světu: jsou spojité, mají derivace, ... Pokud se občas vyskytne případ, v němž budou nějaké problémy (dělení nulou, nespojitost funkce, ...), pak může nastat jedna z následujících možností:

1. stačí použít pro řešení problému nějakou vhodnější soustavu (fyzikální nebo matematickou), v níž se příslušný problém už nevyskytuje
2. skutečný objekt nahradit jednodušším modelem. Je důležité si ale uvědomit, že žádný model nepopisuje skutečné objekty plnohodnotně - vždy existují vlastnosti, ve kterých se model od skutečného objektu liší.
3. skutečný objekt v popsaném stavu (v daném čase, v daném místě, s danými vlastnostmi) prostě neexistuje.

Fyzikální přístup bude i názornější - díky složitému (a často možná pro někoho i zbytečnému) ověřování platnosti matematických vlastností by se odvedla pozornost od diferenciálních rovnic, jimž se chceme věnovat zejména.

### 8.8.1 Typy diferenciálních rovnic

Existuje řada typů diferenciálních rovnic, které se mohou dělit podle různých kritérií. Např. parciální a obyčejné diferenciální rovnice, lineární diferenciální rovnice, diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, diferenciální rovnice s konstantní pravou stranou, ...

Podle typu rovnice existuje pak doporučená metoda, kterou se daný typ rovnice řeší. Popsat všechny typy diferenciálních rovnic a jejich řešení je v tomto textu zbytečné. My se zaměříme jen na ty, které lze jednoduše aplikovat na rozšíření středoškolského učiva matematiky a fyziky.

Hlavním cílem je seznámit se s pojmem diferenciální rovnice (bez složitých definic) a ukázat si u některých typů jejich řešení. Řešení dalších typů diferenciálních rovnic, které v tomto textu zmíněné nebudou, je většinou podobné - obsahuje navíc různé matematické „triky“ a postupy, kterými lze daný typ rovnice dobře vyřešit.

### 8.8.2 Diferenciální rovnice známé z matematiky ze střední školy

V odstavci 5.2 byl vysvětlen pojem primitivní funkce. Zadání příkladu, na kterém si studenti mají tento pojem procvičit, většinou zní: „Je dána funkce  $f$ . Najděte primitivní funkci k této zadané funkci.“

*Poznámka:* V příkladu by mělo být řečeno, na jakém intervalu, se má primitivní funkce hledat, ale to jsou právě ty matematické „drobnosti“, s nimiž si při pouhém procvičování hledání primitivních funkcí k funkcím zadaným málokdo láme hlavu. Ve středoškolské matematice se nepředpokládá zadávání „zrůdných“ funkcí, jejichž primitivní funkce by neexistovaly, musely se hledat jinak než výpočtem podle známých pravidel, ...

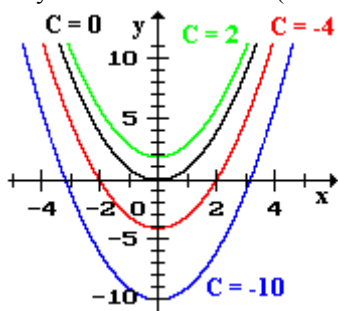
Na středoškolské úrovni jde pouze o pochopení základního principu a poté naučení se různých metod výpočtu primitivních funkcí. To další (nestandardní postupy výpočtu, zajímavější příklady, ...) pak studenti poznají na škole vysoké.

Právě popsany typ příkladu bude odrazovým můstkem i pro nás.

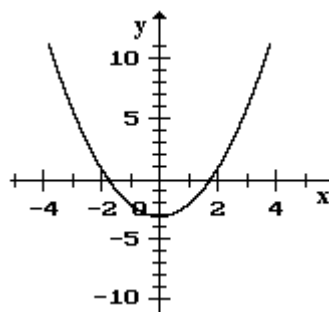
**Příklad:** Je dána funkce  $f : y = 2x$ . Najděte její primitivní funkci.

**Řešení:** Řešení příkladu spočívá v nalezení primitivní funkce  $F$  (těž neurčitého integrálu). Zde se jedná o téměř tabulkovou hodnotu. Je tedy možné psát:  $F(x) = \int 2x dx = 2 \frac{x^2}{2} + C = x^2 + C$ , kde  $C$  je libovolné reálné číslo, libovolná reálná konstanta.

Primitivní funkce nalezená v předchozím příkladu, je pochopitelně funkce, tj. můžeme sestavit její graf. Tento graf ale není možné sestavit jednoznačně, neboť konstanta  $C$  může nabývat libovolných hodnot. Proto i grafů může být libovolné množství (viz několik ukázek na obr. 132).



obr. 132



obr. 133

Právě uvedený typ příkladu patří mezi diferenciální rovnice, ačkoliv na střední škole mu nikdo tak neříká. Ale je to tak. Je zadána první derivace funkce a úkolem je nalézt příslušnou funkci. (Derivováním primitivní funkce  $F$  získáme původní funkci  $f$ , tj. funkce  $f$  je první derivací funkce  $F$ .)

Pokud ale upravíme zadání příkladu, získáme primitivní funkci, která je jednoznačně určena.

**Příklad:** Je dána funkce  $f: y = 2x$ . Najděte k zadané funkci primitivní funkci, která prochází bodem  $A = [-2; 1]$ .

**Řešení:** Nejprve je třeba opět nalézt primitivní funkci k zadané funkci:  $F(x) = \int 2x dx = 2 \frac{x^2}{2} + C = x^2 + C$ .  $C$  zde opět představuje libovolnou reálnou konstantu, jejíž hodnotu ale nyní určíme. Víme totiž, že pro  $x = -2$  má funkce  $F$  nabývat funkční hodnoty 1, tj.  $F(-2) = 1$ . Rozepsáním dostáváme:  $F(-2) = (-2)^2 + C = 1$ . Po úpravě  $4 + C = 1$  a tedy  $C = -3$ . Dostáváme tak primitivní funkci ve tvaru:  $F(x) = x^2 - 3$ , která je (na rozdíl od funkce v předchozím příkladu) jednoznačně určena (její graf je na obr. 133).

Tento příklad se od předešlého liší tím, že byly zadány **počáteční podmínky** úlohy, které mají vliv na řešení rovnice. (V prvním příkladu, který byl zadán bez počátečních podmínek, jsme získali nekonečně mnoho funkcí, zatímco ve druhém, který počáteční podmínky zadané měl, jsme získali funkci jednu jedinou!)

### 8.8.3 Pohyb po úsečce aneb s kanónem na vrabce

V tomto odstavci bude popsán pohyb hmotného bodu po přímce a na základě integrálního počtu budou odvozeny vlastnosti pohybu (průběh uražené dráhy v závislosti na čase, průběh rychlosti v závislosti na čase a průběh zrychlení). Příklad bude jak z fyzikálního, tak z matematického hlediska velmi jednoduchý, takže řešení bude znát každý hned po přečtení zadání. Ale výpočet provedeme, abychom si zvykli na postup při řešení diferenciálních rovnic.

**Příklad:** Hmotný bod o hmotnosti  $m$  se pohybuje po úsečce pod vlivem stálé síly  $\vec{F}$ . Najděte závislost uražené dráhy, rychlosti a zrychlení na čase, jestliže v čase  $t_0 = 0$  s má hmotný bod velikost rychlosti  $v_0$  a již uraženou dráhu  $s_0$ .

**Řešení:** Začneme od konce, protože určit na základě stálé síly  $\vec{F}$  a hmotnosti  $m$  hmotného bodu jeho zrychlení  $\vec{a}$ , je podle druhého Newtonova zákona snadné. Platí  $\vec{F} = m\vec{a}$  resp.  $F = ma$ . Vzhledem k tomu, že se jedná o pohyb po úsečce, nebudeme si vektorovým zápisem situaci komplikovat. Pro velikost zrychlení tedy dostáváme  $a = \frac{F}{m}$ . Vzhledem k tomu, že síla i hmotnost jsou konstantní, je konstantní i zrychlení. Tedy  $a(t) = \frac{F}{m} = konst.$

Se zrychlením úzce souvisí rychlost. Definice zrychlení z prvního ročníku fyziky na střední škole říká, že  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ , kde  $\Delta t$  je malé. Na základě znalosti diferenciálního počtu lze psát  $a = \frac{dv}{dt}$ . Odtud lze vyjádřit  $dv = a \cdot dt$  a tedy  $v = \int a \cdot dt$ . (Tento postup není z matematického hlediska úplně v pořádku, ale pro pochopení situace je v postačující.)

Nyní lze už dosadit a postupovat dále:  $v(t) = \int a \cdot dt = a \int dt = at + C_1$ . Víme, že  $v(0) = v_0$  a tedy lze psát:  $v(0) = v_0 = a \cdot 0 + C_1$ . Odtud  $C_1 = v_0$  a tedy pro velikost rychlosti v závislosti na čase dostáváme:  $v(t) = at + v_0$ , což je vztah, který známe z kinematiky.

Analogicky lze postupovat při výpočtu dráhy v závislosti na čase:  $v = \frac{ds}{dt}$ , odkud  $s = \int v \cdot dt$ . Po dosazení a dalších výpočtech dostáváme:  $s(t) = \int (at + v_0) dt = \int at \cdot dt + \int v_0 \cdot dt = a \int t \cdot dt + v_0 \int dt = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + C_2$ .

Konstantu  $C_2$  určíme na základě počáteční podmínky  $s(0) = s_0$ :  $s(0) = s_0 = \frac{1}{2}a \cdot 0^2 + v_0 \cdot 0 + C_2$ , odkud  $C_2 = s_0$ .

Dráha se tedy v závislosti na čase mění podle vztahu  $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$ . I tento vztah se běžně vyskytoval v kinematice hmotných bodů.

Lze vymýšlet celou řadu úloh, ve kterých síla nebude stálá. Může mít stálý směr, ale může se měnit její velikost v závislosti na čase:

1.  $F = kt$  - síla rostoucí lineárně s časem (v praxi lze takovou sílu realizovat po omezený čas)
2.  $F = F_0 e^{-kt}$  - síla klesající exponenciálně s časem (v praxi je uskutečnitelné lépe - např. v nějakém odporujícím prostředí)
3.  $F = F_0 \sin(\omega t)$  - harmonická síla budící harmonický oscilátor
4. ...

Výpočet průběhu zrychlení, rychlosti i dráhy v závislosti na čase by se zkomplikoval, ale v principu by byl výpočet hodně podobný výpočtu předchozímu.

### 8.8.4 Pohyb po úsečce s odporovou silou

V praxi na většinu pohybujících se těles působí odporová síla, jejíž průběh může být různý (velikost síly může záviset na velikosti rychlosti, na její druhé nebo třetí mocnině, ...). Fyzikálně se situace příliš nekomplikuje - sestavit příslušnou rovnici by neměl být problém. Vyřešit jí, už ale tak jednoduché být nemusí.

Proto si ukážeme několik příkladů, které by měly být jakýmsi návodem, jak s podobným typem úloh vypořádat.

#### 8.8.4.1 Síla roste s rychlostí lineárně

**Příklad:** Hmotný bod o hmotnosti  $m$  byl uveden do pohybu počáteční rychlostí o velikosti  $v_0$  a pohybuje se po úsečce. Přitom na něj působí odporová síla, jejíž velikost je přímo úměrná velikosti rychlosti. Najděte závislost uražené dráhy, rychlosti a zrychlení na čase.

**Řešení:** Na pohybující se hmotný bod působí odporová síla  $\vec{F}_0$ , pro jejíž velikost platí  $F_0 = -kv$  (to je ve shodě se zadáním: velikost síly je přímo úměrná velikosti rychlosti;  $k$  je konstanta). Hmotný bod se bude pohybovat pod vlivem síly  $\vec{F} = m\vec{a}$ , která bude mít opačný směr ve srovnání s odporovou silou  $\vec{F}_0$ .

Pohybová rovnice vycházející z druhého pohybového zákona tedy bude mít tvar:  $ma = F_0$ , tj.  $ma = -kv$ . Zatím máme v rovnici dvě neznámé - velikost rychlosti  $v$  a velikost zrychlení  $a$ . Zrychlení lze ale vyjádřit pomocí rychlosti:  $a = \frac{dv}{dt}$ . Po dosazení do pohybové rovnice dostaneme:  $m \frac{dv}{dt} = -kv$ . Nejjednodušší způsob, jak tuto diferenciální rovnici vyřešit je tzv. **separace proměnných**. Matematicky tento postup není zcela v pořádku proto, že pro matematiky je symbol  $\frac{dv}{dt}$  nedělitelný. Vzhledem k tomu, že připomíná zlomek, tak s ním (stejně jako už několikrát v tomto textu) tak budeme pracovat. Separace proměnných znamená převést na jednu stranu rovnice jednu neznámou, na druhou stranu rovnice druhou - pokud to jde. Navíc je nutné, aby členy  $dv$  ani  $dt$  nebyly ve jmenovateli zlomku.

Výraz  $m \frac{dv}{dt} = -kv$  tedy upravíme na tvar  $m \frac{dv}{v} = -k \cdot dt$ . Nyní připišeme k oběma stranám rovnice integrál

(rovnají-li se integrandy, musí se rovnat i primitivní funkce - až na konstantu). Dostaneme tedy  $\int m \frac{dv}{v} = \int -k \cdot dt$

a dále upravujeme:

$$\int m \frac{dv}{v} = \int -k \cdot dt$$

$$m \int \frac{dv}{v} = -k \int dt$$

$$m \ln|v| = -kt + C \quad (\text{konstantu stačí přidat na jednu stranu rovnice})$$

$$\ln|v| = -\frac{k}{m}t + \frac{C}{m}$$

$$v(t) = e^{-\frac{k}{m}t + \frac{C}{m}} = e^{-\frac{k}{m}t} \cdot e^{\frac{C}{m}} \quad (\text{podíl konstant } C \text{ a } m \text{ je konstanta a proto i } e^{\frac{C}{m}} \text{ je konstanta})$$

S využitím počátečních podmínek dostáváme:  $v(0) = v_0 = e^{-\frac{k}{m} \cdot 0} \cdot K$ , odkud  $K = v_0$ . Pro průběh velikosti rychlosti v závislosti na čase tedy dostáváme  $v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m} t}$ . Velikost rychlosti tedy exponenciálně klesá.

Určit průběh velikosti zrychlení je triviální:  $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( v_0 e^{-\frac{k}{m} t} \right) = -v_0 \frac{k}{m} e^{-\frac{k}{m} t}$ . Pohyb bude tedy zpomalený

(zrychlení je záporné) a velikost zrychlení bude exponenciálně klesat.

Pro určení průběhu uražené dráhy v závislosti na čase, je nutné si připomenout vztah mezi velikostí rychlosti a dráhou. Platí  $v = \frac{ds}{dt}$ , odkud  $s = \int v \cdot dt$ . Po dosazení a výpočtu dostaneme:

$$s(t) = \int v_0 e^{-\frac{k}{m} t} \cdot dt = v_0 \int e^{-\frac{k}{m} t} \cdot dt = -v_0 \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m} t} + C_2.$$

Vzhledem k tomu, že  $s(0) = 0$ , tak lze psát

$$s(0) = 0 = -v_0 \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m} \cdot 0} + C_2.$$

Odtud  $C_2 = v_0 \frac{m}{k}$  a tedy pro závislost uražené dráhy na čase dostáváme:

$$s(t) = -v_0 \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m} t} + v_0 \frac{m}{k} = v_0 \frac{m}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right).$$

#### 8.8.4.2 Pohyb parašutisty

Pohyb parašutisty, který vyskočí z letadla, je další ukázkou možnosti využití diferenciálních rovnic ve fyzice. Část úlohy je triviální, neboť její řešení vychází ze znalostí mechaniky tekutin. Další část úlohy se ale už neobejde bez znalosti diferenciálních rovnic.

**Příklad:** Parašutista o hmotnosti  $m$  vyskočil z letadla. První část jeho pohybu lze považovat za volný pád. Těsně před otevřením padáku se pohyboval rychlostí o velikosti  $v_0$ . Určete velikost rychlosti, kterou dopadne na zem a průběh velikosti rychlosti v závislosti na čase (od okamžiku otevření padáku). Odporová síla vzduchu je úměrná druhé mocnině velikosti rychlosti.

**Řešení:** Na parašutistu po výskoku z letadla působí pouze tíhová síla  $\overline{F_G}$ . Země (pohybuje se totiž volným pádem a tedy velikost odporové síly je vzhledem k velikosti tíhové síly zanedbatelná). Po otevření padáku začne působit opačným směrem odporová síla  $\overline{F_0}$  vzduchu. Pohybová rovnice tedy bude mít tvar:  $\overline{F} = \overline{F_G} + \overline{F_0}$ , skalárně  $F = F_G - F_0$ . Velikost tíhové síly bude konstantní (výška, z níž parašutisté skáčou je zanedbatelná ve srovnání s rozměry Země), velikost odporové síly se bude postupně zvětšovat. Maximální rychlosti parašutista dosáhne v okamžiku, kdy se velikosti obou těchto sil vyrovnají a dále se bude pohybovat stálou rychlostí  $v_{\text{dopadu}}$ . Tedy  $F_G = F_0$  a po dosazení  $mg = Cv_{\text{dopadu}}^2$ , odkud pro velikost rychlosti dopadu dostáváme

$$v_{\text{dopadu}} = \sqrt{\frac{mg}{C}}.$$

Pro průběh rychlosti v závislosti na čase je nutné řešit pohybovou rovnici  $F = F_G - F_0$ , do níž lze dosadit  $ma = mg - Cv^2$ . Vyjádříme-li velikost zrychlení pomocí velikosti rychlosti, lze psát  $m \frac{dv}{dt} = mg - Cv^2$  a rovnici dále upravovat.

$$m \frac{dv}{mg - Cv^2} = dt \quad (\text{povedla se nám tedy separace proměnných})$$

$$\int m \frac{dv}{mg - Cv^2} = \int dt$$

$$\int m \frac{dv}{mg \left( 1 - \frac{C}{mg} v^2 \right)} = \int dt$$

$$\frac{1}{g} \int \frac{dv}{1 - \frac{C}{mg} v^2} = \int dt$$



$$\frac{1}{g} \int \frac{dv}{1 - \left( \sqrt{\frac{C}{mg}} v \right)^2} = \int dt$$

Tento integrál lze řešit rozkladem na parciální zlomky (viz odstavec 5.2.3.3), ale tím nebudeme úlohu komplikovat. Využijeme tabulkového integrálu  $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + K$ ;  $K \in \mathbb{R}$ . V našem případě je nutné tedy

udělat substituci  $u = \sqrt{\frac{C}{mg}} v$  a tedy  $\frac{du}{dv} = \sqrt{\frac{C}{mg}}$ , odkud  $dv = \frac{du}{\sqrt{\frac{C}{mg}}}$ .

$$\frac{1}{g \sqrt{\frac{C}{mg}}} \int \frac{du}{1-u^2} = \int dt$$

$$\frac{1}{g \sqrt{\frac{C}{mg}}} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + K = t$$

$$\frac{1}{2 \sqrt{\frac{gC}{m}}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{C}{mg}} v}{1 - \sqrt{\frac{C}{mg}} v} \right| + K = t$$

$$\ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{C}{mg}} v}{1 - \sqrt{\frac{C}{mg}} v} \right| = (t-K) 2 \sqrt{\frac{gC}{m}}$$

$$\frac{1 + \sqrt{\frac{C}{mg}} v}{1 - \sqrt{\frac{C}{mg}} v} = e^{(t-K) 2 \sqrt{\frac{gC}{m}}}$$

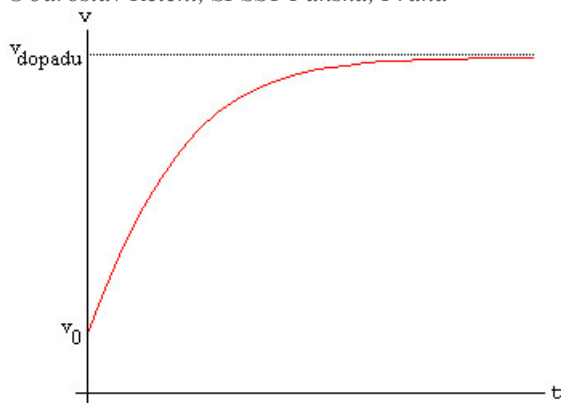
$$v(t) = \frac{e^{(t-K) 2 \sqrt{\frac{gC}{m}}} - 1}{\sqrt{\frac{C}{mg}} \left( e^{(t-K) 2 \sqrt{\frac{gC}{m}}} + 1 \right)} = \frac{e^{2 \sqrt{\frac{gC}{m}} t} \cdot K_1 - 1}{\sqrt{\frac{C}{mg}} \left( e^{2 \sqrt{\frac{gC}{m}} t} \cdot K_1 + 1 \right)}, \text{ kde } K_1 = e^{-2K \sqrt{\frac{gC}{m}}}.$$

Počáteční podmínky:  $v(0) = v_0$ ; po dosazení:  $v(0) = v_0 = \frac{e^{2 \sqrt{\frac{gC}{m}} \cdot 0} \cdot K_1 - 1}{\sqrt{\frac{C}{mg}} \left( e^{2 \sqrt{\frac{gC}{m}} \cdot 0} \cdot K_1 + 1 \right)} = \frac{K_1 - 1}{\sqrt{\frac{C}{mg}} (K_1 + 1)}$  a tedy

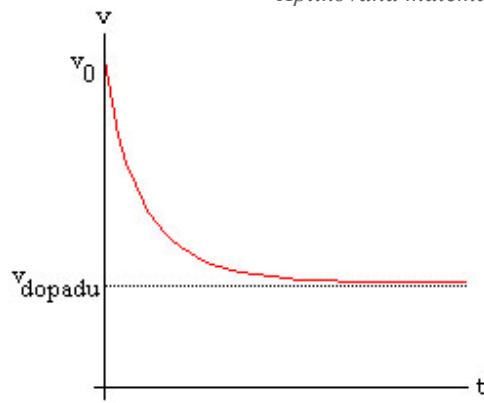
$$K_1 = \frac{1 + v_0 \sqrt{\frac{C}{mg}}}{1 - v_0 \sqrt{\frac{C}{mg}}}. \text{ Takže } v(t) = \frac{e^{2 \sqrt{\frac{gC}{m}} t} \cdot \left( 1 + v_0 \sqrt{\frac{C}{mg}} \right) - 1 + v_0 \sqrt{\frac{C}{mg}}}{\sqrt{\frac{C}{mg}} \left( e^{2 \sqrt{\frac{gC}{m}} t} \cdot \left( 1 + v_0 \sqrt{\frac{C}{mg}} \right) + 1 - v_0 \sqrt{\frac{C}{mg}} \right)}.$$

Tato funkce vypadá na první pohled velmi složitě, ale její graf přesně odpovídá fyzikální zkušenosti: velikost rychlosti se bude zvětšovat exponenciálně, až dosáhne hodnoty  $v_{\text{dopadu}}$  a na této hodnotě již setrvá (viz obr. 134). Pokud bude počáteční velikost rychlosti příliš velká, velikost rychlosti parašutisty se bude naopak zmenšovat, do té doby, dokud nedosáhne velikosti rychlosti  $v_{\text{dopadu}}$  (viz obr. 135). Každopádně musí platit

$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v_{\text{dopadu}}$ , což je jednoduchý příklad na výpočet limity v nevlastním bodě.



obr. 134



obr. 135

### 8.8.4.3 Kmitavý pohyb

**Příklad:** Hmotný bod o hmotnosti  $m$  byl uveden do kmitavého pohybu na pružině s tuhostí  $k$  v odporujícím prostředí. Přitom na něj působí odporová síla, jejíž velikost je přímo úměrná velikosti rychlosti. (Jedná se tedy o pohyb harmonického oscilátoru v odporujícím prostředí.) Najděte závislost uražené dráhy, rychlosti a zrychlení na čase.

**Řešení:** Na pohybující se hmotný bod působí odporová síla  $\vec{F}_o$ , pro jejíž velikost platí  $F_o = -Cv$  (to je ve shodě se zadáním: velikost síly roste s kvadrátem velikosti rychlosti;  $k$  je konstanta). Hmotný bod se bude pohybovat pod vlivem síly  $\vec{F} = m\vec{a}$ , která bude mít opačný směr ve srovnání s odporovou silou  $\vec{F}_o$ . Sílu pružnosti  $F_p = -kx$  lze v tomto případě chápat též jako odporující sílu.

Pohybová rovnice vycházející z druhého pohybového zákona tedy bude mít tvar:  $ma = F_o + F_p$ , tj.  $ma = -Cv - kx$ . V rovnici jsou tři neznámé - velikost rychlosti  $v$ , velikost zrychlení  $a$  a poloha hmotného bodu  $x$ . Metoda separace proměnných nám v tomto případě nepomůže - nepodaří se nám převést rovnici na podobný tvar jako v příkladě z odstavce 8.8.4.1. Proto je nutné postupovat jinak.

Určitě pomůže vyjádřit všechny neznámé pomocí jedné jediné - pomocí polohy  $x$  hmotného bodu. Víme, že platí  $v = \frac{dx}{dt}$ . Protože  $a = \frac{dv}{dt}$  lze psát  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ . Fyzici, elektrotechnici, ... mají zkušenosti s podobnými úlohami a proto vědí, co má vyjít. Mají představu o globálním výsledku úlohy - musí jen dopočítat konstanty.

Proto budeme předpokládat řešení této úlohy ve tvaru  $x = Ae^{-\lambda t}$ , kde  $A$  je amplituda výchylky a  $\lambda$  konstanta charakterizující útlum oscilátoru. (Není to vlnová délka!!!)

Vzhledem k tomu, že budeme potřebovat první a druhou derivaci polohy podle času, vypočteme je. Pro první derivaci platí:  $\frac{dx}{dt} = -\lambda Ae^{-\lambda t}$ . Na základě první derivace lze určit druhou derivaci:  $\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 Ae^{-\lambda t}$ . Po dosazení do pohybové rovnice postupně dostaneme:

$$ma = -Cv - kx$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -C \frac{dx}{dt} - kx$$

$$m\lambda^2 Ae^{-\lambda t} = -C(-\lambda Ae^{-\lambda t}) - kAe^{-\lambda t}$$

$$m\lambda^2 = C\lambda - k \quad (\text{výraz } Ae^{-\lambda t} \text{ lze na obou stranách rovnice vytknout a následně jím rovnicí vydělit})$$

$$m\lambda^2 - C\lambda + k = 0 \quad (\text{toto je tzv. charakteristická rovnice pro koeficient } \lambda; \text{ vše ostatní v rovnici jsou konstanty})$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{C \pm \sqrt{C^2 - 4mk}}{2m} = \frac{C \pm \sqrt{4m^2 \left( \frac{C^2}{4m^2} - \frac{k}{m} \right)}}{2m} = \frac{C}{2m} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

Výraz  $\frac{k}{m}$  známe - ten udává u harmonického oscilátoru druhou mocninu jeho vlastní úhlové frekvence. Proto ho

tak označíme:  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ . Výraz  $\frac{C^2}{4m^2} = \left( \frac{C}{2m} \right)^2$  tedy musí mít také rozměr kvadrátu úhlové frekvence; je to člen,

který je zodpovědný za ztráty. Označme ho  $b = \frac{C}{2m}$ . Nyní lze koeficient  $\lambda$  psát ve tvaru:  $\lambda_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ .

Označíme-li navíc  $\omega^2 = b^2 - \omega_0^2$ , lze psát:  $\lambda_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} = b \pm \omega$

Je-li  $b > \omega_0$ , je  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$  (a navíc oba jsou kladné) a lze pro  $x$  psát:

$x = A_1 e^{-(b+\omega)t} + A_2 e^{-(b-\omega)t} = A_1 e^{-(b+\omega)t} + A_2 e^{-(b-\omega)t}$ . Tento případ je pro další zkoumání nezajímavý - jedná se o tzv. nadkritické tlumení, pohyb není periodický. Návrat do rovnovážné polohy trvá dlouhý čas (viz obr. 136).

Je-li  $b = \omega_0$ , je  $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$  (dvojnásobný kořen). Původní předpoklad řešení je nutné v tomto případě rozšířit na  $x = (A_1 + A_2 t)e^{-bt}$ . Po dosazení dostaneme:  $x = (A_1 + A_2 t)e^{-bt}$ . Jedná se o mezní případ: oscilátor se ze nejkratší možný čas vrátí do rovnovážné polohy, z níž už nevyjde (viz obr. 137).

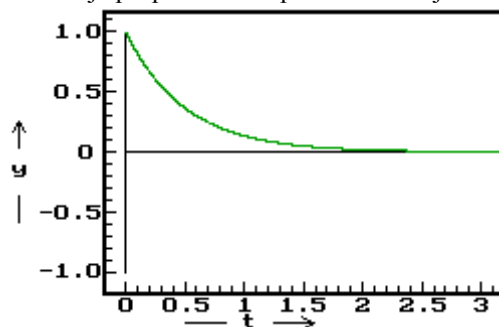
Je-li  $b < \omega_0$ , je  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ . Můžeme tedy pro výchylku  $x$  psát:

$x = A_1 e^{-(b+i\omega)t} + A_2 e^{-(b-i\omega)t} = e^{-bt} (A_1 e^{-i\omega t} + A_2 e^{i\omega t})$ . V tomto případě se jedná o periodický pohyb harmonického oscilátoru s tlumením. Právě uvedený vztah na první pohled kmitání harmonického oscilátoru nepřipomíná. S využitím vztahů  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  a  $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$  (viz odstavec 3.1.5) lze vztah pro výchylku harmonického oscilátoru přepsat:

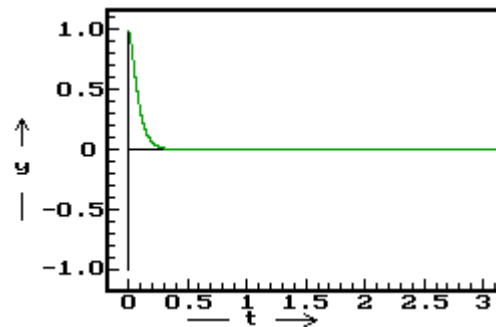
$x = e^{-bt} (A_1 (\cos \omega t - i \sin \omega t) + A_2 (\cos \omega t + i \sin \omega t)) = e^{-bt} ((A_1 + A_2) \cos \omega t + i(A_2 - A_1) \sin \omega t)$ . Tento vztah kmitání mechanického oscilátoru už připomíná (viz obr. 138). Činitel  $A_1 + A_2$  odpovídá amplitudě kmitavého pohybu a výraz  $e^{-bt}$  představuje útlum vlivem prostředí.

Pro další výpočty, předpovědi pohybu tohoto typu oscilátoru, ... se vždy uvažuje pouze reálná část komplexního čísla (resp. Komplexní funkce), které je řešením zadané diferenciální rovnice. Zápis pomocí komplexních čísel byl použit pro snadnější počítání. S využitím předpokládaného řešení ve tvaru  $x = Ae^{-\lambda t}$  jsme už derivování proměnné  $x$  podle času převedli v podstatě na násobení činitelem  $e^{-\lambda t}$ . Operace s výslednou funkcí ve tvaru komplexních čísel jsou také jednodušší než kdybychom počítali pouze s čísly reálnými.

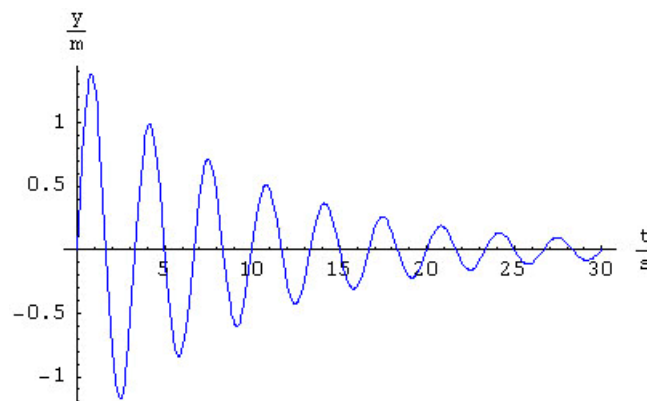
Na tomto příkladu je také vidět použití komplexních čísel při výpočtech s fyzikální (tedy i mechanickou, elektrotechnickou, ...) tematikou. S komplexními čísly se dobře pracuje a např. vyjádření výchylky kmitajícího oscilátoru je při použití komplexních čísel jednodušší.



obr. 136



obr. 137

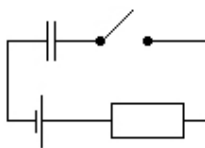


obr. 138

### 8.8.5 Nabíjení kondenzátoru

Diferenciální rovnice popisují také řadu dějů z elektřiny a magnetismu. Fyzikálně důležitým jevem je nabíjení kondenzátoru; tento jev lze přitom popsat relativně jednoduchou diferenciální rovnicí, kterou lze analyticky vyřešit.

**Zadání:** Odvodte časovou závislost průběhu elektrického napětí měřeného na deskách kondenzátoru s kapacitou  $C$  při jeho nabíjení a časovou závislost elektrického proudu, který při nabíjení prochází obvodem. Kondenzátor je připojen s ochranným rezistorem o odporu  $R$  ke zdroji stejnosměrného napětí  $U_0$  (viz obr. 139).



obr. 139

**Řešení:** Po zapnutí vypínače zobrazeného ve schématu obvodu na obr. 139 začne obvodem procházet elektrický proud. To znamená, že elektrostatické síly budou postupně přenášet elektricky nabitě částice z elektrod zdroje napětí na kondenzátor. Označíme-li napětí na kondenzátoru, jehož časový průběh chceme nalézt, symbolem  $u$ , bude okamžitá hodnota elektrického proudu  $i$ , který teče obvodem, dána vztahem

$$i = \frac{U_0 - u}{R}. \quad (99)$$

Elektrické napětí zdroje se totiž přerozdělí na kondenzátor a ochranný rezistor. V každém časovém okamžiku tak musí být součet napětí na rezistoru a napětí na kondenzátoru roven napětí zdroje.

Elektrický náboj na kondenzátoru se za dobu  $\Delta t$  zvýší o hodnotu  $\Delta Q$ , která je definovaná vztahem

$$\Delta Q = i \cdot \Delta t. \quad (100)$$

Za stejnou dobu tedy napětí na kondenzátoru vzroste o hodnotu  $\Delta u$  danou vztahem

$$\Delta u = \frac{\Delta Q}{C}. \quad (101)$$

Vzhledem k tomu, že chceme vyjádřit závislost napětí na kondenzátoru na čase, dosadíme postupně vztahy (100) a (99) do vztahu (101). Tak postupně dostaneme:  $\Delta u = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{i \cdot \Delta t}{C} = \frac{(U_0 - u) \cdot \Delta t}{RC}$ . Tuto rovnici můžeme psát také ve tvaru

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{U_0 - u}{RC}. \quad (102)$$

Výše provedené úvahy o změně náboje na deskách kondenzátoru a o nárůstu napětí na kondenzátoru lze provádět takto obecně pouze za předpokladu, že uvažovaná doba  $\Delta t$  bude velmi malá ve srovnání s typickou dobou, po kterou se kondenzátor nabíjí. Proto je matematicky přesnější přepsat rovnici (102) ve tvaru s diferenciály:

$$\frac{du}{dt} = \frac{U_0 - u}{RC}. \quad (103)$$

Provedená úprava vychází z definice derivace funkce, kterou můžeme v tomto případě psát ve tvaru

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt}.$$

Záměna „trojúhelníčku“ v podílech fyzikálních vztahů za „děčka“, kterou fyzikové běžně provádějí, vychází právě z definice derivace funkce pomocí limity.

Rovnice (103) je diferenciální rovnice, kterou můžeme vyřešit metodou **separace proměnných**. Pomocí ekvivalentních úprav přepíšeme rovnici do tvaru  $\frac{du}{U_0 - u} = \frac{dt}{RC}$ .

Tato úprava není z matematického hlediska zcela v pořádku, protože  $\frac{du}{dt}$  označuje symbol pro diferenciál funkce a jako takový nemůže být rozdělován. Nicméně fakt, že připomíná zlomek, může pomoci s fyzikálním vyřešením úlohy. Hledáme totiž takovou závislost napětí na čase, která z fyzikálního hlediska musí být spojitá, musí mít spojitě derivace, ... Pokud bychom rovnici řešili čistě matematicky, bylo by řešení výrazně komplikovanější, protože bychom museli ověřovat existenci řešení, jeho jednoznačnost, parametry hledané funkce, ...

Nyní rovnici, kterou jsme úpravou získali, zintegrujeme. Dostaneme tak rovnici ve tvaru  $\int \frac{du}{U_0 - u} = \int \frac{dt}{RC}$ . Po naznačené integraci získáme rovnici  $-\ln(U_0 - u) = \frac{t}{RC} + K$ , kde  $K$  je libovolná reálná konstanta.

Správně by měla být konstanta přidána na obě strany rovnice (tj. za obě zintegrované funkce). Uvědomíme-li si ale, že konstantu můžeme z jedné strany rovnice převést na druhou, můžeme psát konstantu pouze jednu.

Vzhledem k tomu, že hledáme časovou závislost napětí  $u$ , musíme tuto veličinu z rovnice osamostatnit. První úprava poslední rovnice je poměrně jednoduchá:  $\ln(U_0 - u) = -\frac{t}{RC} - K$ . Nyní převedeme rovnici na ekvivalentní tvar logaritmické funkce:  $U_0 - u = e^{-\frac{t}{RC} - K}$ , kde  $e$  označuje Eulerovo číslo. Vyjádřit napětí  $u$  je nyní snadné:  $u = U_0 - e^{-\frac{t}{RC} - K}$ . Nyní ještě přepíšeme lépe člen s exponenciální funkcí:  $e^{-\frac{t}{RC} - K} = e^{-\frac{t}{RC}} \cdot e^{-K} = e^{-\frac{t}{RC}} \cdot A$ , kde  $A$  je reálná konstanta.

Eulerovo číslo umocněno na konstantu (v našem případě na konstantu  $K$ ) je opět konstanta (v našem případě konstanta  $A$ ).

Dostali jsme tak řešení rovnice (103) ve tvaru

$$u = U_0 - A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (104)$$

Nyní zbývá na základě počátečních podmínek určit konstantu  $A$ . Počáteční podmínky jsou ale jednoduché: kondenzátor byl na začátku uvažovaného děje nenabitý, tj.  $u(0) = 0$ . Dosazením této podmínky do rovnice (104) dostaneme:  $0 = U_0 - A \cdot e^{-\frac{0}{RC}} = U_0 - A \cdot 1 = U_0 - A$ . Odtud tedy vyplývá, že  $A = U_0$ . Předtím, než napíšeme hledanou závislost elektrického napětí na deskách kondenzátoru na čase v závěrečné podobě, uděláme jedno označení:

$$\tau = RC. \quad (105)$$

Symbolem  $\tau$  se označuje tzv. **časová konstanta**; její jednotkou je sekunda a tato veličina charakterizuje rychlost nabíjení kondenzátoru (resp. vybíjení kondenzátoru). Nyní již můžeme psát rovnici (104) ve tvaru

$$u = U_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (106)$$

Ze vztahu (106) je zřejmé, že jak konstanta  $A$ , tak časová konstanta  $\tau$  jsou definovány korektně. Konstanta  $A$  je rovna elektrickému napětí zdroje a to je fyzikálně správně. Ve vztahu (106) je jí možné vytknout a v závorce zůstane bezrozměrná veličina. Kdyby konstanta  $A$  měla význam jiné fyzikální veličiny, než je elektrické napětí, nedával by vztah (106) fyzikálně smysl.

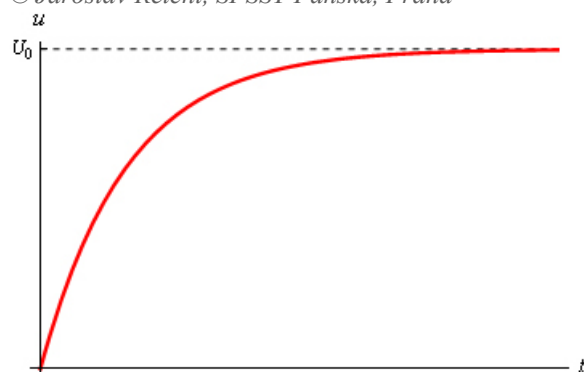
Casová konstanta má jednotky skutečně sekundy, protože argument jakékoliv funkce (a tedy i exponenciální funkce) musí být bezrozměrný.

S využitím vztahu (99), do kterého dosadíme napětí na deskách kondenzátoru ve tvaru (106), získáme časový průběh elektrického proudu při nabíjení kondenzátoru. Postupnými úpravami dostaneme:

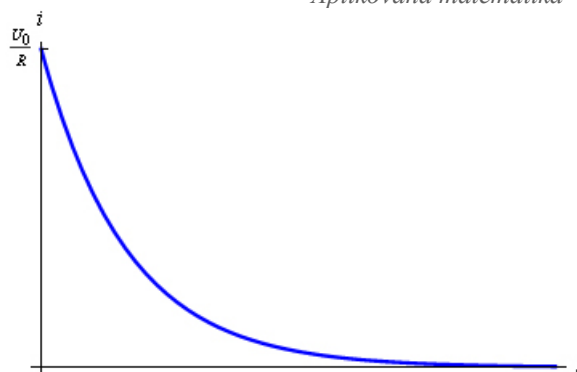
$i = \frac{U_0 - U_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)}{R} = \frac{U_0 - U_0 + U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}{R}$ . Elektrický proud při nabíjení kondenzátoru tedy můžeme popsat vztahem

$$i = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (107)$$

Grafy závislostí elektrického napětí a elektrického proudu na čase jsou zobrazeny na obr. 140 a obr. 141. Křivost grafů (a tedy i doba, která je nutná na dosažení již neměnného stavu elektrického napětí resp. elektrického proudu) je dána časovou konstantou. To znamená, že tato doba i křivost grafů závisejí přímo úměrně na kapacitě nabíjeného kondenzátoru a na odporu ochranného rezistoru.



obr. 140

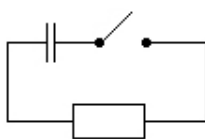


obr. 141

### 8.8.6 Vybíjení kondenzátoru

Vybíjení kondenzátoru je velmi podobná úloha jako nabíjení kondenzátoru, která byla popsána v odstavci 8.8.5. Proto nebude řešení uvedeno tak detailně, jako v případě nabíjení kondenzátoru.

**Zadání:** Odvoďte časovou závislost průběhu elektrického napětí měřeného na deskách kondenzátoru s kapacitou  $C$  při jeho vybíjení a časovou závislost elektrického proudu, který při vybíjení prochází obvodem. Kondenzátor je nabit na napětí  $U_0$  a je připojen k ochrannému rezistoru o odporu  $R$  (viz obr. 142).



obr. 142

**Řešení:** Sepneme-li vypínač v obvodu, jehož schéma je zobrazeno na obr. 142, začne se kondenzátor vybíjet. To znamená, že elektrostatická síla začne přenášet nabitě částice z jedné desky kondenzátoru přes ochranný rezistor na druhou desku kondenzátoru tak, aby se elektrický náboj na obou deskách kondenzátoru vyrovnal. V každém časovém okamžiku pak bude pro okamžitou hodnotu napětí  $u$  na kondenzátoru a okamžitou hodnotu napětí  $u_R$  na rezistoru platit vztah

$$u_R + u = 0. \quad (108)$$

V elektrickém obvodu je pouze rezistor a kondenzátor; zdroj v něm není.

Okamžitou hodnotu napětí na rezistoru můžeme rozepsat pomocí Ohmova zákona pro část obvodu ve tvaru

$$u_R = R \cdot i. \quad (109)$$

Okamžitou hodnotu elektrického proudu  $i$  získáme podobnou úvahou jako v odstavci 8.8.5, kde jsme řešili nabíjení kondenzátoru. Přenese-li elektrostatická síla za dobu  $\Delta t$  elektrický náboj  $\Delta Q$ , projde obvodem

elektrický proud  $i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ . Průchodem tohoto proudu se ale napětí na kondenzátoru změní o hodnotu  $\Delta u$  danou

vztahem  $\Delta u = \frac{\Delta Q}{C}$ . Můžeme proto okamžitou hodnotu elektrického proudu psát ve tvaru

$$i = \frac{C \cdot \Delta u}{\Delta t}. \quad (110)$$

Rovnici (108) tak můžeme s využitím vztahů (109) a (110) psát ve tvaru  $RC \frac{\Delta u}{\Delta t} + u = 0$ . Dostáváme tedy diferenciální rovnici

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = 0, \quad (111)$$

která je velmi podobná rovnici (103). Proto bude mít i podobné řešení.

I tuto rovnici můžeme přepsat do tvaru  $\frac{du}{u} = -\frac{dt}{RC}$ , abychom ji mohli řešit **separací proměnných**. Po zintegrování získáme rovnici  $\ln u = -\frac{t}{RC} + K$ , kde  $K$  je libovolná reálná konstanta. Získanou rovnici převedeme

na ekvivalentní tvar  $u = e^{-\frac{t}{RC} + K}$ , kde  $e$  označuje Eulerovo číslo. Dalším zjednodušením získáme rovnici

$$u = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (112)$$

S využitím počáteční podmínky pro okamžitou hodnotu elektrického napětí ve tvaru  $u(0) = U_0$  získáme po dosazení do rovnice (112) pro konstantu  $A$  vztah  $A = U_0$ . Okamžitou hodnotu elektrického napětí na kondenzátoru tedy můžeme psát ve tvaru

$$u = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (113)$$

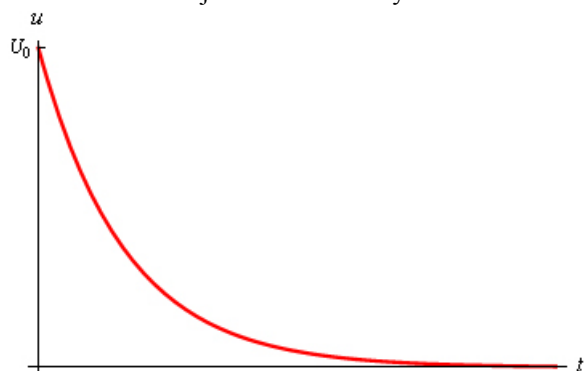
kde  $\tau$  je časová konstanta definovaná vztahem (105).

Okamžitou hodnotu elektrického proudu můžeme získat pomocí vztahu (110), který přepíšeme ve tvaru  $i = C \cdot \frac{du}{dt}$ . Po dosazení ze vztahu (113) postupně dostaneme  $i = C \cdot U_0 \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = C \cdot U_0 \cdot \left(-\frac{1}{R \cdot C}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

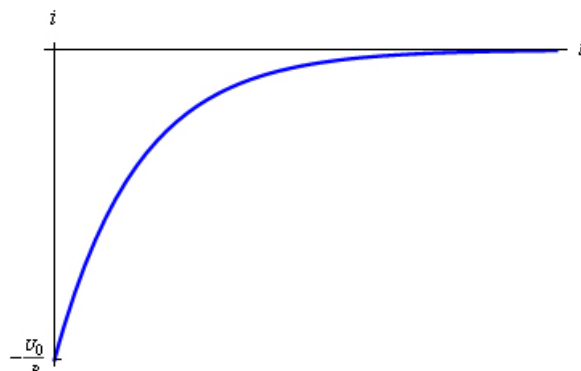
Dostáváme tedy finální tvar časové závislosti elektrického proudu procházejícího obvodem

$$i = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (114)$$

Grafické znázornění hledaných závislostí popsaných vztahy (113) a (114) jsou zobrazeny na obr. 143 a obr. 144. Srovnáme-li grafy zobrazující průběh elektrického proudu při nabíjení kondenzátoru a při vybíjení kondenzátoru (tj. grafy zobrazené na obr. 141 a obr. 144), zjistíme, že elektrický proud tekoucí obvodem při vybíjení kondenzátoru má opačnou polaritu ve srovnání s elektrickým proudem tekoucím obvodem při nabíjení kondenzátoru. To je ale ve shodě s fyzikální teorií.



obr. 143



obr. 144

### 8.8.7 Elektrický proud procházející cívkou

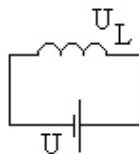
Také další úloha je z oblasti elektřiny a magnetismu a ačkoliv první část jejího řešení bude podobná jako řešení úlohy z odstavce 0, určitý rozdíl zde bude.

**Zadání:** Cívku o indukčnosti  $L$  připojíme ke zdroji stejnosměrného napětí. Jaký je průběh elektrického proudu procházejícího cívkou v závislosti na čase? Najděte tuto závislost.

**Řešení:** Po připojení cívky ke zdroji stejnosměrného napětí  $U$  (schéma obvodu je zobrazeno na obr. 145) začne cívkou procházet elektrický proud  $I$ . Jeho hodnota se bude postupně z nuly zvyšovat, což znamená, že cívkou bude procházet časově proměnný proud. Ten bude zdroje časově proměnného magnetického pole (tj. nestacionárního pole), a proto se na cívce bude indukovat napětí  $U_i$ , jehož hodnota je dána matematickým

vyjádřením Faradayova zákona elektromagnetické indukce  $U_i = \frac{d\Phi}{dt}$ . Polarita tohoto napětí je přitom opačná

než je polarita zdroje napětí. V důsledku indukce tohoto napětí bude cívkou procházet indukovaný proud proti směru proudu, který svým magnetickým polem indukované napětí (resp. indukovaný proud) vyvolal; tedy přesně podle Lenzova zákona.



obr. 145

Považujeme-li indukčnost cívky za konstantu, můžeme psát  $U_i = \frac{d(LI)}{dt} = L \frac{dI}{dt}$ . Napětí na cívce  $U_L$  tedy

bude dáno vztahem  $U_L = U - U_i = U - L \frac{dI}{dt}$ . V zadání nejsou údaje o vnitřním odporu zdroje napětí, budeme

tedy uvažovat pouze svorkové napětí zdroje. Cívka je připojená ke zdroji stejnosměrného napětí, a proto bude mít vlastnosti rezistoru o odporu  $R$ . Indukčnost cívky se projeví pouze při indukci napětí v cívce. Můžeme tedy

psát rovnici  $RI = U - L \frac{dI}{dt}$ , kterou můžeme přepsat do tvaru  $RI + L \frac{dI}{dt} = U$ . Dostáváme tedy rovnici, která je

podobná rovnici z úlohy v odstavci 0, ale nemá nulovou pravou stranu (tj. obsahuje absolutní člen, který nezávisí na hledané proměnné).

Řešení této rovnice provedeme ve dvou krocích: nalezneme řešení rovnice s nulovou pravou stranou a k nalezenému řešení přidáme jedno řešení rovnice s pravou stranou.

Rovnici  $RI + L \frac{dI}{dt} = 0$  budeme řešit tak, že budeme předpokládat řešení této rovnice ve tvaru  $I = I_0 e^{\alpha t}$ .

Do řešené rovnice budeme potřebovat dosadit první derivaci proudu  $I$  podle času  $t$ , proto si tuto derivaci nejdříve vypočteme:  $\frac{dI}{dt} = I_0 \alpha e^{\alpha t}$ . Dosazením do původní rovnice dostaneme rovnici  $RI_0 e^{\alpha t} + LI_0 \alpha e^{\alpha t} = 0$ . Po vydělení nenulovým výrazem  $I_0 e^{\alpha t}$  dostaneme charakteristickou rovnici pro koeficient  $\alpha$  ve tvaru  $R + L\alpha = 0$ . Odtud dostáváme  $\alpha = -\frac{R}{L}$ . Obecné řešení rovnice  $RI + L \frac{dI}{dt} = 0$  máme tedy ve tvaru  $I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ , kde  $I_0$  je konstantní reálné číslo.

Při hledání řešení původní rovnice  $RI + L \frac{dI}{dt} = U$  musíme nalézt tzv. partikulární řešení této rovnice.

Použijeme **metodu variace konstant**. Budeme proto nyní předpokládat, že činitel  $I_0$  vystupující v obecném řešení rovnice bez pravé strany není konstantní, ale závisí také na čase:  $I_2 = I_0(t) e^{-\frac{R}{L}t}$ . Vzhledem k tomu, že budeme chtít toto řešení opět dosadit do řešené rovnice, připravíme si první derivaci, která v rovnici vystupuje:

$\frac{dI_2}{dt} = \frac{dI_0(t)}{dt} e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L} I_0(t) e^{-\frac{R}{L}t}$ . Dosazením do rovnice dostaneme:

$RI_0(t) e^{-\frac{R}{L}t} + L \left( \frac{dI_0(t)}{dt} e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L} I_0(t) e^{-\frac{R}{L}t} \right) = U$ . Po roznásobení závorky dostáváme rovnici ve tvaru

$RI_0(t) e^{-\frac{R}{L}t} + L \frac{dI_0(t)}{dt} e^{-\frac{R}{L}t} - RI_0(t) e^{-\frac{R}{L}t} = U$  a po úpravě máme  $L \frac{dI_0(t)}{dt} e^{-\frac{R}{L}t} = U$ . Tuto rovnici už vyřešíme

relativně snadno. Upravíme ji do tvaru  $\frac{dI_0(t)}{dt} = \frac{U}{L} e^{\frac{R}{L}t}$  a zintegrujeme. Dostaneme tedy

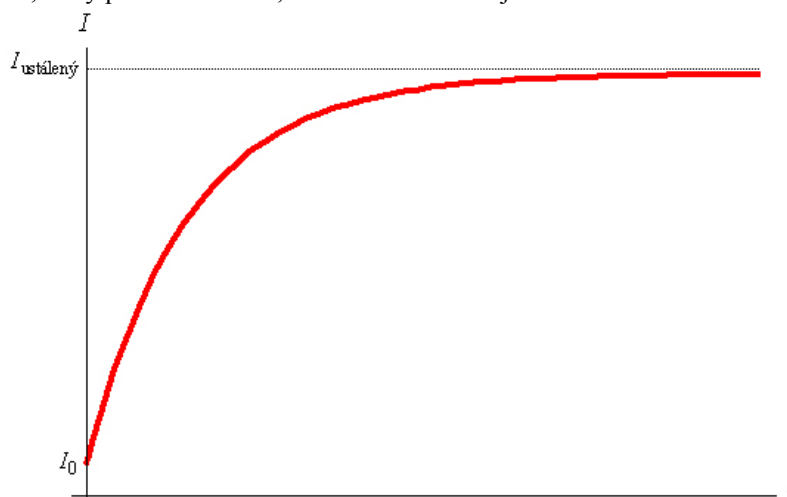
$I_0(t) = \frac{LU}{R} e^{\frac{R}{L}t} + K = \frac{U}{R} e^{\frac{R}{L}t} + K$ , kde  $K$  je reálná konstanta.

Dostáváme tedy obecné řešení rovnice  $RI + L \frac{dI}{dt} = U$  ve tvaru  $I = \left( \frac{U}{R} e^{\frac{R}{L}t} + K \right) e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R} + K e^{-\frac{R}{L}t}$ .

Vzhledem k tomu, že elektrický proud v čase 0 měl obecně hodnotu  $I_0 = konst.$ , můžeme určit hodnotu konstanty  $K$ . Dosazením do obecného řešení dostaneme rovnici  $I_0 = \frac{U}{R} + K e^{-\frac{R}{L} \cdot 0}$ , z níž získáme  $K = I_0 - \frac{U}{R}$ .

Obecné řešení dané diferenciální rovnice tedy je  $I = \frac{U}{R} + \left( I_0 - \frac{U}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t}$ .

Průběh proudu, který prochází cívkou, v závislosti na čase je zobrazen na obr. 146.



obr. 146



**8.9 Využití diferenciálního a integrálního počtu k řešení úloh**

V tomto odstavci bude vyřešeno vzorově několik úloh, při jejichž řešení se s výhodou využije diferenciální nebo integrální počet funkce jedné proměnné. V závěru kapitoly jsou připraveny i příklady neřešené.

**Příklad:** Jak velká je síla potřebná ke zdvižení rovinného stavidla, které je pod tlakem vody, je-li jeho hmotnost 250 kg, šířka 3 m a hloubka vody je 1,5 m. Koeficient tření stavidla o opory je 0,3.

Označení veličin ze zadání:  $m = 250 \text{ kg}$ ,  $b = 3 \text{ m}$ ,  $h = 1,5 \text{ m}$ ,  $f = 0,3$ .

**Řešení:** Síla, která je nutná na vytažení stavidla z vody, je dána součtem tíhové síly  $\overline{F_G}$  stavidla a třecí síly  $\overline{F_t}$ , která působí mezi stavidlem a svislými oporami. Tíhovou sílu je možné považovat za konstantní, ale třecí se bude měnit v důsledku změny ponoření stavidla do vody. Pro velikost třecí síly platí  $F_t = F_n \cdot f$ , kde  $F_n$  je velikost normálové síly, tj. síly kolmé ke směru pohybu stavidla. Tato síla je způsobena tlakovou silou vody. Na vodorovný pás stavidla obsahu  $\Delta S$ , který je v hloubce  $x$ , působí tlaková síla o velikosti

$\Delta F = \Delta S \cdot x \rho g = b \cdot \Delta x \cdot x \rho g$ . Pro velikost tlakové síly působící na celé stavidlo pak dostáváme  $F = \int_0^h b x \rho g \cdot dx$ . Po

vypočtu:  $F = \int_0^h b x \rho g \cdot dx = \left[ \frac{x^2}{2} b \rho g \right]_0^h = \frac{h^2}{2} b \rho g$ . Velikost celkové síly, kterou musíme na stavidlo působit,

abychom jej vytáhli, tedy je:  $F_{\text{celková}} = F_G + F_t = F_G + F_n \cdot f = mg + \frac{h^2}{2} b \rho g f$ . Po dosazení:

$$F_{\text{celková}} = mg + \frac{h^2}{2} b \rho g f = 250 \cdot 9,81 + \frac{1}{2} \cdot 1,5^2 \cdot 3 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,3 \text{ N} = 12385 \text{ N}.$$

Zadanou úlohu by bylo možno vyřešit i bez integrálního počtu. Velikost tlakové síly vody působící na stavidlo závisí na hloubce vody lineárně. Proto je možné celkovou tlakovou sílu vody, která na stavidlo působí během jeho vytahování, určit jako průměrnou sílu na celé dráze, kterou stavidlo urazí. Je-li stavidlo zcela ponořeno, působí na něj tlaková síla o velikosti  $F_{\text{dno}} = Sh\rho g$ , je-li stavidlo vytaženo, působí na něj tlaková síla o velikosti

$$F_{\text{hladina}} = 0 \text{ N}. \text{ Pro velikost tlakové síly lze tedy psát: } F = \frac{F_{\text{dno}} + F_{\text{hladina}}}{2} = \frac{Sh\rho g + 0}{2} = \frac{bh^2\rho g}{2}, \text{ což je vztah}$$

shodný se vztahem, který byl odvozen pomocí integrálního počtu.

K vytažení stavidla je třeba působit silou minimální velikosti 12385 N.

**Příklad:** Dřevěný válec je ponořený ve vodě do dvou třetin své výšky. Jakou práci je třeba vykonat při vytáhnutí válce z vody, je-li jeho poloměr 10 cm a jeho výška 60 cm?

**Řešení:** Označení veličin ze zadání:  $r = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$ ,  $h = 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m}$ .

Na válec ponořený ve vodě působí svisle dolů tíhová síla  $\overline{F_G}$  v jeho těžišti  $T$  a svisle vzhůru vztlaková síla  $\overline{F_{vz}}$ , jejíž působíště je v těžišti  $T_1$  ponořené části válce (viz obr. 147). Podle zadání je válec v rovnovážné poloze, v níž platí:  $F_G = F_{vz}$ . Na základě této podmínky je možné vyjádřit hmotnost  $m$  válce. Postupně dostaneme:

$$F_G = F_{vz} \Rightarrow mg = V\rho g \Rightarrow m = \frac{2}{3} Sh\rho = \frac{2}{3} \pi r^2 h \rho, \text{ kde } r \text{ je poloměr podstavy válce, } h \text{ výška válce a } \rho \text{ hustota vody.}$$

Při zvedání válce z vody se bude měnit objem jeho ponořené části a proto se bude měnit vztlaková síla. (Tíhovou sílu budeme považovat za konstantní.) Vnější síla, kterou bude válec z vody vytahován, je  $\overline{F} = \overline{F_G} + \overline{F_{vz}}$ ; pro její velikost platí  $F = F_G - F_{vz}$ . Na dráze  $\Delta s$ , na které je možné sílu  $\overline{F}$  považovat za konstantní, je práce touto silou vykonaná  $\Delta W = F \cdot \Delta s$ . Celkovou práci, kterou musíme při vytažení válce vykonat, je možné určit ze vztahu

$$W = \int_0^{\frac{2}{3}h} F \cdot ds = \int_0^{\frac{2}{3}h} (F_G - F_{vz}) \cdot ds. \text{ Po dosazení a dalších úpravách postupně dostáváme:}$$

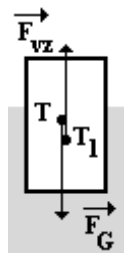
$$W = \int_0^{\frac{2}{3}h} (F_G - F_{vz}) \cdot ds = \int_0^{\frac{2}{3}h} \left( mg - \pi r^2 s \rho g \right) \cdot ds = \left[ mgs - \pi r^2 \frac{s^2}{2} \rho g \right]_0^{\frac{2}{3}h} = \frac{2}{3} \pi r^2 h \rho \cdot \frac{2}{3} h - \pi r^2 \frac{4h^2}{2 \cdot 9} \rho g = \frac{2}{9} \pi r^2 h^2 \rho g. \text{ Po}$$

$$\text{dosazení zadaných hodnot dostaneme: } W = \frac{2}{9} \pi r^2 h^2 \rho g = \frac{2}{9} \cdot 3,14 \cdot 0,1^2 \cdot 0,6^2 \cdot 1000 \cdot 9,81 \text{ J} = 24,6 \text{ J}.$$

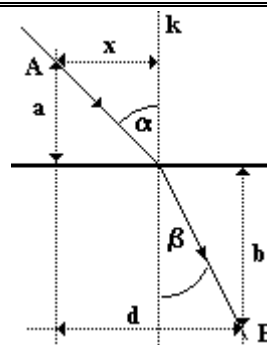
Zadanou úlohu lze řešit i bez využití integrálního počtu. Stačí si uvědomit, že velikost vztlačkové síly závisí na hloubce ponoření tělesa lineárně. Hledanou práci lze proto určit i jednodušeji:

$$W = (F_G - F_{vz\text{ průměrná}}) \cdot \frac{2}{3} h = \left( F_G - \frac{F_{vz} + F_{vz\text{ hladina}}}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} h = \left( F_G - \frac{F_{vz}}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} h$$
, kde  $F_{vz\text{ hladina}}$  je velikost vztlačkové síly působící na válec v okamžiku, kdy je jeho dolní podstava v rovině vodní hladiny; tedy  $F_{vz\text{ hladina}} = 0 \text{ N}$ . Po dosazení dostaneme: 
$$W = \left( F_G - \frac{F_{vz}}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} h = \left( \frac{2}{3} \pi r^2 h \rho g - \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot \frac{2}{3} h \rho g \right) \cdot \frac{2}{3} h = \frac{2}{9} \pi r^2 h^2 \rho g$$
, což je stejný vztah jako při použití integrálního počtu.

Při zvedání válce z vody je třeba vykonat práci 24,6 J.



obr. 147



obr. 148

**Příklad:** Odvoďte Snellův zákon lomu pomocí Fermatova principu nejmenšího času.

**Řešení:** Tento princip vychází z předpokladu, že světelný paprsek procházející bodem A v jednom optickém prostředí a bodem B v druhém prostředí, urazí vzdálenost AB za minimální možný čas. Podle obr. 148 lze pro dráhu v prvním prostředí psát  $s_1 = \sqrt{a^2 + x^2}$  a pro dráhu ve druhém prostředí pak  $s_2 = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$ . Čas

potřebný k překonání vzdálenosti AB je pak roven  $t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}$ , kde  $v_1$  je velikost rychlosti světla v prvním prostředí a  $v_2$  pak velikost rychlosti světla ve druhém prostředí.

Nyní hledáme minimum funkce  $t(x)$  - použijeme tedy diferenciálního počtu. Funkci  $t(x)$  derivujeme podle proměnné  $x$  a derivaci poté položíme rovnu nule. Dostaneme: 
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = 0.$$

Odtud získáme vztah  $\frac{\sin \alpha}{v_1} - \frac{\sin \beta}{v_2} = 0$ , který je možné přepsat do tvaru  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$ . A to je Snellův zákon lomu.

**Příklad:** Cívkou s indukčností 0,25 H protéká proud  $I = I_0 \sin \omega t$ , kde  $I_0 = 1 \text{ A}$  a  $\omega = 3140 \text{ s}^{-1}$ . Určete maximální hodnotu napětí, které se v cívice indukuje.

**Řešení:** Označení zbývající veličiny ze zadání:  $L = 0,25 \text{ H}$

Časově proměnný proud budí kolem cívky časově proměnné magnetické pole, které způsobuje indukci elektrického napětí v cívice. Na základě Faradayova zákona elektromagnetické indukce platí:

$$u_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{L \Delta I}{\Delta t}$$
. Pro přesnější popis (tj. sledování změn proud na velmi malých časových intervalech)

můžeme Faradayův zákon vyjádřit ve tvaru: 
$$u_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{L dI}{dt}$$
. Po dosazení průběhu proudu ze zadání

dostaneme: 
$$u_i = -L \cdot \frac{d}{dt} (I_0 \sin \omega t) = -L I_0 \omega \cos \omega t$$
. Vzhledem k tomu, že funkce kosinus nabývá hodnot z intervalu  $\langle -1; 1 \rangle$ , pro maximální hodnotu indukovaného napětí platí:

$$u_{i\text{ max}} = |-L I_0 \omega| = L I_0 \omega = 0,25 \cdot 1 \cdot 3140 \text{ V} = 785 \text{ V}$$

Maximální napětí, které se indukuje v cívice je 785 V.

**Příklad:** Dva přímé velmi dlouhé rovnoběžné vodiče se nacházejí v určité vzdálenosti od sebe. Vodiči protékají proudy 40 A a 30 A ve stejných směrech. Na zvětšení vzájemné vzdálenosti vodičů na trojnásobek je třeba vykonat určitou práci. Vypočítejte část této práce, která připadá na jednotkovou délku vodiče.

**Řešení:** Označení veličin ze zadání:  $I_1 = 40 \text{ A}$ ,  $I_2 = 30 \text{ A}$ ,  $s_2 = 3s_1$

Ze zadání úlohy vyplývá, že se vodiče k sobě vzájemně přitahují. Proto k oddálení vodičů do sebe bude třeba dodat soustavě určitou energii - tj. bude třeba konat práci. Velikost magnetické síly působící na vodič, kterým protéká proud  $I_1$  a který se nachází ve vzdálenosti  $d$  od druhého vodiče, jímž prochází proud  $I_2$ , je dána

vztahem  $F_m = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l$ , kde  $l$  je délka vodičů a  $\mu$  permeabilita prostředí.

Velikost síly  $\overline{F_m}$  se tedy se zvětšující se vzdáleností  $d$  mění (klesá). Proto není možné použít vztah pro práci  $W = F \cdot s \cdot \cos \alpha$ . Síla vystupující v tomto vztahu totiž musí být konstantní. Proto si musíme pomoci: stačí si uvědomit, že na malém intervalu dráhy  $\Delta s$  můžeme považovat i proměnnou sílu za konstantní. A čím menší bude úsek  $\Delta s$ , tím spíše lze pokládat sílu na tomto úseku za konstantní. Pro práci pak platí:  $\Delta W = F \cdot \Delta s$  a z toho

dostáváme:  $W = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds$ . Před dalším výpočtem je nutné si uvědomit, že vzdálenost  $d$  vystupující ve vztahu pro

velikost magnetické síly je totožná s úsekem dráhy  $s$  (resp.  $\Delta s$ ) ze vztahu pro výpočet práce. Proto budeme používat v obou případech shodného značení - např.  $s$ . Můžeme tedy psát:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F_m \cdot ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{s} l \cdot ds = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi} l \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{s} ds = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi} l \left[ \ln |s| \right]_{s_1}^{s_2} = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi} l (\ln s_2 - \ln s_1) = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi} l \ln \frac{s_2}{s_1}. \quad \text{Po}$$

$$\text{dosazení ze zadání: } W = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi} l \ln \frac{s_2}{s_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 40 \cdot 30}{2\pi} \cdot l \cdot \ln 3 \text{ J} = 2,63 \cdot 10^{-4} \cdot l \text{ J}.$$

Na jednotkovou délku vodičů při jejich vzájemném oddálení na trojnásobek počáteční vzdálenosti připadá práce  $W = 2,63 \cdot 10^{-4} \text{ J} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### **Příklady:**

**25.** Hmotný bod se pohybuje přímočaře tak, že po velikost jeho rychlosti platí vztah  $v = \sqrt{1+t}$ . Určete, v čem je tento zápis nepřesný a napište jeho správný tvar pro a) číselné hodnoty veličin  $v$  a  $t$ , b) veličiny  $v$  a  $t$ . Určete dráhu, kterou hmotný bod urazí za prvních deset sekund pohybu, a velikost zrychlení, kterého hmotný bod v tomto čase dosáhne. Dráha se měří od okamžiku  $t = 0 \text{ s}$ .

**26.** Velikost zrychlení hmotného bodu při jeho přímočarém pohybu rovnoměrně klesne během 20 s z počáteční hodnoty  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  na nulovou hodnotu. Jak velkou rychlostí se pohyboval hmotný bod v čase 20 s? Jakou dráhu za tuto dobu urazil, byl-li v čase  $t = 0 \text{ s}$  v klidu?

**27.** Špageta visí svou částí přes okraj stolu. Určete průběh velikosti rychlosti, s jakou klouže dolů. Celková délka špagety je  $d$ , část visící dolů na počátku je  $d_0$ . Předpokládejte dokonalou ohebnost špagety a zanedbatelné tření.

**28.** Určete polohu těžiště tenkého drátu o hmotnosti  $m$  ohnutého do tvaru půlkružnice o poloměru  $R$ .

**29.** Určete polohu těžiště čtvrtkruhu o poloměru  $R$ .

**30.** Určete souřadnice těžiště poloviny plné homogenní koule o poloměru  $R$ .

**31.** Určete polohu těžiště plného přímého homogenního kužele, je-li poloměr jeho podstavy  $R$  a výška  $v$ .

**3.** V nádobě tvaru rotačního válce, jehož osa má směr tíhového zrychlení, je do výšky  $h_0$  nad dnem nalita nestačitelná kapalina o hustotě  $\rho$ . Nádoba má poloměr  $R$ . Nechť se nádoba otáčí kolem své osy stálou úhlovou rychlostí  $\omega$  tak, až se kapalina působením vnitřního tření postupně všechna roztočí stejnou úhlovou rychlostí jako nádoba. Pozorovatel rotující s nádobou zjistí, že kapalina je vůči nádobě v klidu. Určete rovnici plochy hladiny rotující kapaliny. V jaké vzdálenosti  $r_0$  od osy leží body hladiny, které při rotaci jsou v původní výšce  $h_0$  hladiny nerotující kapaliny a jaká je směrnice tečny v těchto bodech?

**32.** Určete elektrickou intenzitu a elektrický potenciál na ose kruhové smyčky nabitě s konstantní lineární hustotou  $\tau$ .

**33.** Pomocí Gaussovy věty odvodte vztah pro kapacitu a) 2 rovnoběžných desek, b) kulového kondenzátoru, b) válcového kondenzátoru.

**34.** V homogenním tíhovém poli je otevřená nádoba ve tvaru rotačního válce se svislou osou. Nádoba má příčný průřez  $S_0$  a je naplněna do výšky  $h_0$  kapalinou. Ve dně nádoby je otvor o průřezu  $S$ , z něhož vytéká obsah nádoby do volného prostoru. Kontrakti proudu vytékající kapaliny neuvažujte. Určete, jak závisí velikost

rychlosti vytékající kapaliny na výšce  $h$  hladiny ode dna nádoby a diskutujte zvláštní případ, kdy  $S_0 \ll S$ .

Určete dobu, za kterou se nádoba vyprázdní.

35. Načrtněte časové průběhy napětí indukovaného v cívce, kterou prochází magnetický indukční tok popsaný rovnicí: a)  $\Phi = kt$ , b)  $\Phi = kt^2$  c)  $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$ .  $k$  a  $\Phi_m$  jsou konstanty.

36. Jak velký magnetický indukční tok prochází ve vakuu umístěným obdélníkovým závitem o stranách  $a$  a  $b$ , teče-li podél něho jdoucím vodičem proud  $I$ ? Řešte pro případ, kdy je vodič rovnoběžný s a) delší, b) kratší stranou závitu.

37. Jakou práci vykoná 10 molů ideálního plynu při izotermické expanzi plynu, při níž se počáteční objem plynu zdvojnásobí?

## 8.10 Dynamické modelování

Řada fyzikálních (elektrotechnických, ...) závislostí je matematicky popsána diferenciálními rovnicemi (viz odstavce 8.8), které ovšem nemusí být analyticky řešitelné. Analytické řešení buď neexistuje nebo jeho nalezení či vyjádření je tak komplikované, že matematická stránka problému zastíní vlastní problém fyzikální (elektrotechnický, ...).

Řešit jakoukoliv rovnici analyticky znamená vyjádřit neznámou proměnnou nebo funkci „vzorečkem“, v němž budou vystupovat proměnné nebo funkce známé ze zadání a následného fyzikálního rozboru problému.

Proto je vhodné znát i další metody, jak nalézt řešení dané rovnice. Vzhledem k tomu, že uvažované typy diferenciálních rovnic většinou popisují fyzikální problém, není nutné znát jejich řešení naprosto přesně. Všechny výsledky, které na základě fyzikálního rozboru dané situace a následného výpočtu získáme, musíme být schopni ověřit v praxi měřením. Proto netrváme na přesnosti výpočtu na několik desítek desetinných míst, neboť s takovou přesností nejsme schopni běžné fyzikální veličiny (čas, poloha, velikost rychlosti, teplota, elektrický proud, ...) měřit. Při hledání řešení nám tedy většinou postačuje taková přesnost nalezeného řešení, která odpovídá přesnosti následného proměřování fyzikálních veličin.

Metody, kterými se tímto způsobem hledá řešení, se nazývají **numerické metody**. Numerických metod je celá řada - např. numerické řešení rovnic je popsáno v odstavci 8.3. Nyní se zaměříme na metodu tzv. **dynamického modelování**. Tato metoda je založena na vytvoření vhodného matematického modelu pro danou situaci a následném matematickém řešení tohoto modelu. Tyto metody byly známy již v minulých stoletích, přesto se většího rozšíření a používání dočkaly až s nástupem výkonné výpočetní techniky.

Popisované metody se většinou označují jako **Eulerovy metody** na počest švýcarského matematika a fyzika Leonharda Paula Eulera (1707 - 1783), který patřil k tehdejší matematické elitě. Poprvé použil tuto metodu již v roce 1768 při hledání co nejlepší aproximace derivace.

Ve dvacátém století se o rozvoj této metody zasloužil jeden z největších fyziků té doby, americký fyzik a popularizátor fyziky Richard Phillips Feynman (1918 - 1988).

### 8.10.1 Princip metody

#### 8.10.1.1 Základní principy

Abychom mohli vytvořit dynamický model pohybu tělesa (resp. hmotného bodu) o hmotnosti  $m$ , musíme znát:

1. **pohybovou rovnici popisující daný děj** - jedná se o rovnici vycházející ze druhého Newtonova zákona, který můžeme matematicky psát ve tvaru

$$\vec{F} = m\vec{a}; \quad (115)$$

2. **počáteční podmínky** - počáteční polohu  $\vec{r}_0$  daného tělesa (resp. hmotného bodu), velikost a směr počáteční rychlosti  $\vec{v}_0$ , velikost a směr počátečního zrychlení  $\vec{a}_0$ , ...

Pravou stranu vztahu (115) můžeme upravit s využitím definice okamžitého zrychlení a okamžité rychlosti do tvaru

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad (116)$$

kde  $\vec{a}$  je okamžité zrychlení daného tělesa (resp. hmotného bodu),  $\vec{v}$  jeho okamžitá rychlost a  $\vec{r}$  okamžitá poloha. Všechny tyto tři veličiny jsou obecně závislé na čase a navíc může např. poloha hmotného bodu záviset na velikosti zrychlení nebo velikost zrychlení na poloze a podobně.

Síla  $\vec{F}$  vystupující ve vztahu (115) resp. (116) může být:

1. konstantní;
2. proměnná v závislosti na zrychlení nebo rychlosti daného tělesa (resp. hmotného bodu);
3. časově proměnná.

Nejčastěji se modelují děje, během kterých na dané těleso (resp. hmotný bod) působí tyto typy sil:

1. **konstantní tíhová síla** v homogenním tíhovém poli s tíhovým zrychlením  $\vec{g}$  daná vztahem

$$\vec{F} = m\vec{g}; \quad (117)$$

2. **gravitační síla** v radiálním poli centrálního tělesa o hmotnosti  $M$ , kde  $M \gg m$ , popsána vztahem

$$\vec{F} = -\kappa \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (118)$$

kde  $r$  je polohový vektor určující vzdálenost daného hmotného bodu od středu centrálního tělesa (což je také počátek vztažné soustavy);

Symbol  $\frac{\vec{r}}{r}$  označuje jednotkový vektor ve směru vektoru  $\vec{r}$ . Jednotkový vektor je vektor, jehož velikost je rovna jedné jednotce, s níž ve zvoleném systému souřadnic počítáme.

3. **síla pružnosti** působící na hmotný bod zavěšený na pružině při jeho vychýlení z rovnovážné polohy (počátek vztažné soustavy), která je popsána vztahem

$$\vec{F} = -k\vec{r}, \quad (119)$$

kde  $k$  je tuhost pružiny, která vytváří sílu pružnosti;

Uvedené síly patří mezi tzv. **konzervativní síly**. To jsou takové síly, při jejichž působení platí zákon zachování mechanické energie. Žádná část mechanické energie se tedy nepotřebává na práci nutnou na překonání odporových sil. Na pohybující se těleso (resp. hmotný bod) ovšem většinou působí i tzv. **disipativní síly**, při jejichž působení se část mechanické energie nevratně mění na jiné formy (většinou na vnitřní energii pohybujícího se tělesa a jeho okolí).

Mění-li se tedy část mechanické energie na vnitřní energii, pohybující se těleso se zahřívá. Ohřev je sice nepatrný, ale z hlediska zákona zachování energie nastává.

Disipativní síly často závisí na okamžité rychlosti  $\vec{v}$  tělesa (resp. hmotného bodu) a patří mezi ně:

4. **síla odporu** viskózního prostředí při pomalých pohybech daná vztahem

$$\vec{F} = -b\vec{v}, \quad (120)$$

kde  $b$  je součinitel odporu tělesa (součinitel úměrnosti mezi silou odporu a rychlostí pohybu tělesa). Speciálním případem síly popsané vztahem (120) je síla daná Stokesovým zákonem ve tvaru

$$F = 6\pi\eta r v, \quad (121)$$

kde  $\eta$  je dynamická viskozita a  $r$  je poloměr tělesa ve tvaru koule;

5. **síla odporu** prostředí při vyšších velikostech rychlosti proudění, při nichž vzniká turbulentní proudění, popsána vztahem

$$\vec{F} = -Kv\vec{v}; \quad (122)$$

speciálním případem této síly je odporová síla popsána Newtonovým vztahem

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} C_S \rho v \vec{v}, \quad (123)$$

kde  $C$  je součinitel odporu,  $S$  plocha příčného řezu tělesa a  $\rho$  hustota prostředí, ve kterém se dané těleso pohybuje.

Síla, která působí na těleso (resp. hmotný bod), může být také časově proměnná. Nejčastěji se jedná o **harmonicky proměnnou sílu** popsanou vztahem

$$F = F_m \sin \omega t, \quad (124)$$

kde  $F_m$  je amplituda velikosti síly a  $\omega$  je úhlová frekvence uvažovaného typu oscilátoru.

Dynamickým modelováním obvykle řešíme úlohy popisující pohyb tělesa (resp. hmotného bodu) po úsečce nebo v rovině. Tohoto zjednodušení lze dosáhnout i vhodnou volbou počátku a os vztažné soustavy. Pak můžeme pro výslednou sílu působící na pohybující se těleso (resp. hmotný bod) psát rovnici (116) ve skalárních tvarech

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z), \quad (125)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) \quad (126)$$

a

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z), \quad (127)$$

kde  $x, y$  a  $z$  jsou složky polohového vektoru  $\vec{r}$ ,  $v_x, v_y$  a  $v_z$  jsou velikosti složek vektoru rychlosti  $\vec{v}$  a  $F_x, F_y$  a  $F_z$  jsou velikosti složek síly  $\vec{F}$ .

Pokud navíc působící síla závisí jen na některém z výše uvedených parametrů, její výpočet se dále zjednoduší. Pomocí matematického modelu je potom na základě pohybových rovnic ve tvaru (116) (resp. (125)

až (127)) postupně určována poloha pohybujícího se tělesa (resp. hmotného bodu), velikost jeho rychlosti a velikost jeho zrychlení. To znamená, že k určité posloupnosti časových okamžiků  $\{t_i\}$  je nalezena posloupnost okamžitých poloh  $\{\vec{r}(t_i)\}$ , posloupnost okamžitých rychlostí  $\{\vec{v}(t_i)\}$  a posloupnost okamžitých zrychlení  $\{\vec{a}(t_i)\}$ . Hodnoty těchto posloupností jsou pak zobrazovány buď formou tabulky nebo vhodného grafu (závislost dráhy na čase, závislost velikosti rychlosti na čase, ...). Při vytváření modelu má značný význam **časový krok  $h$** :

**ČASOVÝ KROK  $h$  JE ROZDÍL DVOU PO SOBĚ JDOUCÍCH ČLENŮ ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI ČASOVÝCH OKAMŽIKŮ  $\{t_i\}$ , TJ. PLATÍ**

$$h = t_{i+1} - t_i. \quad (128)$$

Při dynamickém modelování tedy nahradíme spojitý průběh veličin popisujících daný fyzikální děj (dráha, rychlost, elektrický proud, elektrické napětí, ...) posloupností hodnot těchto veličin. Zvolíme-li dostatečně malý krok vzhledem ke změnám zkoumaných veličin, získáme posloupnosti vypočtených veličin (dráha, rychlost, elektrický proud, ...), které budou dostatečně „husté“. Při vykreslení do grafu dané závislosti pak budeme sice vykreslovat jednotlivé body, ale při dostatečně „hustotě“ vypočtených hodnot veličin bude graf vypadat jako graf spojitě funkce.

Zavedením časového kroku  $h$  a posloupnosti časových okamžiků  $\{t_i\}$  budeme vlastně místo diferenciálních rovnic (např. rovnice (115)) řešit tzv. **diferenční rovnice**. To jsou rovnice, v nichž čas (obecně nezávislá proměnná) neplyne rovnoměrně spojitě, ale plyne zde skokově. Přitom „délku“ skoku určuje časový krok definovaný vztahem (128).

Samotné dynamické modelování pak znamená řešit posloupnost kroků:

1. na základě počátečních podmínek popisovaného děje (resp. v dalším kroku na základě nově určené velikosti rychlosti a hodnoty polohy) určit výslednou sílu působící na pohybující se těleso (resp. hmotný bod)

$$F_i = F(t_i, r_i, v_i); \quad (129)$$

2. určit zrychlení tělesa (resp. hmotného bodu) na základě vztahu

$$a_i = \frac{F_i}{m}; \quad (130)$$

3. určit velikost rychlosti pohybu tělesa (resp. hmotného bodu) pomocí vztahu

$$v_{i+1} = v_i + a_i h; \quad (131)$$

4. určit polohu tělesa (resp. hmotného bodu) pomocí vztahu

$$r_{i+1} = r_i + v_i h; \quad (132)$$

5. určit další časový okamžik pomocí vztahu

$$t_{i+1} = t_i + h. \quad (133)$$

Opakování kroků popsaných vztahy (129) až (133) provádíme tak dlouho, dokud má popis pohybu smysl (než dopadne těleso vržené k zemi na zem, než se nabije kondenzátor, ...). Rovnice by patrně byly definované i pro případy, které nemají fyzikální smysl - proto musíme jednoznačně stanovit konec děje.

Většinou se rovnice touto metodou řeší s využitím počítače. Proto stanovení konce výpočtu znamená testovat platnost nějaké vhodné podmínky (kladná výška tělesa nad podložkou, nenulový proud, ...).

### 8.10.1.2 Zdůvodnění použití přibližných vztahů

Zdůvodnění použití vztahů (131) a (132) v odstavci 8.10.1.1 můžeme podat fyzikálně nebo matematicky.

Fyzikální zdůvodnění např. vztahu (132) vyplývá z definice okamžité rychlosti ve tvaru  $v = \frac{dr}{dt}$ . Bez použití

diferenciálního počtu lze tento vztah psát ve tvaru  $v = \frac{\Delta r}{\Delta t}$ , tedy po rozepsání ve tvaru  $v = \frac{r_{i+1} - r_i}{\Delta t}$ . Odtud již

snadno vyjádříme  $r_{i+1}$  ve tvaru

$$r_{i+1} = r_i + v \Delta t. \quad (134)$$

Uvědomíme-li si, že časový krok  $\Delta t$  jsme označili  $h$ , jsou vztahy (132) a (134) totožné.

Matematicky se na vztah (132) můžeme dívat jako na část Taylorova rozvoje (viz odstavec 8.1) pro hodnotu funkce  $f$  v bodě  $x$  v okolí bodu  $a$ , který má tvar

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \quad (135)$$

Vzmemme-li pro výpočet polohy v úvahu pouze první dva členy, dostaneme

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + \frac{dr(t_i)}{dt}(t_{i+1} - t_i). \quad (136)$$

Přepíšeme-li vztah (136) ve značení pomocí posloupností poloh a velikostí rychlostí, získáme právě vztah (132). Taylorův rozvoj dává také návod, jak případně metody výpočtu zpřesnit: nebudeme brát jen dva členy, ale vezmeme členy tři. Pak dostaneme

$$r_{i+1} = r_i + v_i h + \frac{1}{2} a_i h^2. \quad (137)$$

Analogicky lze vysvětlit také použití vztahu (131).

Další zpřesňování metody spočívá v použití sofistikovanějších metod - např. Rugte-Kuttovy metody.

### 8.10.1.3 Různé varianty metody

Jednotlivé kroky metody dynamického modelování popsané v odstavci 8.10.1.1 pomocí vztahů (129) až (133) lze provádět v několikerém pořadí. Zejména vztahy (130) až (132) lze aplikovat třemi různými způsoby. Označíme-li výpočet velikosti zrychlení dle vztahu (130) zkratkou  $A$ , výpočet velikosti rychlosti dle vztahu (131) písmenem  $V$  a výpočet polohy dle vztahu (132) písmenem  $R$ , dostáváme celkem tři různé možnosti uspořádání výpočtu při dynamickém modelování. Ty jsou shrnuty v tab. 3.

Písmena  $A$ ,  $V$  a  $R$  byla zvolena pochopitelně podle označení dané fyzikální veličiny, která se příslušným vztahem počítá.

ARV	AVR	RAV
$\vec{a}_i = \vec{a}(t_i, \vec{r}_i, \vec{v}_i)$	$\vec{a}_i = \vec{a}(t_i, \vec{r}_i, \vec{v}_i)$	$r_{i+1} = r_i + v_i h$
$r_{i+1} = r_i + v_i h$	$v_{i+1} = v_i + a_i h$	$\vec{a} = \vec{a}(t_i, \vec{r}_{i+1}, \vec{v}_i)$
$v_{i+1} = v_i + a_i h$	$r_{i+1} = r_i + v_{i+1} h$	$v_{i+1} = v_i + a h$
$t_{i+1} = t_i + h$	$t_{i+1} = t_i + h$	$t_{i+1} = t_i + h$

tab. 3

Metody ARV a RAV se tedy liší pouze v případě, že zrychlení tělesa (resp. hmotného bodu) závisí na jeho poloze. V ostatních případech jsou výsledky získané oběma metodami stejné.

## 8.10.2 Řešené úlohy

Pro ilustraci metody dynamického modelování popsané v odstavci 8.10.1 uvedeme několik řešených úloh, aby bylo zřejmé její použití.

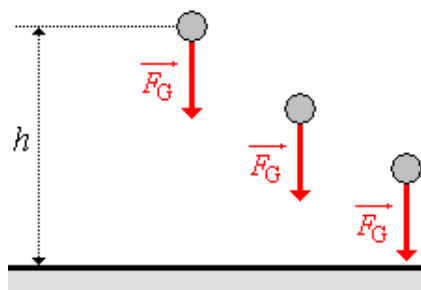
### 8.10.2.1 Volný pád

**Zadání:** Pomocí metody dynamického modelování zobraďte graf závislosti výšky na čase a graf závislosti velikosti rychlosti na čase pro volný pád hmotného bodu o hmotnosti 200 g z výšky 20 metrů na vodorovnou plošku.

**Řešení:**

Na obr. 149 je zobrazen hmotný bod a síla, která na něj během jeho volného pádu působí. Volný pád je způsoben konstantní tíhovou silou  $\vec{F}_G$ , která je dána vztahem (117). Na základě metody dynamického modelování popsané v odstavci 8.10.1.1 a vztahu (116) můžeme tedy sestavit pohybovou rovnici uvažovaného volně padajícího hmotného bodu ve tvaru

$$ma = mg. \quad (138)$$



obr. 149

Pohybová rovnice ve tvaru (138) je zapsána ve skalárním tvaru, protože volný pád je pohyb po úsečce a není proto nutné jej vyšetřovat ve trojrozměrném prostoru. Hmotností  $m$  vystupující na obou stranách rovnice (138) lze pochopitelně celou rovnici vydělit.

Fakt, že hmotnosti vystupující na obou stranách rovnice (138) jsou stejné, není samozřejmý. Je důsledkem tzv. principu ekvivalence. Ten říká, že setrvačná hmotnost (tělesa, které se pohybuje) a gravitační hmotnost (tělesa v gravitačním resp. tíhovém poli) je stejná.

Setrvačná hmotnost je hmotnost tělesa, které chce setrvat v klidu (nebo v pohybu) a brání se tedy působící síle (ať už při zrychlování nebo zpomalování).

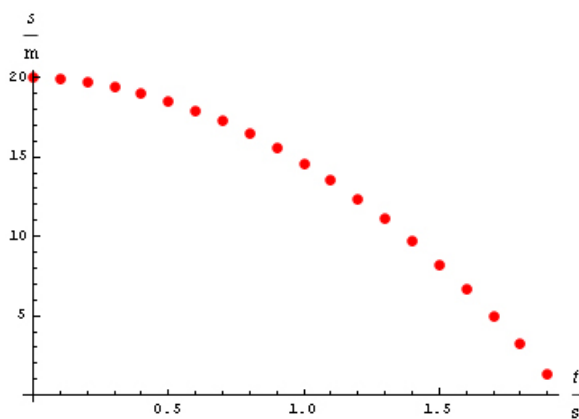
Dále budeme postupovat dle metody uvedené v odstavci 8.10.1.1. K řešení využijeme programový systém *Mathematica*, ve kterém lze úlohu snadno zpracovat. Důležitá část zdrojového kódu z tohoto programu je zobrazena na obr. 150. Grafy získané při volbě proměnné `deltat = 0,1` (ve značení z odstavce 8.10.1.1 je to proměnná  $h$ ) jsou zobrazeny na obr. 151 (graf závislosti výšky hmotného bodu nad vodorovnou podložkou na čase) a obr. 152 (graf závislosti velikosti rychlosti na čase). Je zřejmé, že oba grafy odpovídají teoretickému popisu volného pádu.

```

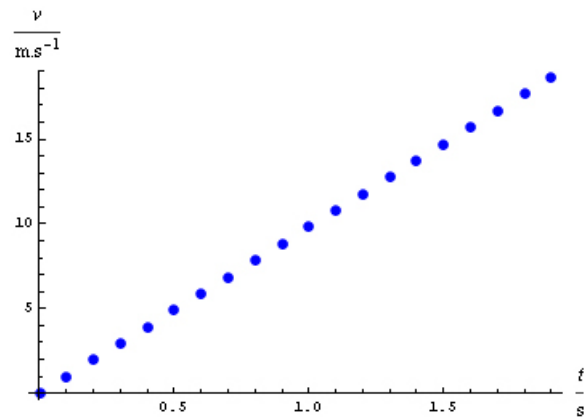
F = m g;
pocet = 1;
rychlost[[pocet]] = v0;
vyska[[pocet]] = hmax;
While [vyska[[pocet]] > 0,
  a =  $\frac{F}{m}$ ;
rychlost[[pocet + 1]] = rychlost[[pocet]] + a deltat;
vyska[[pocet + 1]] = vyska[[pocet]] - rychlost[[pocet + 1]] deltat;
pocet = pocet + 1];

```

obr. 150



obr. 151



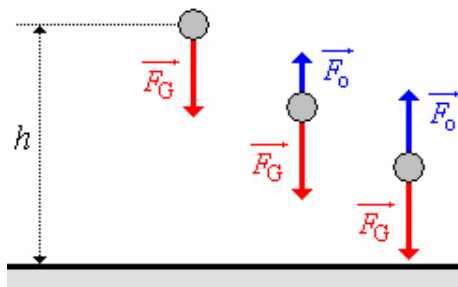
obr. 152

### 8.10.2.2 Pád tělesa v odporujícím prostředí

**Zadání:** Pomocí metody dynamického modelování zobrazte graf závislosti výšky na čase a graf závislosti velikosti rychlosti na čase pro pád tělesa ve tvaru koule o hmotnosti 200 g a poloměru 5 cm z výšky 20 metrů na vodorovnou plošku. Předpokládejte, že pro velikost odporové síly působící proti pohybu tělesa, platí Newtonův vztah (123). V případě koule je  $C = 0,48$  a hustota vzduchu je  $\rho = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$ .

**Řešení:**

Fyzikální rozbor úlohy je zobrazen na obr. 153. Na těleso působí stálá tíhová síla  $\vec{F}_G$  a odporová síla  $\vec{F}_0$ , jejíž velikost se zvyšuje z nulové hodnoty až po maximální hodnotu rovnou velikosti tíhové síly. Tato rovnost obecně ovšem nemusí nastat - závisí na výšce  $h$ , ze které těleso padá.



obr. 153

Uvažujeme-li pohyb v homogenním poli, je velikost tíhové síly stálá. Změnu její velikosti se vzdáleností od povrchu Země neuvažujeme.

Pohybová rovnice s využitím vztahu (116), vztahu (117) pro tíhovou sílu a vztahu (123) pro odporovou sílu má tvar



$$ma = mg - \frac{1}{2} C S \rho v^2.$$

Další výpočet probíhá podle rovnic uvedených v odstavci 8.10.1.1.

```

pocet = 1;
rychlost[[pocet]] = v0;
vyska[[pocet]] = hmax;
While[vyska[[pocet]] > 0,
  F = m g - koeficient rychlost[[pocet]]2;
  a = F/m;
  rychlost[[pocet + 1]] = rychlost[[pocet]] + a deltat;
  vyska[[pocet + 1]] = vyska[[pocet]] - rychlost[[pocet + 1]] deltat;
  pocet = pocet + 1];

```

obr. 154

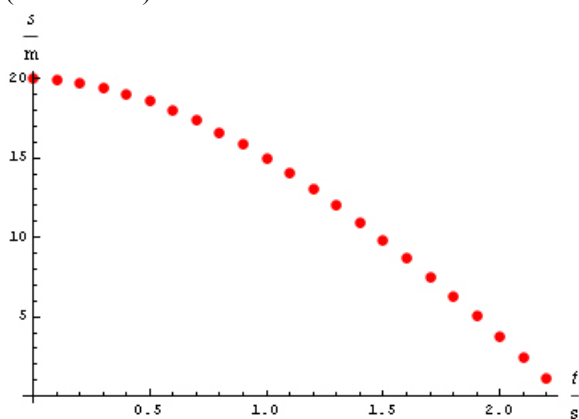
Část zdrojového kódu programového systému *Mathematica*, ve kterém byla úloha řešena, je zobrazena na obr. 154. Ve zdrojovém kódu byla pro snadnější zápis definována proměnná *koeficient* vztahem

$$koeficient = \frac{1}{2} C S \rho. \quad (140)$$

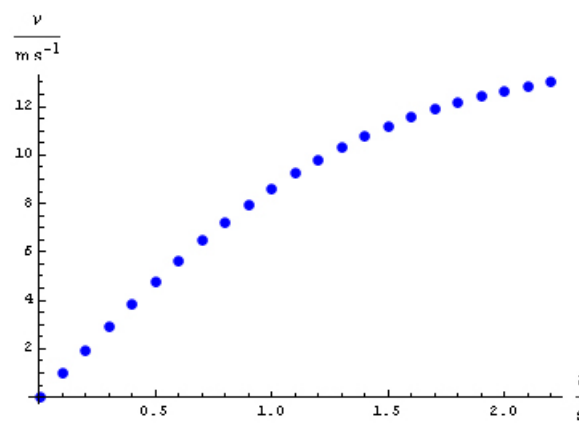
Proměnná *koeficient* je tedy dána součinem konstant, které ovlivňují velikost odporové síly. Proto je i sama proměnná *koeficient* během celého výpočtu konstantní.

Ve skutečnosti se mění s rostoucí výškou od povrchu Země hustota vzduchu. Tyto změny jsou ale v námi uvažovaném případě zanedbatelné.

Na obr. 155 je zobrazen graf závislosti výšky tělesa nad vodorovnou podložkou na čase a na obr. 156 je zobrazena závislost velikosti rychlosti na čase. Srovnáním grafů na obr. 151 a na obr. 155 zjistíme, že „křivka“ zobrazená na obr. 155 klesá pozvolněji a těleso dopadá na podložku přibližně za 2,2 sekundy, zatímco v případě volného pádu za jinak stejných podmínek dopadá za 2 sekundy. Výrazný rozdíl je v grafech zobrazených na obr. 152 a obr. 156, na kterých je zobrazena závislost velikosti rychlosti na čase. Zatímco v případě volného pádu (graf na obr. 152) je tato závislost lineární, v případě započtení odporu vzduchu je tato závislost exponenciální (viz obr. 156).



obr. 155



obr. 156

V odstavci 8.8.4.2 byla pomocí přesného analytického řešení diferenciální rovnice (139) vyřešena obecnější úloha, která je téměř shodná s úlohou řešenou v tomto odstavci; rozdíl spočívá v tom, že úloha z odstavce 8.8.4.2 byla řešena obecně bez zadání číselných hodnot a byla řešena pro počáteční velikost rychlosti pohybu tělesa  $v_0$ . Na základě analytického řešení byl získán vztah pro velikost rychlosti pohybujícího se tělesa v závislosti na čase ve tvaru

$$v(t) = \frac{e^{2\sqrt{\frac{gC}{m}}t} \left( 1 + v_0 \sqrt{\frac{C}{mg}} \right) - 1 + v_0 \sqrt{\frac{C}{mg}}}{\sqrt{\frac{C}{mg}} \left( e^{2\sqrt{\frac{gC}{m}}t} \left( 1 + v_0 \sqrt{\frac{C}{mg}} \right) + 1 - v_0 \sqrt{\frac{C}{mg}} \right)}, \quad (141)$$

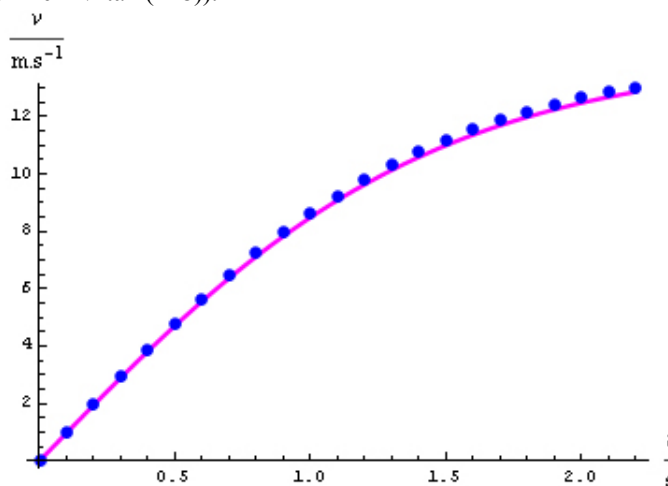
kde  $C$  má stejný význam jako proměnná *koeficient* definovaná vztahem (140).

V případě, že budeme uvažovat pohyb s nulovou počáteční rychlostí, jaký v tomto odstavci uvažujeme, stačí do vztahu (141) dosadit  $v_0 = 0$ . Získáme tak vztah

$$v(t) = \frac{e^{2\sqrt{\frac{gC}{m}}t} - 1}{\sqrt{\frac{C}{mg}} \left( e^{2\sqrt{\frac{gC}{m}}t} + 1 \right)}, \quad (142)$$

který můžeme považovat za funkční předpis závislosti velikosti rychlosti na čase pro námi studovaný pohyb. Vykreslíme-li jej do stejného grafu, jako řešení získané pomocí dynamického modelování (viz graf na obr. 156), budeme moci porovnat přesnost metody založené na dynamickém modelování.

Křivka definovaná vztahem (142) je spolu se závislostí velikosti rychlosti na čase získané pomocí dynamického modelování vykreslena na obr. 157. Je zřejmé, že odchylky přesného výpočtu (spojitá křivka) od numerického výpočtu (izolované body) jsou minimální. Přesnost by bylo možné ještě zlepšit zmenšením časového kroku  $h$  (viz definiční vztah (128)).



obr. 157

### 8.10.2.3 Šikmý vrh v odporujícím prostředí

**Zadání:** Pomocí metody dynamického modelování zobrazte graf závislosti  $y$ -ové souřadnice pohybujícího se tělesa na jeho  $x$ -ové souřadnici a graf závislosti velikosti rychlosti na čase pro šikmý vrh tohoto tělesa ve tvaru koule o hmotnosti 500 g a poloměru 10 cm. Těleso bylo vystřeleno pod elevačním úhlem  $35^\circ$  počáteční rychlostí o velikosti  $10 \text{ m.s}^{-1}$ . Předpokládejte, že pro velikost odporové síly, působící proti pohybu tělesa platí Newtonův vztah (123). V případě koule je  $C = 0,48$  a hustota vzduchu je  $\rho = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$ .

**Řešení:**

Při pohybu tělesa je nutné v tomto případě přihlídnout k tomu, že trajektorii pohybu již není úsečka (jako tomu bylo u úloh řešených v odstavcích 8.10.2.1 a 8.10.2.2), ale rovinná křivka. Proto musíme úlohu řešit dvourozměrně. Proto je dobré si i fyzikální rozbor udělat v kartézském systému souřadnic  $Oxy$ . Na obr. 158 jsou zobrazeny dvě trajektorie, které připadají v úvahu:

1. část paraboly, po které by se těleso pohybovalo ve vakuu;

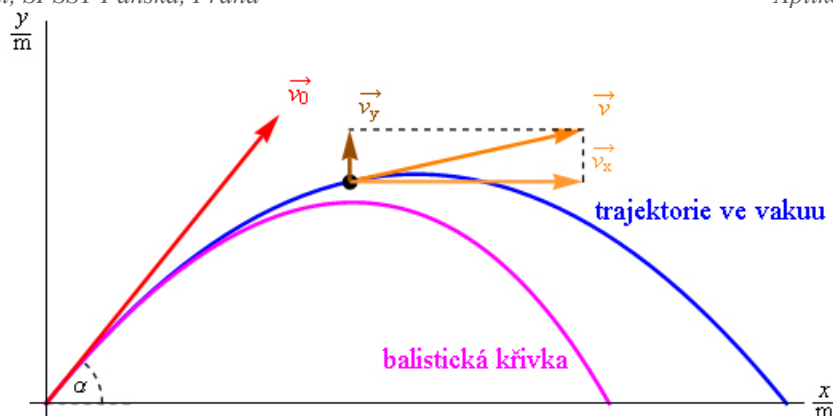
Křivka je symetrická: za polovinu času, který uplyne mezi výstřelem a dopadem tělesa, dosáhne těleso maximální výšky výstupu.

2. balistická křivka, po níž se těleso pohybuje v odporujícím prostředí.

Balistická křivka vznikla z původní symetrické křivky „deformací“ vlivem odporové síly vzduchu. Fakt, že nejvíce je křivka „deformovaná“ v části před dopadem tělesem, souvisí s tím, že velikost odporové síly je úměrná kvadrátu velikosti rychlosti. Vzhledem k tomu, že před dopadem se těleso pohybuje nejrychleji, působí na něj v této fázi letu i největší odporová síla, a proto je tato část křivky nejvíce deformovaná.

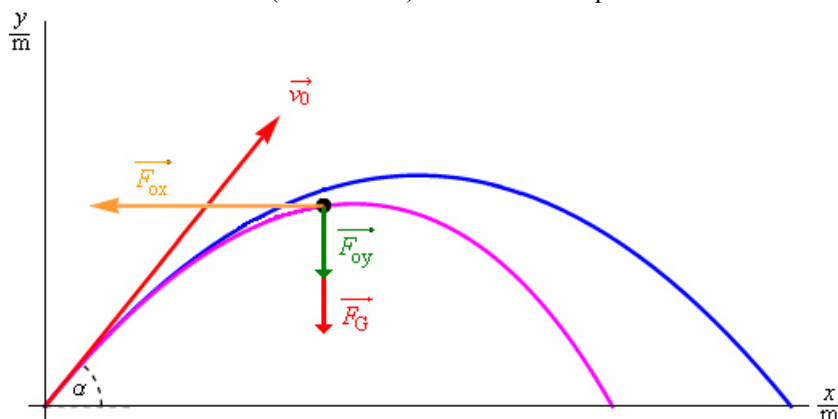
U trajektorie, po níž by se těleso pohybovalo ve vakuu, je zobrazen i vektor okamžité rychlosti a jeho rozklad na dvě složky -  $x$ -ovou a  $y$ -ovou.

Obecně je možné volit rozklad vektoru na libovolné dvě složky nebo více složek. V praxi se ovšem vždy volí takové složky, které mají fyzikální význam (rychlost ve směru osy  $x$  i ve směru osy  $y$  mají fyzikální význam) a s nimiž se dobře počítá. V případě dvou navzájem kolmých složek je možné používat Pythagorovu větu a goniometrické funkce definované v pravoúhlém trojúhelníku.



obr. 158

Pro další postup pomocí dynamického modelování (viz odstavec 8.10.1.1) je důležité znát síly, které na pohybující se těleso působí. Rozkladem vektoru rychlosti na dvě navzájem kolmé složky (viz obr. 158) můžeme celý pohyb tělesa rozdělit na svislou část a vodorovnou část. V obou směrech působí na těleso síly ovlivňující jeho pohyb. Ve vodorovném směru působí na těleso odporová síla  $\overrightarrow{F_{ox}}$ . Ve svislém směru působí na těleso tíhová síla  $\overrightarrow{F_G}$  a odporová síla  $\overrightarrow{F_{oy}}$ . Směr tíhové síly je během celého pohybu stejný: tíhová síla má směr svislý dolů. Směr odporové síly  $\overrightarrow{F_{oy}}$  se mění - tato síly působí vždy proti směru pohybu. Proto v první fázi pohybu tělesa působí tato síla směrem svisle dolů (viz obr. 159) a ve druhé části působí směrem svisle nahoru.



obr. 159

Na základě této úvahy můžeme psát pohybové rovnice pro uvažované těleso s využitím vztahu (116), vztahu (117) pro tíhovou sílu a vztahu (123) pro odporovou sílu ve tvarech

$$ma_x = -\frac{1}{2}CSpv_x v \quad (143)$$

a

$$ma_y = -mg - \frac{1}{2}CSpv_y v, \quad (144)$$

kde  $a_x$  je velikost zrychlení ve vodorovném směru,  $a_y$  je velikost zrychlení ve svislém směru,  $v_x$  je velikost rychlosti ve vodorovném směru,  $v_y$  je velikost rychlosti ve svislém směru a  $v$  je velikost rychlosti, pro kterou platí vztah

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (145)$$

Na obr. 160 je zobrazena část zdrojového kódu programového systému *Mathematica*, ve kterém byla úloha řešena. Ve zdrojovém kódu je pro snadnější zápis použita proměnná *koeficient* definovaná vztahem (140).

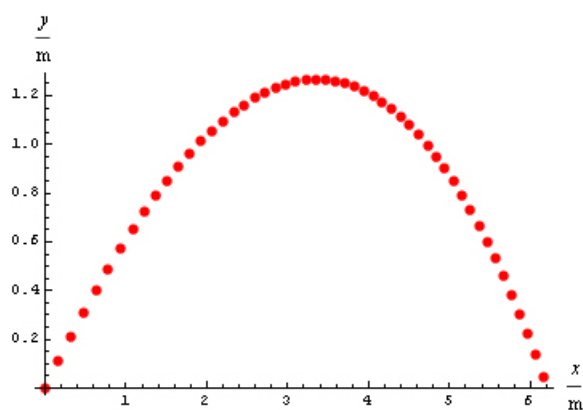
Trajektorie pohybu daného tělesa je zobrazena na obr. 161. Ačkoliv jsou tlumící parametry pohybu (poloměr tělesa, součinitel odporu a hustota vzduchu) relativně malé, přesto je zřejmé, že zobrazená trajektorie není symetrická. Na obr. 162 je zobrazen pro uvažovaný pohyb graf závislosti velikosti rychlosti na čase.

```

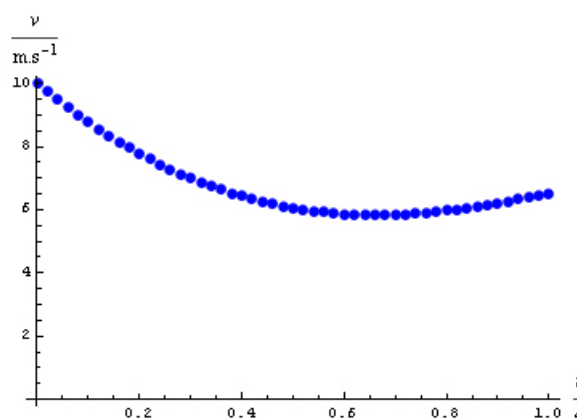
pocet = 1;
rychlostx[pocet] = v0 Cos[alfa];
rychlosty[pocet] = v0 Sin[alfa];
rychlost[pocet] = Sqrt[rychlostx[pocet]^2 + rychlosty[pocet]^2];
x[pocet] = h0;
y[pocet] = h0 + 10^-6;
While[y[pocet] > h0,
  Fx = -koeficient rychlostx[pocet] rychlost[pocet];
  Fy = -m g - koeficient rychlosty[pocet] rychlost[pocet];
  ax = Fx/m;
  ay = Fy/m;
  rychlostx[pocet + 1] = rychlostx[pocet] + ax deltat;
  rychlosty[pocet + 1] = rychlosty[pocet] + ay deltat;
  x[pocet + 1] = x[pocet] + rychlostx[pocet + 1] deltat;
  y[pocet + 1] = y[pocet] + rychlosty[pocet + 1] deltat;
  rychlost[pocet + 1] = Sqrt[rychlostx[pocet + 1]^2 + rychlosty[pocet + 1]^2];
  pocet = pocet + 1];

```

obr. 160



obr. 161



obr. 162

#### 8.10.2.4 Kmitavý pohyb v odporujícím prostředí

**Zadání:** Pomocí metody dynamického modelování zobrazte graf závislosti okamžité výchylky na čase a graf závislosti velikosti rychlosti na čase pro těleso o hmotnosti 200 g kmitající na pružině o tuhosti  $100 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . V okamžiku začátku pohybu mělo těleso okamžitou výchylku 15 cm a nacházelo se v klidu.

**Řešení:**

Na obr. 163 je zobrazen fyzikální rozbor situace. Na pružinu o klidové délce  $l_0$  bylo zavěšeno těleso o hmotnosti  $m$ , které na pružinu působí tíhovou silou  $\overline{F}_G$ . Pružina se tak prodloužila o  $\Delta l$  a těleso se ustálilo v rovnovážné poloze, protože na něj pružina působila silou pružnosti  $\overline{F}_p$ . Tato síla má v rovnovážné poloze stejnou velikost, ale opačný směr, než síla tíhová, tj. s využitím vztahu (117) pro tíhovou sílu a vztahu (119) pro sílu pružnosti platí

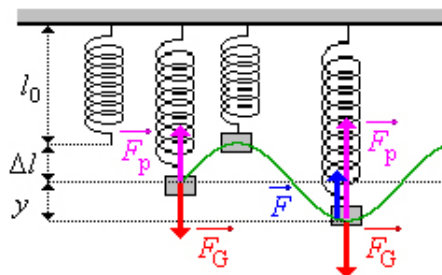
$$mg = k\Delta l. \quad (146)$$

Bude-li mít těleso zavěšené na pružině výchylku  $y$ , velikost síly pružnosti se zvětší. Tíhovou sílu i sílu pružnosti, které obě působí na závaží zavěšené na pružině, můžeme nahradit výslednou silou  $\overline{F}$ ; ta míří během kmitavého pohybu tělesa do rovnovážné polohy, do níž se snaží kmitající těleso vrátit.

Na základě této úvahy můžeme s využitím vztahu (116), vztahu (117) pro tíhovou sílu, vztahu (119) pro sílu pružnosti sestavit pohybovou rovnici kmitajícího tělesa ve tvaru  $ma = mg - k(\Delta l + y)$ . Tu můžeme s využitím vztahu (146) upravit na tvar

$$ma = -ky. \quad (147)$$

Rovnici (147) použijeme pro dynamické modelování zadané úlohy v programovém systému *Mathematica*. Část zdrojového kódu, která zajišťuje výpočet okamžité výchylky a velikosti rychlosti kmitajícího tělesa, je zobrazena na obr. 164.



obr. 163

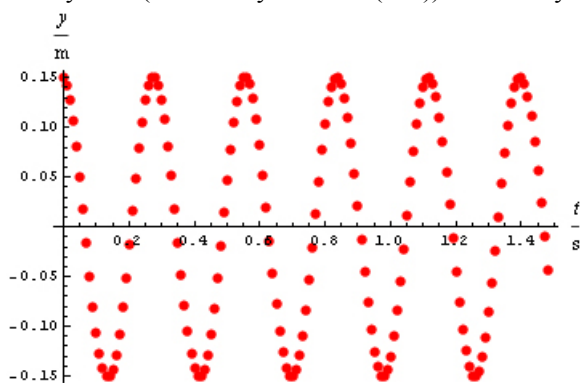
```

pocet = 1;
rychlost[[pocet]] = v0;
y[[pocet]] = y0;
While [ pocet deltat < 1.5,
  F = -k y[[pocet]];
  a =  $\frac{F}{m}$ ;
  rychlost[[pocet + 1]] = rychlost[[pocet]] + a deltat;
  y[[pocet + 1]] = y[[pocet]] + rychlost[[pocet + 1]] deltat;
  pocet = pocet + 1];

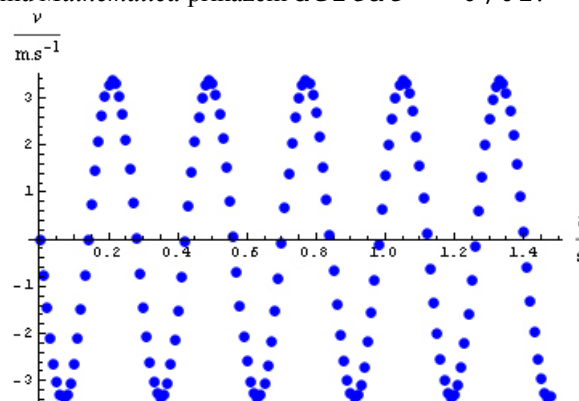
```

obr. 164

Graf závislosti okamžité výchylky kmitavého pohybu tělesa na čase je zobrazen na obr. 165 a graf závislosti velikosti rychlosti pohybujícího se tělesa na čase je zobrazen na obr. 166. Z obou grafů je zřejmé, že odpovídají zadanému pohybu: amplituda výchylky je konstantní (nepočítali jsme s odporovými silami) a velikost rychlosti je nulová v okamžiku, kdy oscilátor dosahuje maximální výchylky, a má maximální hodnotu v okamžicích, kdy oscilátor prochází rovnovážnou polohou. Grafy na obr. 165 a obr. 166 byly získány pro časový krok (definovaný vztahem (128)) definovaný v systému *Mathematica* příkazem `deltat = 0,01`.



obr. 165



obr. 166

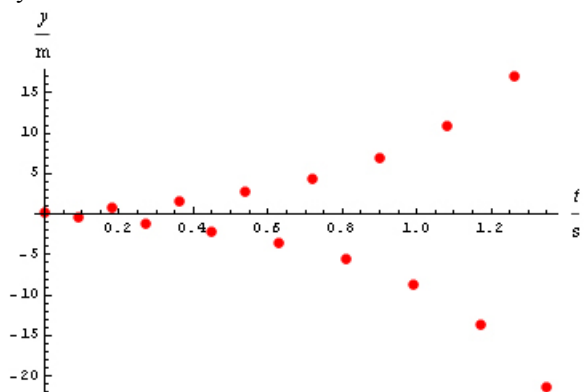
Budeme-li postupně časový krok zvyšovat, budeme získávat méně bodů pro vykreslení obou popisovaných grafů a postupně přestane být sinusová závislost (jasně patrná z grafů na obr. 165 a obr. 166) zřejmá. Zvýšíme-li časový krok nad určitou hodnotu, přestane vytvořený model odpovídat fyzikální realitě. Na obr. 167 a obr. 168 jsou zobrazeny oba popisované grafy znovu, tentokrát pro časový krok `deltat = 0,09`. Je vidět, že amplituda výchylky i velikost rychlosti postupem času rostou. A to je v případě vlastního kmitání pružinového oscilátoru nemožné! Pro tuto volbu časového kroku a všechny hodnoty vyšší tak model nedává fyzikálně přijatelné výsledky. Tuto skutečnost je nutné brát v úvahu při řešení všech podobných úloh.

Metody dynamického modelování poskytují dostatečně přesné výsledky pouze tehdy, pokud je zvolen dostatečně malý časový krok v porovnání s dobou, po kterou modelování provádíme.

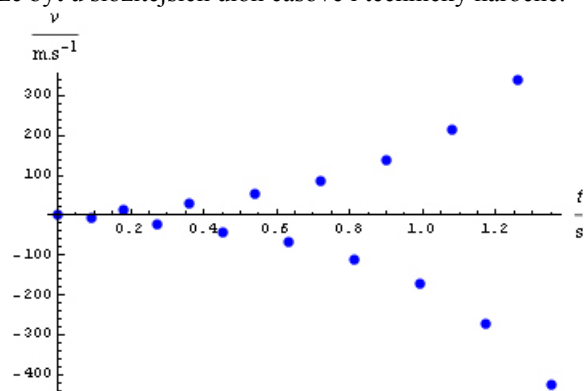
Při modelování pohybu harmonického oscilátoru jsme volili časový krok 0,01 s a jeho perioda (odečtená např. z grafu na obr. 165) je přibližně 0,3 sekundy (tj. 30krát vyšší než časový krok). Budeme-li modelovat pohyb družice kolem Země, bude přijatelný časový krok roven řádově desítky sekund.

Menší časové kroky kladou vyšší nároky na paměť počítače, neboť je třeba uchovávat větší množství dat pro vykreslení hledaných funkčních závislostí. Větší časové kroky na druhou stranu zvyšují nepřesnost výpočtu a mohou poskytovat fyzikálně nesprávné výsledky (viz grafy na obr. 167 a obr. 168). Proto je nutné odzkoušet

výpočet pro několik časových kroků a pro další práci s dosaženými výsledky vybrat ty, které nejvíce odpovídají fyzikálnímu rozboru dané situace. Toto zkoušení ovšem může být u složitějších úloh časově i technicky náročné.



obr. 167



obr. 168