

## Diferenciální počet - motivační úlohy

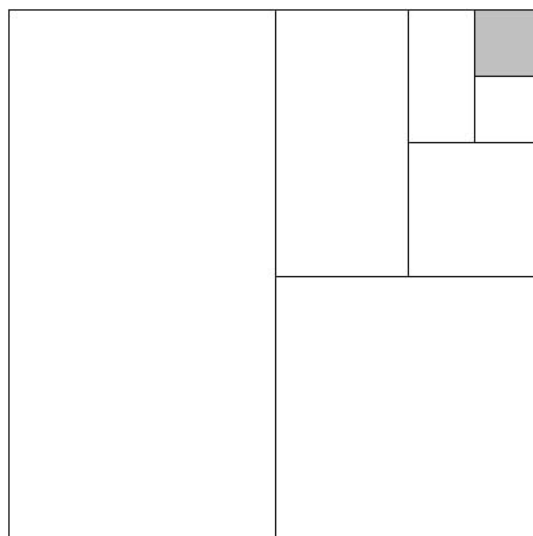
1. Zenonova úloha *Achilles a želva*: Achilles, který je schopný běžet rychlostí o velikosti  $1 \text{ m.s}^{-1}$ , závodí s želvou, která se pohybuje rychlostí o velikosti  $0,5 \text{ m.s}^{-1}$ . Aby želva nebyla v nevýhodě, dá jí Achilles náskok jeden metr. Za jak dlouho dohoní Achilles želvu? Jakou dráhu přitom Achilles urazí?

2. Pokuste se odhadnout, čemu je roven součet:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \dots$$

3. Pokuste se odhadnout, čemu je roven součet

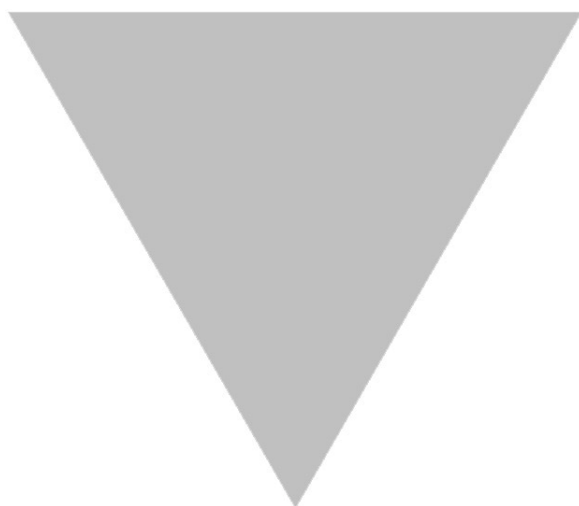
tzv. harmonické řady:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$



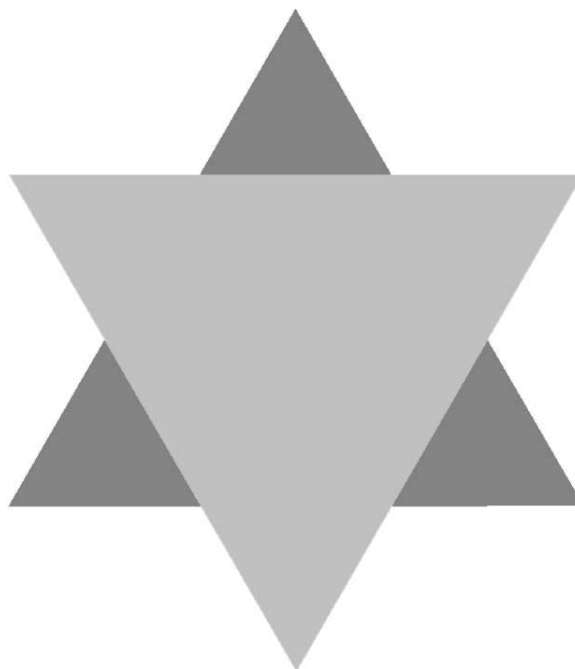
obr. 1

4. Čtverec na obr. 1 je postupně dělen na stále menší části. Jakým způsobem je čtverec dělen? Kolik dělení je nutné udělat, aby vyšrafovaná ploška měla obsah menší než a) 10 % obsahu čtverce, b) 1 % obsahu čtverce, c) 0,1 % obsahu čtverce, d) 0,01 % obsahu čtverce?

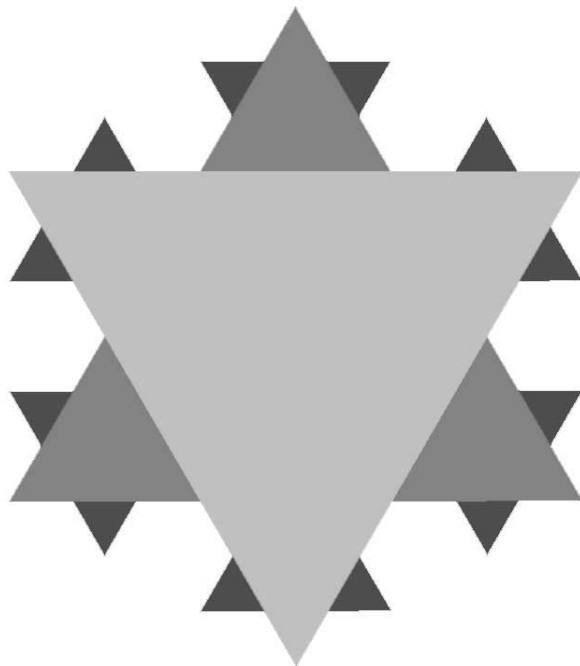
5. V roce 1904 švédský matematik Helge van Koch poprvé popsal plošný útvar, který dodnes nese jeho jméno - Kochova vločka. Tento útvar je možné získat takto: k prostřední třetině každé strany rovnostranného trojúhelníka připojíme další rovnostranný trojúhelník. K prostřední třetině každé ze vzniklých stran útvaru nyní připojíme opět rovnostranný trojúhelník. Tímto způsobem je možné pokračovat dále - viz obr. 2 až obr. 5. Určete obvod a obsah útvarů na obrázcích. Délka strany původního trojúhelníka je  $a = 27 \text{ cm}$ .



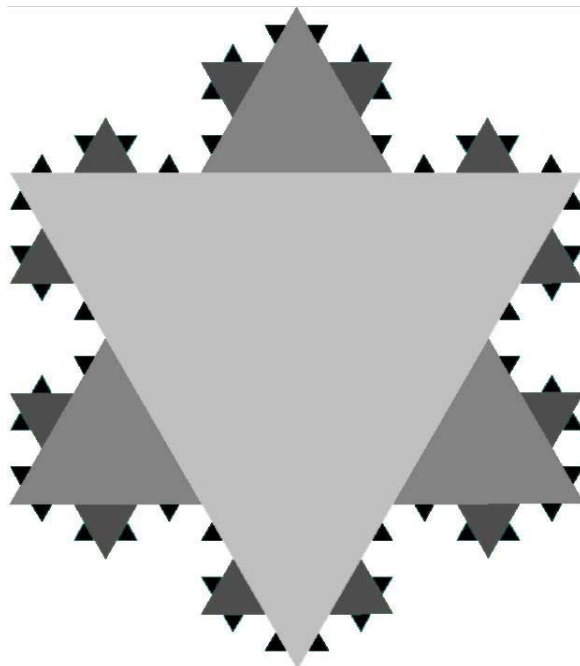
obr. 2



obr. 3

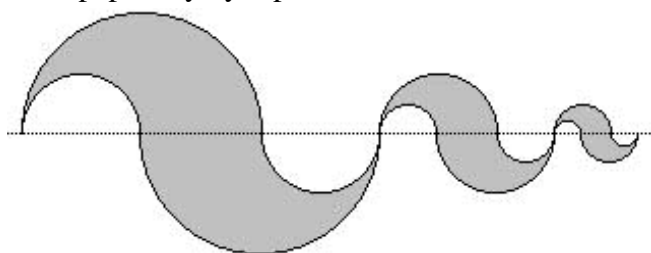


obr. 4



obr. 5

6. Na obr. 6 je znázorněn „hádek“, který vznikl postupným spojováním částí kruhu. Poloměry kruhů, z nichž byly vyříznuty dvě různě velké za sebou jdoucí části „hádk“, jsou v poměru 2:1. Poloměr největšího z nich je  $r$ . Určete kolik papíru je třeba na zhotovení „hádk“ na obrázku. Kolik papíru by bylo potřeba na zhotovení „nekonečného hádk“?



obr. 6

7. Je dána funkce  $f(x) = \frac{4x^2 - 25}{5 - 2x}$ . Určete její definiční obor. Pokuste se jí „přirozeným způsobem“ dodefinovat v bodě, který nepatří do definičního oboru.

8. Jsou dány dvě funkce  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  a  $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ . Dosazujte postupně za  $x$  přirozená čísla 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 50, 100, 1000, ... do obou funkcí.

$x$	$f(x)$	$g(x)$
1		
2		
3		
4		
5		
10		
20		
50		
100		
1000		

Jaké vlastnosti mají funkce  $f(x)$  a  $g(x)$ ?

Co je nápadné na funkčních hodnotách obou funkcí?