

Posloupnosti

učební text

Jaroslav Reichl

OBSAH

1. Posloupnosti a jejich vlastnosti	4
1.1 Pojem posloupnost	4
1.1.1 Připomenutí funkcí	4
1.1.2 Definice posloupnosti	4
1.1.3 Způsoby zadání posloupností	5
1.2 Rekurentní určení posloupnosti	6
1.3 Vlastnosti posloupností	7
1.3.1 Monotónnost posloupnosti	7
1.3.2 Omezenost posloupnosti.....	9
1.4 Matematická indukce	9
2. Aritmetické a geometrické posloupnosti	11
2.1 Aritmetická posloupnost	11
2.1.1 Základní vlastnosti aritmetické posloupnosti	11
2.1.2 Užití aritmetické posloupnosti.....	12
2.2 Geometrická posloupnost	12
2.2.1 Základní vlastnosti geometrické posloupnosti.....	12
2.2.2 Užití geometrických posloupností	13
2.2.2.1 Základní pojmy finanční matematiky.....	14
2.2.2.2 Jednoduché úrokování.....	14
2.2.2.3 Spoření bez průběžného vybírání s jednou vloženou jistinou	15
2.2.2.4 Spoření bez průběžného vybírání s pravidelně vkládanou jistinou na konci každého úrokovacího období.....	16
2.2.2.5 Spoření bez průběžného vybírání s pravidelně vkládanou jistinou na začátku každého úrokovacího období.....	17
2.2.2.6 Poskytování úvěru	18
2.3 Vlastnosti aritmetických a geometrických posloupností	19
3. Limity posloupností a nekonečné řady	22
3.1 Limita posloupnosti	22
3.1.1 Zavedení pojmu	22
3.1.2 Vlastnosti limit posloupností.....	23
3.1.2.1 Aritmetické posloupnosti	24
3.1.2.2 Geometrické posloupnosti.....	24
3.1.3 ***Užití limit posloupností	24
3.1.3.1 Výpočet čísla π	25
3.1.3.2 Výpočet čísla e	26
3.1.3.3 Výpočet druhé odmocniny reálných čísel	27
3.2 Nevlastní limita posloupnosti	28
3.3 Nekonečná geometrická řada	29

Text je psán pomocí několika stylů:

Běžný text, odvozování vztahů, výsledné vztahy, ...

DEFINICE DŮLEŽITÝCH MATEMATICKÝCH POJMŮ, ZNĚNÍ MATEMATICKÝCH VĚT.

Komentář, který probíranou látku rozšiřuje, upřesňuje či doplňuje.

Zjednodušená tvrzení pro lepší pochopení, která jsou tedy z matematického hlediska nepřesná, ale která mohou napomoci k lepšímu pochopení probírané látky.

Text v některých částech překračuje běžně probíranou středoškolskou látku z matematiky. Tyto rozšiřující poznatky mohou přispět k hlubšímu pochopení látky těm žákům, kteří budou matematiku studovat i na vysoké škole (a to nejen na vysoké škole technického zaměření).

1. POSLOUPNOSTI A JEJICH VLASTNOSTI

Posloupnosti jsou speciálním případem funkcí, a proto budeme často při vyšetřování vlastností posloupností využívat základních znalostí funkcí a jejich vlastností (monotonie, limity, ...).

1.1 Pojem posloupnost

1.1.1 Připomenutí funkcí

Vzhledem k tomu, že posloupnost je zvláštním případem funkce, bylo by dobré připomenout definici funkce.

FUNKCE f JE ZOBRAZENÍ LIBOVOLNÉ NEPRÁZDNÉ MNOŽINY A DO MNOŽINY REÁLNÝCH ČÍSEL.

Obecně funkcí tedy může být např. přiřazení, které danému člověku přiřadí jeho výšku. Člověka vybíráme z určité množiny lidí (ve třídě, ve městě, ...) a výška je určena obecně reálným číslem. Takže to funkce je.

Speciálním případem pak je reálná funkce (jedné reálné proměnné):

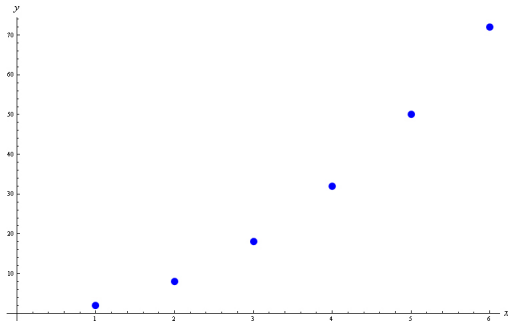
REÁLNÁ FUNKCE (JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ) JE ZOBRAZENÍ Z PODMNOŽINY REÁLNÝCH ČÍSEL DO MNOŽINY REÁLNÝCH ČÍSEL.

V případě reálné funkce jedné reálné proměnné již není možné vybírat např. z množiny lidí, předmětů, ... Obě množiny (jak ta, z níž zobrazujeme, tak ta, do které zobrazujeme) musí být podmnožinou množiny reálných čísel.

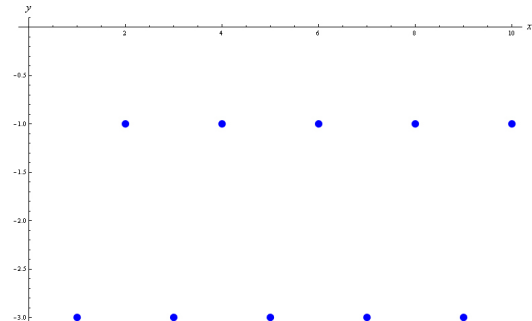
Nyní zkusíme vykreslit několik příkladů funkcí, na kterých si ukážeme, jak se liší funkce od posloupnosti.

Ilustrační příklad: Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = 2x^2$, kde $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Řešení: Graf, který je řešením zadané úlohy, je zobrazen na obr. 1. Graf připomíná graf funkce $y = 2x^2$, ale v tomto případě je dána množina, z níž zobrazujeme, pouze výčtem prvků. Proto grafem nebude spojitá křivka, jak jsme byli zvyklí v případě funkcí, ale pouze jednotlivé body.



obr. 1



obr. 2

Příklad: Je dána funkce $h: y = -2 + (-1)^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Zobrazte její body do soustavy souřadnic.

Řešení: Graf funkce h je zobrazen na obr. 2. Opět jsou výsledkem jednotlivé body a ne spojitá křivka. Navíc v tomto případě vykazují body grafu funkce jistou periodicitu. I takové funkce (resp. posloupnosti) se v matematice občas vyskytnou.

1.1.2 Definice posloupnosti

Obě funkce zmíněné v kapitole 1.1.1 mají jedno společné: jejich definičním oborem je množina přirozených čísel nebo její část. Takové funkce se nazývají **posloupnosti**.

KAŽDÁ FUNKCE, JEJÍMŽ DEFINIČNÍM OBOREM JE MNOŽINA \mathbb{N} VŠECH PŘIROZENÝCH ČÍSEL, SE NAZÝVÁ NEKONEČNÁ POSLOUPNOST.

Skutečně jedinou odlišností funkce a posloupnosti je definiční obor. U funkcí je definičním oborem množina reálných čísel (nebo její část - např. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, \mathbb{R}^+ , ...) a jejím grafem je spojitá křivka. U posloupností je definičním oborem množina přirozených čísel resp. její část a graf posloupnosti tvoří jednotlivé body.

KAŽDÁ FUNKCE, JEJÍMŽ DEFINIČNÍM OBOREM JE MNOŽINA VŠECH PŘIROZENÝCH ČÍSEL n TAKOVÝCH, ŽE $n \leq n_0$, KDE n_0 JE PEVNĚ DANÉ PŘIROZENÉ ČÍSLO, SE NAZÝVÁ KONEČNÁ POSLOUPNOST.

Konečná posloupnost je tedy definovaná pouze pro část přirozených čísel. Takovou posloupnost je pak možné vyjádřit výčtem prvků (viz podrobněji v kapitole 1.1.3), a to v případě, že daná posloupnost má 5, 10 nebo 1000 členů. Principiálně je tedy možné vypsát všechny její členy. To u nekonečné posloupnosti možné není!

Bude-li ze souvislosti zřejmé, jestli se pracuje s konečnou resp. nekonečnou posloupností, stačí mluvit jen o posloupnosti.

Skutečnost, že funkční hodnota např. funkce $f: y = 2x^2$ v bodě 2 je rovna 8, se zapisuje ve tvaru $f(2) = 8$. Vzhledem k tomu, že předpis $f: y = 2x^2$ (definovaný v kapitole 1.1.1) ovšem neurčuje funkci, ale (konečnou) posloupnost (definičním oborem je totiž množina, která tvoří část množiny přirozených čísel), používá se jiný **způsob zápisu**: $f_2 = 8$ a čte se „druhý člen posloupnosti f je roven 8“.

Další rozdíl oproti funkcím je ve způsobu zápisu definice samotné posloupnosti: tak např. místo zápisu $h: y = -2 + (-1)^n$ se používá označení $\left(-2 + (-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ resp. $(h_n)_{n=1}^{\infty}$; $h_n = -2 + (-1)^n$. Tyto zápisy čteme: „posloupnost $-2 + (-1)^n$ pro n od jedné do nekonečna“ resp. „posloupnost h_n , kde n probíhá od jedné do nekonečna, a h_n se rovná $-2 + (-1)^n$ “. Obdobným způsobem je možné vyjádřit i konečnou posloupnost.

V tom případě by se místo znaku pro nekonečno v horním indexu objevilo konkrétní maximální n_0 , pro které je posloupnost ještě definována.

Analogicky je možné definovat posloupnost pro přirozená čísla začínající až od určitého čísla, které je větší než jedna.

V právě uvedených příkladech říkáme, že posloupnost je určena vzorcem pro n -tý člen.

Nyní uvedeme některé příklady posloupností, aby bylo zřejmé, že definice posloupnosti může být i komplikovanější:

1. $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left((-2)^n\right)_{n=1}^{\infty}$;
2. $(b_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$;
3. $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $c_n = n$ pro n liché ;
 $c_n = n - 1$ pro n sudé ;
4. $(d_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $d_n = 3$ $n \in \{1, 2\}$;
 $d_n = -3$ $n \in \{3, 4\}$;
 $d_n = -1,5n$ $n \geq 5$
5. ...

1.1.3 Způsoby zadání posloupností

Existuje několik způsobů zadání posloupnosti:

1. vzorcem pro n -tý člen - viz konec kapitoly 1.1.2;
2. tabulka uspořádaných hodnot posloupnosti - tento způsob zadání posloupnosti lze použít jen pro konečné posloupnosti;
3. graf uspořádaných hodnot posloupnosti (viz např. obr. 1) - opět je možné tento způsob zadání posloupnosti použít jen pro konečné posloupnosti;

Grafy nekonečných posloupností budeme také používat, ale ne ve smyslu definice posloupnosti, ale jako vizuální pomůcku pro určení vlastností posloupností (monotonie, omezenost, ...) – viz detailněji v kapitole 1.3.

4. rekurentní určení posloupnosti - viz kapitola 1.2.

Mezi jednotlivými způsoby zadání posloupnosti lze přecházet a je tedy možné jednu a tutéž posloupnost vyjádřit několika způsoby.

S rekurentním vyjádřením bývá občas problém a není možné jej v některých případech na středoškolské úrovni nahradit vyjádřením pro n -tý člen. Přesto je tento způsob zadání posloupnosti pro řadu (většinou speciálních) posloupností důležitý.

1.2 Rekurentní určení posloupnosti

Rekurentně určit posloupnost, znamená uvést prvních několik jejích členů a potom n -tý (resp. $(n+1)$ -ní, $(n+2)$ -hý, ...) člen vyjádřit pomocí vzorce, v němž vystupují členy předcházející. Např.:

$$1. \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = -3a_n + 1;$$

To tedy znamená, že a_2 určíme takto: $a_2 = a_{1+1} = -3a_1 + 1 = -3 \cdot 2 + 1 = -5$. Pro a_3 bude platit $a_3 = a_{2+1} = -3a_2 + 1 = -3 \cdot (-5) + 1 = 16$, ... Není možné tedy určit rovnou např. 150tý člen posloupnosti. Abychom tento člen určili, musíme znát všech 149 předcházejících členů.

$$2. \quad b_1 = 3, \quad b_2 = 5, \quad b_{n+2} = b_n - 2b_{n+1};$$

$$3. \quad c_1 = -1, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = -1, \quad c_{n+3} = 2(c_{n+2})^{n+2} + c_{n+1};$$

$$4. \quad \dots$$

Některé rekurentní posloupnosti je možné vyjádřit vztahem pro n -tý člen, ale ne všechny. Opačně, tj. posloupnost danou vztahem pro n -tý člen vyjádřit rekurentně, to je možné vždy.

Italský kupec a matematik Leonardo Pisánský (asi 1170 - asi 1250) zvaný Fibonacci (tj. „syn Bonacciův“) uvádí ve své knize *Liber abaci* (z roku 1202) tuto úlohu: Kdosi umístil pár králíků na místě ze všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků zde bude za rok, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede měsíčně na svět jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku. S případy uhynutí se nepočítá. První pár králíků umístěný do ohrady je starý právě jeden měsíc.

Pokusme se tuto úlohu vyřešit.

Po vypočítání počtu králíků v ohradě na konci prvního měsíce (1 pár), druhého měsíce (2 páry), třetího měsíce (3 páry) a čtvrtého měsíce (5 párů), se začíná situace komplikovat a začali bychom se ztrácet v počtu párů králíků. Proto si označíme počet párů králíků na konci $(n+1)$ -ního měsíce a_{n+1} . Na konci $(n+2)$ -ho měsíce bude v ohradě a_{n+1} „starých“ párů králíků (tj. párů králíků z konce $(n+1)$ -ního měsíce), ale kromě toho se ještě narodí tolik párů králíků, kolik jich bylo na konci n -tého měsíce. Narodí se tedy a_n párů králíků. Jinak řečeno, pro počet párů na konci $(n+2)$ -ho měsíce dostaneme vztah

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n. \quad (1)$$

Hledaný počet párů králíků na konci roku proto není možné vypočítat přímo: musíme určit všechny mezikroky, tj. počty párů na konci každého měsíce. Tak postupně dostáváme: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$, $a_{11} = 144$ a $a_{12} = 233$. Na konci roku tedy bude v ohradě 233 párů králíků.

Uvedená posloupnost, kterou je možné vyjádřit rekurentním vztahem (1), se nazývá **Fibonacciho posloupnost**. Fibonacciho rekurentní posloupnost je možné vyjádřit také vztahem pro n -tý člen. Po výpočtu, který zde nebudeme uvádět, neboť vyžaduje hlubší znalosti posloupností, získáme vztah

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]. \quad (2)$$

Ačkoliv ve vztahu (2) vystupují iracionální čísla, každý člen posloupnosti popsané tímto vztahem, je celočíselný a odpovídá příslušnému členu Fibonacciho posloupnosti.

Fibonacciho posloupnost je důležitá pro teoretickou matematiku, kombinatoriku a další odvětví matematiky.

1.3 Vlastnosti posloupností

Vzhledem k tomu, že posloupnost (jak konečná, tak nekonečná) je speciálním případem funkce (o čemž bylo pojednáno v kapitolách 1.1.1 a 1.1.2), budou i vlastnosti posloupností velmi podobné vlastnostem funkcí.

1.3.1 Monotónnost posloupnosti

POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **SE NAZÝVÁ ROSTOUCÍ, PŘÁVĚ TEHDY KDYŽ PRO VŠECHNA** $r, s \in \mathbb{N}$ **PLATÍ: JE-LI** $r < s$, **PAK** $a_r < a_s$.

POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **SE NAZÝVÁ KLESAJÍCÍ, PŘÁVĚ KDYŽ PRO VŠECHNA** $r, s \in \mathbb{N}$ **PLATÍ: JE-LI** $r < s$, **PAK** $a_r > a_s$.

Z právě uvedených definicí vyplývají i věty, které jsou užitečné pro praktické počítání s posloupnostmi.

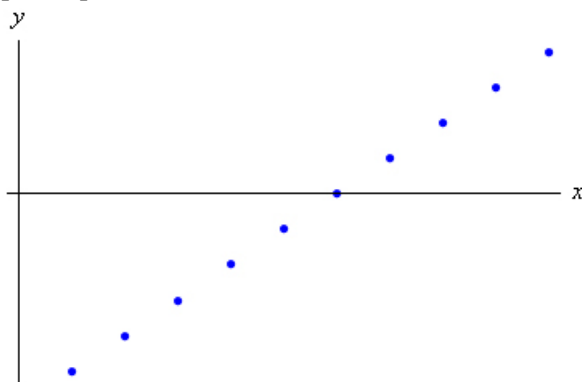
VĚTA: POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **JE ROSTOUCÍ, PŘÁVĚ KDYŽ PRO VŠECHNA** $n \in \mathbb{N}$ **JE**

$$a_n < a_{n+1}. \quad (3)$$

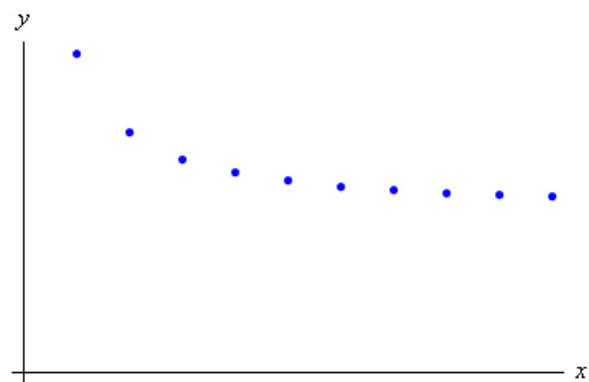
VĚTA: POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **JE KLESAJÍCÍ, PŘÁVĚ KDYŽ PRO VŠECHNA** $n \in \mathbb{N}$ **JE**

$$a_n > a_{n+1}. \quad (4)$$

Příkladem rostoucí posloupnosti je např. posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n}{2} - 3\right)_{n=1}^{\infty}$, jejíž graf je zobrazen na obr. 3. Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, jejíž graf je zobrazen na obr. 4, je příkladem klesající posloupnosti.



obr. 3



obr. 4

Posloupnosti, analogicky jako funkce, mohou obsahovat konstantní úseky. Proto je nutné definici monotonie posloupností rozšířit.

POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **SE NAZÝVÁ NEKLESAJÍCÍ, PŘÁVĚ KDYŽ PRO VŠECHNA** $r, s \in \mathbb{N}$ **PLATÍ: JE-LI** $r < s$, **PAK** $a_r \leq a_s$.

POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **SE NAZÝVÁ NEROSTOUCÍ, PŘÁVĚ KDYŽ PRO VŠECHNA** $r, s \in \mathbb{N}$ **PLATÍ: JE-LI** $r < s$, **PAK** $a_r \geq a_s$.

Pro praktické počítání jsou opět užitečnější následující věty.

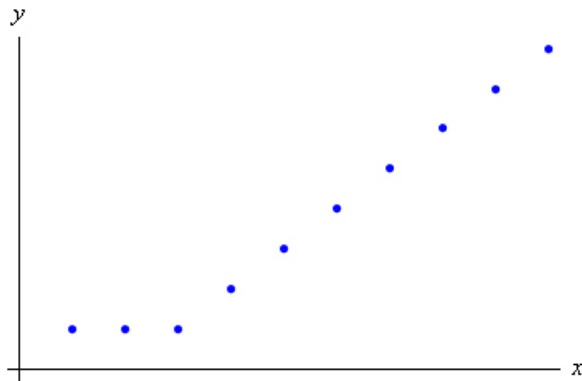
VĚTA: POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **JE NEKLESAJÍCÍ, PŘÁVĚ KDYŽ PRO VŠECHNA** $n \in \mathbb{N}$ **JE**

$$a_n \leq a_{n+1}. \quad (5)$$

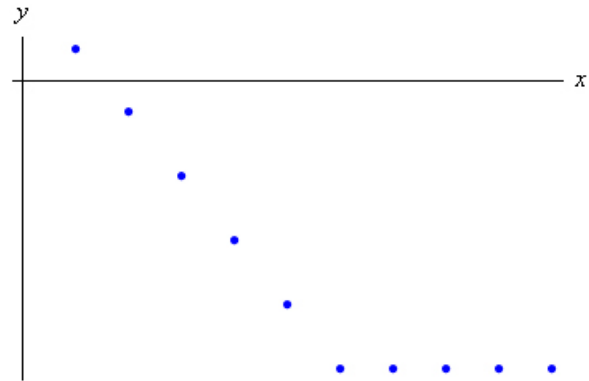
VĚTA: POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **JE NEROSTOUCÍ, PŘÁVĚ KDYŽ PRO VŠECHNA** $n \in \mathbb{N}$ **JE**

$$a_n \geq a_{n+1}. \quad (6)$$

Příkladem neklesající posloupnosti může být např. posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ definovaná pro $n \in \{1, 2, 3\}$ předpisem $c_n = 1$ a pro $n \geq 4$ předpisem $c_n = n - 2$, jejíž graf je zobrazen na obr. 5. Posloupnost $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ definovaná pro $n \leq 6$ předpisem $d_n = -2n + 3$ a pro $n \geq 7$ předpisem $d_n = 1$ je příkladem nerostoucí posloupnosti. Její graf je zobrazen na obr. 6.



obr. 5



obr. 6

Neklesající posloupnost tedy může být konstantní nebo rostoucí - nesmí v žádném případě klesat! Analogicky nerostoucí posloupnost nesmí nikdy růst - může být tedy konstantní nebo klesající.

S využitím vztahů (3) až (6) v právě uvedených větách, které vyplývají z uvedených definic, lze rozhodovat o monotonii posloupnosti. Základní úvahu ukážeme na vztahu (3), nicméně analogická úvaha platí pro ostatní tři uvedené vztahy. Vztah (3) můžeme přepsat buď do tvaru

$$a_n - a_{n+1} < 0 \quad (7)$$

nebo (pokud budeme mít jistotu, že všechny členy posloupnosti jsou pro libovolné přirozené n nenulové) do tvaru

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1. \quad (8)$$

Budeme tedy porovnávat rozdíl dvou libovolných po sobě jdoucích členů posloupnosti vzhledem k nule nebo podíl dvou libovolných po sobě jdoucích nenulových členů posloupnosti vzhledem k jedničce. Vztahy analogické vztahům (7) a (8) lze odvodit i ze vztahů (4) až (6).

Důležité je, aby členy následovaly po sobě, tj. jejich pořadí se lišilo o jedničku.

Pak je relativně snadné poznat, zda příslušný rozdíl je menší či větší než nula, resp. zda příslušný podíl je větší či menší než jedna. Tyto „krajní“ hodnoty se zejména v přirozených číslech, pro která jsou posloupnosti definované, dobře porovnávají.

Příklad: Zjistěte monotonii posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n^2}{2} - 6\right)_{n=1}^{\infty}$.

Řešení: Při určování monotonie dané posloupnosti vyjdeme ze vztahu (7), který platí pro rostoucí posloupnost. Do tohoto vztahu dosadíme tedy n -tý a $(n+1)$ -ní člen zadané posloupnosti. Platí:

$a_n = \frac{n^2}{2} - 6$ a $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2} - 6$ (tj. všude, kde se vyskytne v zadání posloupnosti n dosadíme v případě $(n+1)$ -ního členu $n+1$. Můžeme tedy dosadit do vztahu (7):

$a_n - a_{n+1} = \frac{n^2}{2} - 6 - \left(\frac{(n+1)^2}{2} - 6\right)$. Upravíme tak, abychom mohli rozhodnout o tom, zda uvedený

vztah je větší nebo menší než nula. Postupnými úpravami tedy dostaneme:

$a_n - a_{n+1} = \frac{n^2}{2} - 6 - \frac{n^2 + 2n + 1}{2} + 6 = \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{2} - n - \frac{1}{2} = -n - \frac{1}{2}$. Vzhledem k tomu, že za n dosazujeme

přirozená čísla (tj. čísla větší než 0), je zřejmé, že platí $a_n - a_{n+1} = -n - \frac{1}{2} < 0$. To znamená, že zadaná posloupnost je rostoucí, neboť její dva libovolné po sobě jdoucí členy splňují podmínku (7).

Analogicky můžeme použít vztah (8).

Příklad: Zjistěte monotonii posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Řešení: Nyní vyjdeme ze vztahu (8), který platí pro rostoucí posloupnost. Stejně jako v minulém příkladu budeme potřebovat vyjádření n -tého členu a $(n+1)$ -ního členu zadané posloupnosti. Platí:

$b_n = \frac{n+1}{n}$ a $b_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1}$. Po dosazení do vztahu (8) dostaneme $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+1+1}{n+1}}$. Tento vztah

upravíme tak, abychom mohli rozhodnout o monotonii zadané posloupnosti. Postupnými úpravami

tedy získáme $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+1+1}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n} + \frac{1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n}$. Vzhledem

k tomu, že n vybíráme z množiny přirozených čísel, je zlomek $\frac{1}{n^2+2n}$ vždy kladný, a proto platí

$1 + \frac{1}{n^2+2n} > 1$. Dospěli jsme tedy k závěru $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n^2+2n} > 1$, tedy $b_n > b_{n+1}$. To znamená, že

zadaná posloupnost je klesající.

Skutečnost, zda použijeme ke zjišťování monotonie posloupnosti vztah (7) nebo vztah (8) závisí na tom, v jakém tvaru je daná posloupnost zadaná. Některé tvary zadání jsou snadnější na úpravu pomocí rozdílu dvou po sobě jdoucích členů, jiné pomocí podílů těchto dvou členů.

K jakému závěru vést výše uvedené důkazy může pomoci i výčet prvních několika členů posloupnosti, ze kterých poznáme, zda posloupnost roste či klesá. Poté se pomocí vhodného rozdílu resp. podílu pokusíme tuto skutečnost dokázat.

Dále také platí následující věty.

VĚTA: KAŽDÁ ROSTOUCÍ POSLOUPNOST JE NEKLESAJÍCÍ A KAŽDÁ KLESAJÍCÍ POSLOUPNOST JE NEROSTOUCÍ.

POSLOUPNOSTI, KTERÉ JSOU NEROSTOUCÍ NEBO NEKLESAJÍCÍ, SE NAZÝVAJÍ MONOTONNÍ POSLOUPNOSTI.

1.3.2 Omezenost posloupnosti

Stejně jako u funkcí, i u posloupností můžeme mluvit o jejich omezenosti:

POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ SE NAZÝVÁ SHORA OMEZENÁ, PŘÁVĚ KDYŽ EXISTUJE REÁLNÉ ČÍSLO h TAKOVÉ, ŽE PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$ JE $a_n \leq h$.

POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ SE NAZÝVÁ ZDOLA OMEZENÁ, PŘÁVĚ KDYŽ EXISTUJE REÁLNÉ ČÍSLO d TAKOVÉ, ŽE PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$ JE $a_n \geq d$.

POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ SE NAZÝVÁ OMEZENÁ, PŘÁVĚ KDYŽ JE OMEZENÁ SHORA A ZÁROVEŇ JE OMEZENÁ ZDOLA.

Příkladem posloupnosti omezené zdola jsou posloupnosti, jejichž grafy jsou zobrazené na obr. 4, obr. 5 a obr. 6 v kapitole 1.3.1. Příkladem omezené posloupnosti je posloupnost, jejíž graf je zobrazen na obr. 2 v kapitole 1.1.1.

1.4 Matematická indukce

Matematická indukce je jeden z typů důkazů, který se v matematice velmi často používá. Začneme ilustračním příkladem a poté vysvětlíme základní postup při dokazování matematických tvrzení matematickou indukcí.

Ilustrační příklad: Uvažujme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je určena rekurentně takto: $a_1 = 1$,

$a_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Určete tuto posloupnost vztahem pro n -tý člen.

Řešení: Při výpočtu členů této posloupnosti vytvoříme posloupnost: $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$. Na základě toho lze vyslovit domněnku (hypotézu), že pro n -tý člen zadané posloupnosti platí $a_n = \frac{1}{n^2}$. S určitostí to ale tvrdit nemůžeme, protože nejsme schopni dosazením do rekurentního vztahu ověřit platnost této domněnky (hypotézy) pro všechna přirozená čísla.

Přirozených čísel je totiž nekonečně mnoho, a proto není ověření pro všechna přirozená čísla možné.

Ze znalosti, že uvedená domněnka je správná např. pro $n = 100$, lze přesto už snadno (podle zadaného rekurentního vztahu) dokázat, že tento vztah platí i pro $n = 101$.

Zkusíme nyní dokázat obecnější tvrzení: platí-li uvedený rekurentní vztah pro libovolné přirozené číslo k , pak platí také pro číslo $k + 1$. Předpokládáme tedy, že platí $a_k = \frac{1}{k^2}$. Pro člen a_{k+1} pak podle

$$\text{rekurentního vztahu platí: } a_{k+1} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \cdot a_k = \frac{k^2}{(k+1)^2} \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Na základě dosazování jsme zjistili, že vztah $a_n = \frac{1}{n^2}$ platí pro několik prvních přirozených čísel.

Pomocí právě dokázaného tvrzení pro libovolné přirozené číslo k už víme, že uvedený vztah platí pro každé další přirozené číslo.

Na právě uvedeném příkladu jsme se seznámili s novým typem důkazu, který se nazývá **matematická indukce** (resp. **důkaz matematickou indukcí**). Matematickou indukcí se dokazují věty typu: „Pro všechna přirozená čísla n platí vztah (resp. tvrzení) $V(n)$.“ Přitom $V(n)$ vyjadřuje vlastnost přirozených čísel, která je vyjádřena nějakou rovnicí nebo nerovnicí.

Důkaz matematickou indukcí se skládá ze dvou na sebe navazujících částí (kroků):

1. Důkaz požadovaného tvrzení $V(n)$ pro $n = 1$.
2. Pro každé přirozené číslo k dokážeme: Jestliže platí $V(k)$, pak platí $V(k + 1)$.

Důkaz matematickou indukcí je podobný dominovým kostkám, které postavíme ve správných vzdálenostech od sebe do řady a poté do první kostky v řadě cvrnkeme. Postupně tak spadnou všechny ostatní. Přesně stejným způsobem „funguje“ důkaz matematickou indukcí: důkaz pro $n = 1$ je ono počáteční cvrnknutí a druhý krok důkazu odpovídá tomu, že když spadne k -tá kostka, spadne i $(k + 1)$ -ní kostka.

První krok důkazu je naprosto nezbytný, přestože se může zdát, že je pouze formální. Je totiž nutný k tomu, aby bylo možné vyvolat „dominový efekt“, tj. aby byl důkaz proveden pro první krok. O jeho nezbytnosti svědčí následující příklad:

Příklad: Dokažte, že pro všechna přirozená n platí: Výraz $V(n) = n^2 + n + 1$ je pro každé n sudý.

Řešení: Vynecháním prvního kroku důkazu lze tuto větu matematickou indukcí „dokázat“ snadno: Předpokládejme, že číslo $V(k) = k^2 + k + 1$ je sudé. Pak i číslo $V(k + 1) = (k + 1)^2 + (k + 1) + 1$ je sudé.

Rozpisem čísla $V(k + 1)$ dostaneme: $V(k + 1) = (k + 1)^2 + (k + 1) + 1 = k^2 + 2k + 1 + k + 1 + 1$. Přeuspořádáme-li členy součtu dostaneme: $V(k + 1) = k^2 + k + 1 + 2k + 1 + 1 = V(k) + 2k + 2 = V(k) + 2(k + 1)$. Přičteme-li k sudému číslu ($V(k)$) je dle předpokladu číslo sudé) číslo sudé (číslo $2(k + 1)$ je sudé), dostaneme opět číslo sudé.

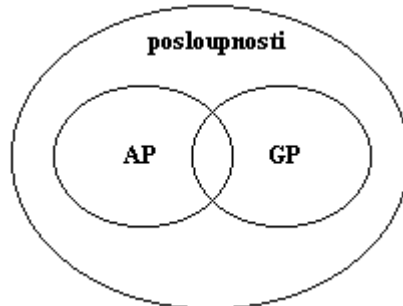
Bohužel, věta uvedená v zadání příkladu neplatí. Ověříme-li první krok matematické indukce, dostaneme: $V(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$. První krok je tedy velmi důležitý! Zde jsme zjistili, že pro $n = 1$ dostáváme číslo liché a tedy se celý následující důkaz provedený matematickou indukcí není platný, neboť jeho první krok ukázal, že tvrzení neplatí pro $n = 1$.

Skutečnost, že čísla ve tvaru $V(n) = n^2 + n + 1$, jsou pro každé přirozené n lichá, lze dokázat např. důkazem přímým.

2. ARITMETICKÉ A GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI

Aritmetické posloupnosti (viz kapitola 2.1) patří spolu s geometrickými posloupnostmi (viz kapitola 2.2) ke zvláštním případům posloupností, pro které platí jednoduchá početní pravidla. Aritmetické a geometrické posloupnosti umožňují též jednoduché řešení řady praktických úloh (např. z finanční matematiky – detailněji popsané v kapitole 2.2.2, ...).

Dříve, než začneme tyto posloupnosti vyšetřovat, je třeba si uvědomit, že množina všech posloupností se nedělí pouze na aritmetické posloupnosti (označené ve schématu na obr. 7 jako AP) a geometrické posloupnosti (označené jako GP). Některé posloupnosti nejsou ani aritmetické ani geometrické. Dokonce se mohou vyskytovat posloupnosti, které jsou zároveň jak aritmetické, tak geometrické (viz obr. 7).



obr. 7

2.1 Aritmetická posloupnost

2.1.1 Základní vlastnosti aritmetické posloupnosti

S reálnými příklady, které lze matematicky popsat pomocí aritmetické posloupnosti, se setkáváme i v praxi:

1. velikost rychlosti šíření zvuku ve vzduchu je popsána rovnicí $v = (331 + 0,6t) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, kde t je teplota vzduchu udávaná ve stupních Celsia. S rostoucí teplotou se tedy velikost rychlosti zvuku ve vzduchu rovnoměrně zvyšuje.
2. rovnání konzerv v obchodě do „pyramidy“;
3. ...

Aritmetická posloupnost je tedy zvláštním případem posloupnosti, v níž se každé dva její po sobě jdoucí členy liší o konstantu.

POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ SE NAZÝVÁ ARITMETICKÁ POSLOUPNOST, PŘÁVĚ KDYŽ EXISTUJE TAKOVÉ REÁLNÉ ČÍSLO d , ŽE PRO KAŽDÉ PŘIROZENÉ ČÍSLO n PLATÍ:

$$a_{n+1} = a_n + d. \quad (9)$$

ČÍSLO d SE NAZÝVÁ DIFERENCE ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI.

V aritmetické posloupnosti se tedy každé dva po sobě jdoucí členy liší o stejnou konstantu - o diferenci d .

VĚTA: V ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ S DIFERENCÍ d PLATÍ PRO KAŽDÉ $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \quad (10)$$

Důkaz: matematickou indukcí

Tato věta tedy svazuje n -tý člen aritmetické posloupnosti s jejím prvním členem.

VĚTA: V ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ S DIFERENCÍ d PLATÍ PRO VŠECHNA $r, s \in \mathbb{N}$:

$$a_r = a_s + (r-s)d. \quad (11)$$

Důkaz: vyplývá z předchozí věty

Vztah (11) je zobecněním vztahu (10). Vztah (10) platí pouze pro první a n -tý člen aritmetické posloupnosti, zatímco vztah (11) platí pro libovolné dva členy (dokonce i pro případ $r = s$).

V řadě případů je důležité znát součet prvních n členů aritmetické posloupnosti. Proto si nyní ukážeme, jak takový součet relativně snadno určit.

VĚTA: PRO SOUČET s_n PRVNÍCH n ČLENŮ ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, TJ. PRO $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$ PLATÍ:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \quad (12)$$

Vztah (12) lze dokázat metodou, kterou předvedl (údajně) v první třídě geniální německý matematik Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), nebo matematickou indukcí. Gaussova metoda vychází ze skutečnosti, že součet $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ prvních n členů aritmetické posloupnosti lze rozepsat s využitím vztahu (10) dvěma způsoby:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_1 + (a_1 + d) + \dots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \quad (13)$$

a

$$s_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + \dots + (a_1 + d) + a_1. \quad (14)$$

Jednu a tu samou posloupnost tedy rozepíšeme jednou „ze předu“ a podruhé „odzadu“. Oba součty jsou pochopitelně totožné.

Sečtením vztahů (13) a (14) postupně dostaneme:

$$2s_n = (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + \dots + (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) = n(2a_1 + (n-1)d).$$

Dále můžeme tedy psát $2s_n = n(a_1 + a_1 + (n-1)d) = n(a_1 + a_n)$, odkud vyplývá $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, což je hledaný vztah (12).

2.1.2 Užití aritmetické posloupnosti

Jak už bylo uvedeno na začátku kapitoly 2.1.1, s aritmetickou posloupností (resp. úlohami, které na aritmetickou posloupnost vedou) je možné se setkat i v praxi. K úspěšnému vyřešení zadané úlohy je třeba převést zadání úlohy do pojmů, které byly vysvětleny v souvislosti s aritmetickou posloupností v kapitole 2.1.1.

2.2 Geometrická posloupnost

2.2.1 Základní vlastnosti geometrické posloupnosti

Příklady geometrické posloupnosti, s nimiž je možné se setkat v praxi, jsou:

1. rozpad radioaktivního nuklidu. To je proces, během kterého se za určitý čas (tzv. poločas přeměny) rozpadne (přemění) statisticky polovina jader, která ještě v daném materiálu zbývají;
2. složené úrokování počátečního vkladu v bance (viz detailněji kapitolu 2.2.2.3);
3. nekontrolovatelný nárůst počtu pacientů s nějakou infekcí (např. COVID-19 v roce 2020);
4. ...

Nyní se podíváme na geometrické posloupnosti obecně z matematického hlediska.

POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ SE NAZÝVÁ GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST, PŘÁVĚ KDYŽ EXISTUJE TAKOVÉ REÁLNÉ ČÍSLO q , ŽE PRO KAŽDÉ PŘIROZENÉ ČÍSLO n PLATÍ:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q. \quad (15)$$

ČÍSLO q SE NAZÝVÁ KVOCIENT GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI.

Existují speciální případy geometrické posloupnosti:

1. je-li $a_1 = 0$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = 0$;
2. je-li $q = 0$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geq 2$, je $a_n = 0$.

V geometrické posloupnosti (v níž je $a_1 \neq 0$ a $q \neq 0$) je tedy podíl každých dvou po sobě jdoucích členů konstantní a je roven kvocientu q .

VĚTA: V GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ S KVOCIENTEM q PLATÍ PRO KAŽDÉ $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \quad (16)$$

Důkaz: matematickou indukcí

Tato věta dává tedy návod na výpočet n -tého členu geometrické posloupnosti pomocí jejího prvního členu.

VĚTA: V GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ S KVOCIENTEM q PLATÍ PRO VŠECHNA $r, s \in \mathbb{N}$:

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}. \quad (17)$$

Důkaz: vyplývá z předchozí věty

Vztah (17) je zobecněním vztahu (16). Vztah (16) platí pouze pro první a n -tý člen, zatímco vztah (17) platí pro libovolné dva členy geometrické posloupnosti.

Stejně jako u aritmetických posloupností (viz kapitola 2.1), tak i u geometrických posloupností je důležitý vztah pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti.

VĚTA: PRO SOUČET s_n PRVNÍCH n ČLENŮ GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, TJ. PRO $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$ PLATÍ:

1. JE-LI $q = 1$, PAK

$$s_n = na_1; \quad (18)$$

2. JE-LI $q \neq 1$, PAK

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (19)$$

Důkaz platnosti vztahů (18) a (19) můžeme provést buď matematickou indukcí nebo úpravou výrazu $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Platnost vztahu (18) pro případ $q = 1$ je zřejmý. Vzhledem k tomu, že v tomto případě je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, pak skutečně $s_n = na_1$.

Vztah (19) (tj. součet prvních n členů geometrické posloupnosti, pro jejíž kvocient platí $q \neq 1$) můžeme dokázat analogicky, jako jsme dokázali platnost vztahu (12) pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti (viz kapitola 2.1.1). Součet prvních n členů geometrické posloupnosti můžeme psát ve tvaru

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_1q + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}. \quad (20)$$

Vztah (20) můžeme nyní vynásobit kvociemem q a dostaneme

$$qs_n = qa_1 + qa_2 + \dots + qa_{n-1} + qa_n = qa_1 + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n. \quad (21)$$

Odečtením vztahů (20) a (21) dostaneme $s_n - qs_n = a_1 + a_1q + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} - qa_1 - a_1q^2 - \dots - a_1q^{n-1} - a_1q^n = a_1 - a_1q^n$. Máme tedy vztah $s_n(1-q) = a_1(1-q^n)$, z něhož po vydělení nenulovým výrazem $1-q$ dostaneme výraz

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \text{ A to je vztah (19), jehož platnost jsme měli dokázat.}$$

Výraz $1-q$ je opravdu nenulový. Uvažujeme totiž pouze takové geometrické posloupnosti, pro jejichž kvocient q platí $q \neq 1$.

2.2.2 Užití geometrických posloupností

Hlavní využití znalostí geometrických posloupností se týká finanční matematiky.

Níže budou ukázány základní matematické operace a úvahy, které se v souvislosti s finančními operacemi v peněžních ústavech používají. Text si neklade za cíl být úplný – o konkrétních dalších možnostech (parametry spoření, parametry úvěrů, parametry leasingu a dalších nabízených služeb a produktů) je třeba se informovat v konkrétních peněžních ústavech.

Na základě vztahů odvozených níže (zejména v kapitole 2.2.2.3) lze řešit i úlohy s ekologickou, demografickou, ... tematikou.

Dříve než přistoupíme k samotnému výpočtu a užití geometrických posloupností ve finanční matematice, je třeba zavést základní pojmy.

2.2.2.1 Základní pojmy finanční matematiky

Vkladatel je člověk, který si chce do nějakého peněžního ústavu uložit své peníze. Částka, kterou do peněžního ústavu vloží, se nazývá **jistina** (počáteční vklad). **Roční úroková míra** se udává v procentech a vyjadřuje, jak velký **úrok** se na účet ročně připíše. Z úroku se odečítá **daň z úroku** (většinou 15 %), kterou peněžní ústav odvádí státu. **Úrok po zdanění**, tj. úrok, z něhož je již odečtena daň (tzv. čistý úrok), se připisuje k vložené částce na účet.

Úrokovací období je část roku (nebo rok celý), za kterou peněžní ústav provádí zúčtování a za kterou připisuje úroky. **Úroková míra pro dané úrokovací období** se vypočte tak, že se roční úroková míra rozdělí na tolik částí, jakou část tvoří úrokovací období z celého roku (např. při roční úrokové míře 10% činí pololetní úroková míra 5%, čtvrtletní úroková míra je 2,5%, měsíční úroková míra je $\frac{10}{12}\% = \frac{5}{6}\%$, ...). Tento postup se týká tzv. **složeného úrokování** (viz kapitoly 2.2.2.3 až 2.2.2.6).

Problematika finanční matematiky je daleko složitější než představuje obsah kapitol 2.2.2.3 - 2.2.2.6, které se přímo dotýkají učiva o geometrických posloupnostech. Ve skutečnosti se úrokovací doba počítá na dny s tím, že platí následující pravidla (akceptovaná v evropských státech):

1. měsíc má 30 dnů;
2. rok má 12 měsíců, tj. 360 dní;
3. ze dvou „hraničních“ dnů, kdy se peníze vkládají a vybírají, se do úrokovacího období započítává pouze jeden nebo oba (v závislosti na zvoleném standardu);
4. ...

2.2.2.2 Jednoduché úrokování

Uvažujme situaci, kdy si vkladatel uloží do peněžního ústavu částku a_0 s roční úrokovou mírou p procent a daní z úroku d procent. Úrokovací období přitom je $\frac{1}{r}$ roku (tj. vklad se úročí r -krát ročně).

V rámci jednoduchého úrokování se vypočte úrok z vložené jistiny a ten se připisuje na účet na konci každého úrokovacího období.

Na konci prvního úrokovacího období bude na účtu částka:

$$a_1 = a_0 + a_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{100-d}{100} = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right).$$

Na konci druhého úrokovacího období bude na účtu částka:

$$a_2 = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0 \cdot \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} = a_0 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right).$$

Na konci třetího úrokovacího období bude na účtu vkladatele částka:

$$a_3 = a_0 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0 \cdot \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100} = a_0 \cdot \left(1 + 3 \cdot \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right).$$

Analogicky získáme částku, kterou bude mít vkladatel uloženou na účtu na konci n -tého úrokovacího období:

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 + n \cdot \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right). \quad (22)$$

V případě, že nebudeme uvažovat žádnou daň z úroku, bude $d = 0$ a vztah (22) se zjednoduší do tvaru:

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 + n \cdot \frac{p}{100r}\right). \quad (23)$$

Vztah (22) odpovídá $n + 1$ -nímu členu aritmetické posloupnosti s diferencí $\frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}$. Záměrně byla tato varianta uvedena zde, u geometrických posloupností, aby byla problematika finanční matematiky ucelená.

Další varianty spoření využívají **složené úrokování**: na konci úrokovacího období se úročí aktuální částka na účtu.

2.2.2.3 Spoření bez průběžného vybírání s jednou vloženou jistinou

Předpokládejme, že si vkladatel uložil do peněžního ústavu částku a_0 . Roční úroková míra je p procent, daň z úroku je d procent a úrokovací období je $\frac{1}{r}$ roku (tj. vklad se úročí r -krát ročně).

Na konci prvního úrokovacího období bude na účtu částka:

$$a_1 = a_0 + a_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{100-d}{100} = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right).$$

Na konci druhého úrokovacího období bude na účtu částka:

$$a_2 = a_1 + a_1 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{100-d}{100} = a_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^2.$$

Na konci třetího úrokovacího období bude na účtu částka:

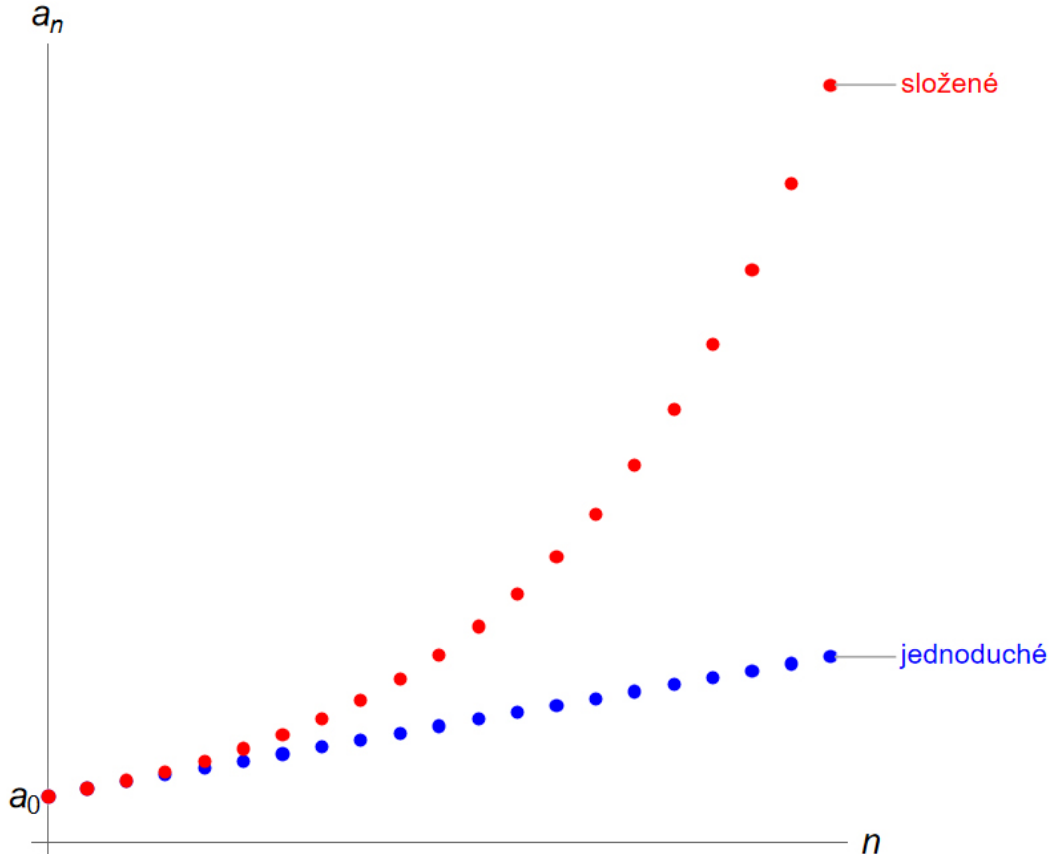
$$a_3 = a_2 + a_2 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{100-d}{100} = a_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^3.$$

Na konci n -tého úrokovacího období bude tedy na účtu částka:

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^n. \quad (24)$$

Z hlediska matematiky je vztah (24) $n + 1$ -ní člen geometrické posloupnosti, pro jejíž kvocient q platí $q = 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}$.

Vzájemné porovnání rychlosti růstu částky na účtu úročeném podle vztahů (22) a (24) je zobrazeno v grafu na obr. 8. Pro oba způsoby byla zvolena stejná jistina a_0 a stejná roční úroková míra p .



obr. 8

2.2.2.4 Spoření bez průběžného vybírání s pravidelně vkládanou jistinou na konci každého úrokovacího období

Předpokládejme, že si vkladatel uložil do peněžního ústavu částku a_0 , kterou bude ukládat pravidelně na konci každého úrokovacího období. Roční úroková míra je p procent, daň z úroku je d procent a úrokovací období je $\frac{1}{r}$ roku (tj. vklad se úročí r -krát ročně).

Na konci prvního úrokovacího období bude mít vkladatel na účtu:

$$s_2 = a_0 + a_0 \cdot \frac{\frac{p}{r} \cdot \frac{100-d}{100}}{100} + a_0 = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0.$$

Na konci druhého úrokovacího období bude mít vkladatel na účtu:

$$s_3 = \left(a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0 =$$

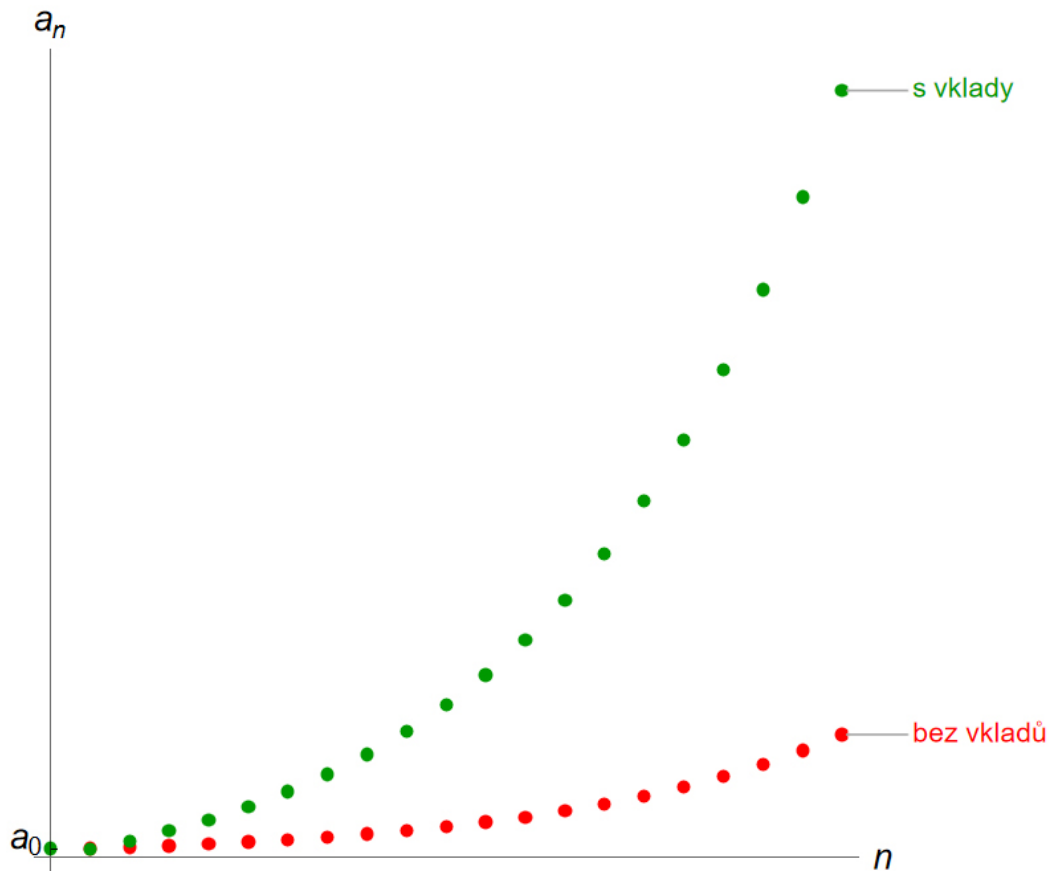
$$= a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^2 + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0.$$

Na konci třetího úrokovacího období bude mít vkladatel na účtu:

$$s_4 = \left(a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^2 + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0 =$$

$$= a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^3 + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^2 + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0.$$

Na konci n -tého úrokovacího období bude mít vkladatel na účtu:

$$s_{n+1} = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^n + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^{n-1} + \dots + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0.$$


obr. 9

Jak je vidět, jedná se o součet geometrické posloupnosti, jejíž první člen je a_0 a poslední (v pořadí $(n+1)$ -ní) je $a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^n$; kvocient této posloupnosti přitom je

$q = 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}$. Proto součet této posloupnosti (a tedy finální částka na konci n -tého úrokovacího období) je

$$s_{n+1} = a_0 \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^{n+1} - 1}{\frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}}. \quad (25)$$

Protože se jedná o $n + 1$ členů posloupnosti jsou pro snadnější orientaci v jednotlivých členech posunuté i indexy jednotlivých součtů, tj. indexy stavů na účtu na konci daného úrokovacího období.

Porovnání spoření bez pravidelného vkládání a s pravidelným vkládáním na konci každého úrokovacího období je zobrazeno v grafu na obr. 9. Pro oba způsoby byla zvolena stejná jistina a_0 a stejná roční úroková míra p .

2.2.2.5 Spoření bez průběžného vybírání s pravidelně vkládanou jistinou na začátku každého úrokovacího období

Předpokládejme, že si vkladatel uložil do peněžního ústavu částku a_0 , kterou bude ukládat pravidelně na začátku každého úrokovacího období. Roční úroková míra je p procent, daň z úroku je d procent a úrokovací období je $\frac{1}{r}$ roku (tj. vklad se úročí r -krát ročně).

Na konci prvního úrokovacího období bude na účtu vkladatele:

$$s_1 = a_0 + a_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{100-d}{100} = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right).$$

Na konci druhého úrokovacího období bude na účtu vkladatele:

$$\begin{aligned} s_2 &= a_0 \cdot \left(\left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0 \right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) = \\ &= a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^2 + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right). \end{aligned}$$

Na konci třetího úrokovacího období bude na účtu vkladatele:

$$\begin{aligned} s_3 &= \left(a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^2 + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) + a_0 \right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) = \\ &= a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^3 + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^2 + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right). \end{aligned}$$

Na konci n -tého úrokovacího období bude na účtu vkladatele:

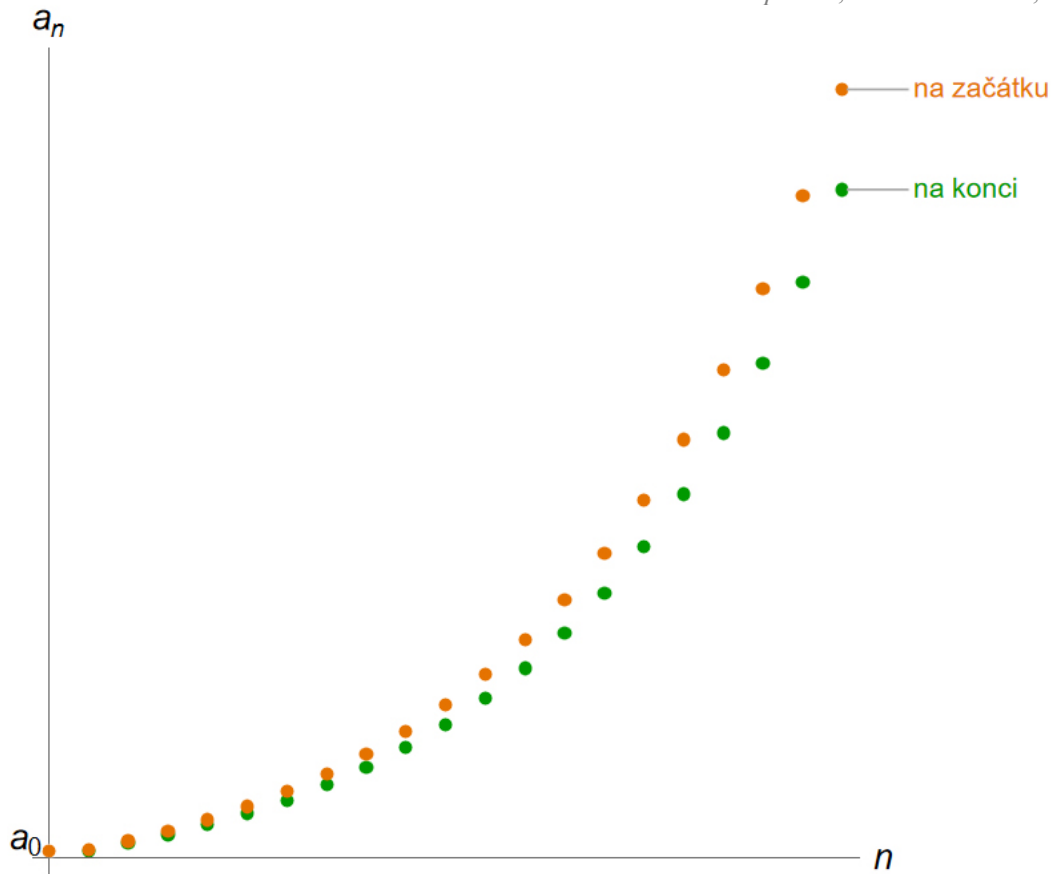
$$s_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^n + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^{n-1} + \dots + a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right).$$

V tomto případě se jedná o součet geometrické posloupnosti, jejíž první člen je $a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)$ a jejíž kvocient je $q = 1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}$. Proto je součet této posloupnosti (a tedy i částka na účtu vkladatele na konci n -tého období):

$$s_{n+1} = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}\right)^n - 1}{\frac{p}{100r} \cdot \frac{100-d}{100}}. \quad (26)$$

I v tomto případě byly indexy o jedničku posunuty – stejně jako při výpočtech v kapitole 2.2.2.4.

Porovnání spoření s pravidelným vkládáním na konci každého úrokovacího období se spořením s pravidelným vkládáním na začátku každého úrokovacího období je zobrazeno v grafu na obr. 10. Pro oba způsoby byla zvolena stejná jistina a_0 a stejná roční úroková míra p .



obr. 10

2.2.2.6 Poskytování úvěru

Předpokládejme, že peněžní ústav poskytne občanovi úvěr D na n let s roční úrokovou mírou p procent a úrokovacím obdobím 1 rok (tj. úročí se jednou ročně). Podnikatel bude úvěr splácet v n stejných ročních splátkách. První část splátí po jednom roce od poskytnutí úvěru. Výši splátky s lze určit na základě následující úvahy, kdy budeme sledovat občana dluh na konci každého roku.

Na konci roku, v němž byl úvěr poskytnut, občan dluží: $D + D \cdot \frac{p}{100} = D \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Na začátku roku první splátky občan dluží: $D \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s$.

Na začátku roku druhé splátky občan dluží:

$$\left(D \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s = D \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s.$$

Na začátku roku třetí splátky občan dluží:

$$\left(D \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s = D \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s.$$

Na začátku roku n -té splátky občan dluží:

$$D \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1} - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2} - \dots - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s. \quad (27)$$

Na začátku n -tého roku bude ale úvěr zaplacen, tj. občan nebude už peněžnímu ústavu dlužit nic. To znamená, že dluh občana popsaný vztahem (27) bude nulový. Pro hledání výše splátky s tedy budeme řešit rovnici: $D \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1} - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2} - \dots - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s = 0$.

Po vytknutí získáme rovnici ve tvaru:

$$D \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - s \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2} + \dots + \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1\right] = 0.$$

Výraz v závorce, kterou se násobí výše splátky s , představuje geometrickou posloupnost s prvním členem 1 a kvocientem $q = 1 + \frac{p}{100}$. Proto můžeme uvažovanou závorku nahradit součtem

této geometrické řady. Původní rovnice tak přejde na tvar:
$$D \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - s \cdot 1 \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}{\left(1 + \frac{p}{100}\right) - 1} = 0.$$

Z ní již můžeme vyjádřit výši splátky s ve tvaru:

$$s = \frac{D \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot \frac{p}{100}}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}. \quad (28)$$

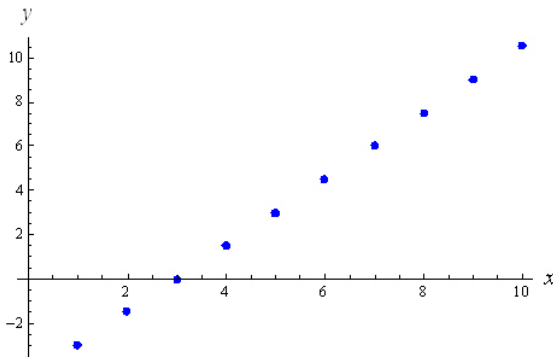
Splátku vyjádřenou vztahem (28) bude tedy občan platit při daných parametrech úvěru po celou dobu splácení.

2.3 Vlastnosti aritmetických a geometrických posloupností

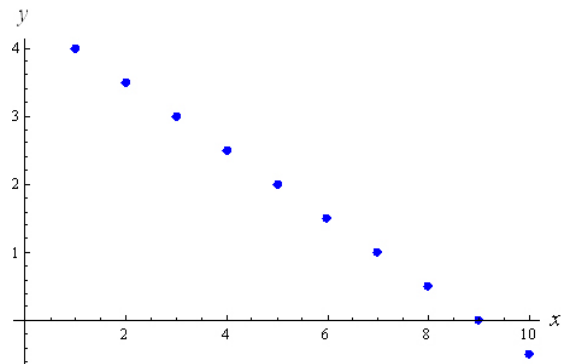
Vlastnosti aritmetických a geometrických posloupností rozebereme postupně. Začneme s aritmetickou posloupností.

Ilustrační příklad: Zobrazte grafy aritmetických posloupností, které jsou dány prvním členem a diferencí: a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_1 = -3$, $d = 1,5$; b) $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $b_1 = 4$, $d = -0,5$; c) $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, $c_1 = -\sqrt{2}$, $d = 0$.

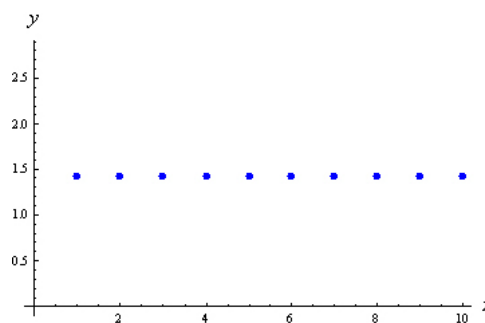
Řešení: Grafy zadaných posloupností jsou zobrazeny na obr. 11 až obr. 13.



obr. 11



obr. 12



obr. 13

Jak už bylo řečeno, je možné posloupnosti vnímat jako zvláštní případ funkce (viz kapitola 1.1.1). Proto je možné na základě právě sestavených grafů určit omezenost a monotonii uvedených posloupností a vyslovit následující věty:

VĚTA: ARITMETICKÁ POSLOUPNOST S DIFERENCÍ d JE:

1. ROSTOUCÍ PRO $d > 0$,
2. KLESAJÍCÍ PRO $d < 0$,
3. KONSTANTNÍ PRO $d = 0$.

VĚTA: PRO ARITMETICKOU POSLOUPNOST S DIFERENCÍ d PLATÍ:

1. JE-LI $d > 0$, PAK JE DANÁ POSLOUPNOST OMEZENÁ ZDOLA, ALE NENÍ OMEZENÁ SHORA;

2. JE-LI $d < 0$, PAK JE DANÁ POSLOUPNOST OMEZENÁ SHORA, ALE NENÍ OMEZENÁ ZDOLA;

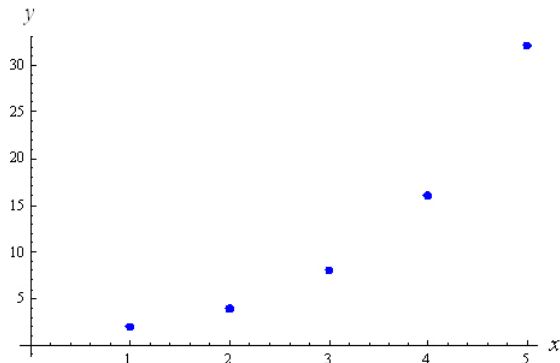
3. JE-LI $d = 0$, PAK JE DANÁ POSLOUPNOST OMEZENÁ (TJ. JE OMEZENÁ SHORA I ZDOLA).

V případě, že platí $d = 0$, se jedná o konstantní aritmetickou posloupnost, jejíž jednotlivé členy se nemění. Proto je omezená shora i zdola, a tedy je omezená.

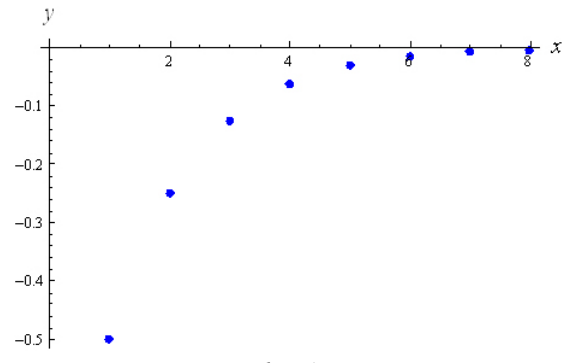
Nyní se pokusíme podobné věty vypořádat z grafů geometrických posloupností.

Ilustrační příklad: Zobrazte grafy geometrických posloupností, které jsou dány prvním členem a kvocientem: a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_1 = 2$, $q = 2$; b) $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $b_1 = -0,5$, $q = 0,5$; c) $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, $c_1 = 0,5$, $q = 0,5$; d) $(d_n)_{n=1}^{\infty}$, $d_1 = -2$, $q = 1,5$.

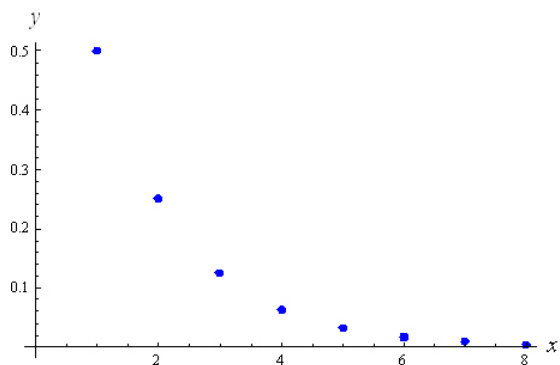
Řešení: Grafy zadaných posloupností jsou zobrazeny na obr. 14 až obr. 17.



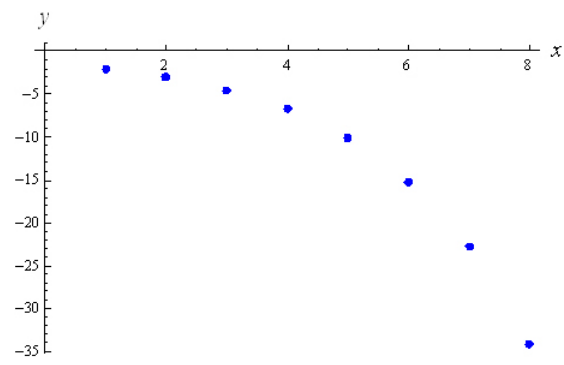
obr. 14



obr. 15



obr. 16



obr. 17

Na základě uvedených příkladů je opět možno vyslovit následující věty:

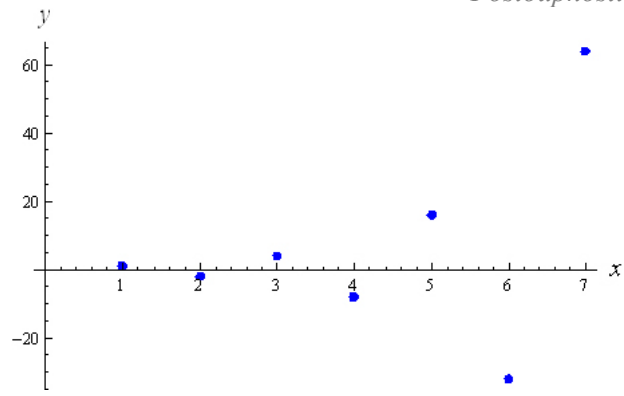
VĚTA: GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ S KVOCIENTEM q JE:

1. ROSTOUCÍ, PŘÁVĚ KDYŽ $a_1 > 0 \wedge q > 1$ NEBO $a_1 < 0 \wedge 0 < q < 1$,
2. KLESAJÍCÍ, PŘÁVĚ KDYŽ $a_1 > 0 \wedge 0 < q < 1$ NEBO $a_1 < 0 \wedge q > 1$.

VĚTA: GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ S KVOCIENTEM q :

1. JE OMEZENÁ, PŘÁVĚ KDYŽ $|q| \leq 1$ NEBO $a_1 = 0$;
2. JE OMEZENÁ ZDOLA, ALE NENÍ OMEZENÁ SHORA, PŘÁVĚ KDYŽ $a_1 > 0 \wedge q > 1$;
3. JE OMEZENÁ SHORA, ALE NENÍ OMEZENÁ ZDOLA, PŘÁVĚ KDYŽ $a_1 < 0 \wedge q > 1$;
4. NENÍ ANI SHORA OMEZENÁ ANI ZDOLA OMEZENÁ, PŘÁVĚ KDYŽ $a_1 \neq 0 \wedge q < -1$.

Příkladem posloupnosti, která není omezená ani shora ani zdola je např. posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_1 = 1$, $q = -2$, jejíž graf je na obr. 18.



obr. 18

3. LIMITY POSLOUPNOSTÍ A NEKONEČNÉ ŘADY

Stejně tak jako je možné vyšetřovat limitu u funkcí, je možné hovořit o limitě i u posloupností. Pomocí limity posloupnosti je totiž možné rozšířit a zobecnit jistým způsobem pojem součtu posloupnosti na nekonečný počet sčítanců. Tak je možné dospět k definici nekonečné řady a k definici jejího součtu (viz kapitola 3.3).

3.1 Limita posloupnosti

3.1.1 Zavedení pojmu

Dříve, než vyslovíme definici limity posloupnosti, pokusíme se na základě grafu, ve kterém jsou zobrazeny členy určité konkrétní posloupnosti, intuitivně pojem limity posloupnosti pochopit.

Ilustrační příklad: Vypište prvních šest členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \frac{(-1)^n + n}{2n}$ a vyznačte jejich obrazy do grafu.

Řešení: Postupným dosazováním lze určit: $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{5}{8}$, $a_5 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $a_6 = \frac{7}{12}$. Příslušný graf je zobrazen na obr. 19.

Z grafu (a výpočtu) je zřejmé, že se jednotlivé členy zadané posloupnosti stále více blíží k číslu $\frac{1}{2}$.

Jinými slovy vzdálenost obrazů jednotlivých členů posloupnosti od obrazu čísla $\frac{1}{2}$ se postupně zmenšuje a členy posloupnosti se od tohoto čísla stále méně liší.

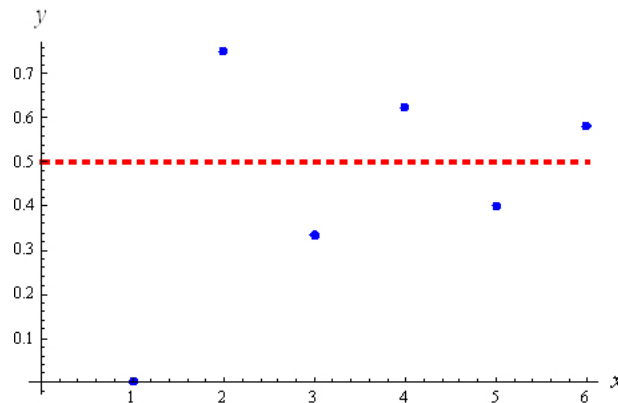
Uvedené vzdálenosti daného členu posloupnosti od čísla $\frac{1}{2}$ není složité spočítat. Můžeme postupně psát:

$\left|a_1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $\left|a_2 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$, $\left|a_3 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{6}$, $\left|a_4 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{8}$, $\left|a_5 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{10}$, $\left|a_6 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{12}$. Z právě provedených výpočtů lze ukázat, že např. pro všechna přirozená čísla $n \geq 7$ je $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{12}$. Pro n -tý

člen zadané posloupnosti totiž platí: $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{(-1)^n + n}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| = \frac{1}{2n}$.

Výraz $(-1)^n$ nabývá hodnot $+1$ nebo -1 , proto platí $\left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| = \frac{1}{2n}$. Číslo n totiž vybíráme stále z množiny přirozených čísel.

Má-li být právě určená vzdálenost $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2n}$ menší než $\frac{1}{12}$, musí platit: $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{12}$, odkud dostáváme $\frac{1}{2n} < \frac{1}{12}$ a tedy $n > 6$, tj v přirozených číslech platí $n \geq 7$.



obr. 19

Obdobným způsobem bychom mohli najít ten člen, od kterého dále počítaje se další členy liší od čísla

$$\frac{1}{2} \text{ o méně než } \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$$

Na základě právě uvedeného příkladu a úvah v něm použitých je možné vyslovit definici pojmu **limita posloupnosti**.

ČÍSLO a SE NAZÝVÁ LIMITA POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, PŘÁVĚ KDYŽ KE KAŽDÉMU Kladnému číslu ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí: $|a_n - a| < \varepsilon$. Tuto skutečnost zapisujeme zápisem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a. \quad (29)$$

Definici limity je možné formulovat také tak, že místo podmínky $|a_n - a| < \varepsilon$ uvedeme podmínku s ní ekvivalentní: $a \in (a_n - \varepsilon; a_n + \varepsilon)$.

U posloupností se nedefinuje jiná limita, než limita pro $n \rightarrow \infty$. Při výpočtu limit nebo při „intuitivním uhádnutí limity z grafu posloupnosti“ nás zajímá, jak se chovají členy posloupnosti pro velká n , tj. v pravé části grafu. Levá část grafu je pro výpočet limity posloupnosti nepodstatná!

Právě definovaná limita se nazývá **vlastní limita** (tj. touto limitou jsou čísla z množiny reálných čísel).

Výsledkem vlastní limity tedy není $\pm\infty$.

Podle toho, jakou limitu daná posloupnost má, můžeme posloupnosti dělit na dvě skupiny.

POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ SE NAZÝVÁ KONVERGENTNÍ POSLOUPNOST, PŘÁVĚ KDYŽ POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ MÁ VLASTNÍ LIMITU, TJ. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.

POSLOUPNOSTI, KTERÉ NEJSOU KONVERGENTNÍ, SE NAZÝVAJÍ DIVERGENTNÍ.

Divergentní posloupnosti mají nevlastní limitu (viz kapitola 3.2) nebo jejich limita neexistuje.

Vlastnosti limit posloupností dále upřesňují další věty.

VĚTA: KAŽDÁ POSLOUPNOST MÁ NEJVÝŠE JEDNU LIMITU.

VĚTA: KAŽDÁ KONVERGENTNÍ POSLOUPNOST JE OMEZENÁ.

Pozor! Právě uvedenou větu není možné obrátit. To znamená, že omezená posloupnost nemusí být nutně konvergentní - např. posloupnost $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$. Tato posloupnost je omezená (její členy totiž nabývají střídavě hodnot mínus jedna a plus jedna, a proto je zadaná posloupnost omezená), ale není konvergentní, protože neexistuje limita definovaná vztahem (29).

Limita posloupnosti vlastně dává představu o tom, k jakému číslu se přibližují členy dané posloupnosti v nekonečnu (tj. pro velká n). V případě posloupnosti $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ tuto představu nedostaneme – víme jen, že pro velká n budou nabývat členy posloupnosti hodnoty +1 nebo -1. A to je málo k tomu, abychom řekli, že tato posloupnost má limitu (danou vztahem (29)).

Podrobněji je o některých typech omezených posloupností pojednáno v úvodu kapitoly 3.1.2.

3.1.2 Vlastnosti limit posloupností

Následující věty umožňují určovat limity „složitějších“ posloupností na základě limit posloupností „jednodušších“.

VĚTA: JESTLIŽE POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ A $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ JSOU KONVERGENTNÍ A PŘITOM $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ A $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, PAK JE KONVERGENTNÍ I POSLOUPNOST:

1. $(a_n \pm b_n)_{n=1}^{\infty}$ A PLATÍ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b; \quad (30)$$

2. $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ A PLATÍ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b; \quad (31)$$

3. $(ca_n)_{n=1}^{\infty}$ A PLATÍ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a, \quad (32)$$

KDE $c \in \mathbb{R}$;

4. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ A PLATÍ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b} \quad (33)$$

ZA PŘEDPOKLADU, ŽE $b \neq 0$ A $b_n \neq 0$ PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$.

Jak již bylo řečeno, zvláštním případem posloupností jsou aritmetické posloupnosti (viz kapitola 2.1) a geometrické posloupnosti (viz kapitola 2.2). Proto se podíváme z hlediska limit na tyto dva druhy posloupností (viz kapitola 3.1.2.1 a 3.1.2.2).

3.1.2.1 Aritmetické posloupnosti

Aritmetické posloupnosti s diferencí $d=0$ jsou konvergentní (protože jsou konstantní), aritmetické posloupnosti s diferencí $d \neq 0$ nejsou omezené, a proto jsou divergentní. Vyšetřování limit aritmetických posloupností je tedy většinou nezajímavé.

3.1.2.2 Geometrické posloupnosti

Geometrická posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$, ve které je:

1. $|q| > 1$, není omezená, a proto není konvergentní;
2. $q = 1$, je konvergentní (je to posloupnost konstantní) a její limita je 1;
3. $q = -1$, je divergentní (členy posloupnosti oscilují mezi -1 a 1);
4. $|q| < 1$, je konvergentní.

VĚTA: GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST $(q^n)_{n=1}^{\infty}$, PRO KTEROU JE $|q| < 1$, JE KONVERGENTNÍ A JEJÍ LIMITA JE ROVNA NULE.

Tato věta je velmi důležitá pro vyšetřování vlastností nekonečných řad (viz kapitola 3.3).

VĚTA: KAŽDÁ GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, PRO JEJÍŽ KVOCIENT q PLATÍ $|q| < 1$, JE KONVERGENTNÍ A PLATÍ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (34)$$

3.1.3 ***Užití limit posloupností

Nejprve uvedeme tři věty, které se ukáží jako velmi užitečné u dalších uváděných příkladů (viz kapitoly 3.1.3.1 až 3.1.3.3).

VĚTA: JE-LI OMEZENÁ POSLOUPNOST MONOTÓNNÍ, PAK JE KONVERGENTNÍ.

Pro neklesající posloupnost resp. nerostoucí posloupnost odtud plyne:

VĚTA: JE-LI POSLOUPNOST NEKLESAJÍCÍ A PŘITOM SHORA OMEZENÁ, PAK JE KONVERGENTNÍ.

VĚTA: JE-LI POSLOUPNOST NEROSTOUCÍ A PŘITOM ZDOLA OMEZENÁ, PAK JE KONVERGENTNÍ.

V kapitolách 3.1.3.1 až 3.1.3.3 se budeme zabývat výpočtem některých iracionálních čísel. Jejich výpočet je založen na následující větě:

VĚTA: PRO KAŽDÉ REÁLNÉ ČÍSLO r EXISTUJE NEKLESAJÍCÍ POSLOUPNOST RACIONÁLNÍCH ČÍSEL $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ A NEROSTOUCÍ POSLOUPNOST RACIONÁLNÍCH ČÍSEL $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ TAK, ŽE PLATÍ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r. \quad (35)$$

3.1.3.1 Výpočet čísla π

Řecký matematik Archimedes (287 př. n. l. - 212 př. n. l.) ukázal, že pro číslo π platí nerovnost $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. K tomuto závěru dospěl tak, že délku kružnice porovnával s obvodou pravidelných n -úhelníků, které jsou vepsány resp. opsány dané kružnici. Později byl jeho původní odhad čísla π zpřesňován tím, že matematici volili stále větší počet stran těchto mnohoúhelníků. Pokusme se tento postup zopakovat.

Uvažujme kružnici o jednotkovém poloměru, jejíž obvod tedy je 2π . Označme $(o_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost obvodů pravidelných n -úhelníků vepsaných do kružnice a $(o'_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost pravidelných n -úhelníků opsaných kružnici. Z geometrického pohledu na situaci je zřejmé, že posloupnost $(o_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a omezená (je omezená obvodem kružnice) a posloupnost $(o'_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající a omezená (omezená je opět obvodem kružnice). Obě jsou monotónní a omezené, tedy konvergentní. Je možné ukázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$o_n < 2\pi < o'_n \quad (36)$$

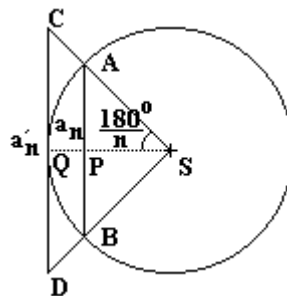
a navíc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} o_n = 2\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} o'_n. \quad (37)$$

Nyní vyjádříme n -tý člen obou posloupností $(o_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(o'_n)_{n=1}^{\infty}$ na základě obr. 20, na kterém je znázorněna jedna strana pravidelného n -úhelníku vepsaného do kružnice i jedna strana pravidelného n -úhelníku opsaného kružnici. Pravidelný n -úhelník je možné rozdělit na n rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhel proti základně (tj. proti straně uvažovaného n -úhelníku) má velikost $\frac{360^\circ}{n}$.

Pro další odvození budou důležité pravoúhlé trojúhelníky APS a CQS, které jsou vytvořeny spuštěním výšky z bodu S na stranu AB resp. CD. Úhel při vrcholu S má v obou trojúhelnících velikost $\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}$.

Vzhledem k tomu, že chceme tímto výpočtem získat hodnotu konstanty π , není možné vyjadřovat úhly v míře obloukové, tj. v násobcích π . Tuto konstantu totiž máme určit a bylo by tedy matematicky nesmyslné chtít jí určit pomocí sama sebe. Proto je nutné hodnoty úhlů vyjadřovat ve stupních.



obr. 20

V pravoúhlém trojúhelníku APS platí: $\sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{a_n}{2} = \frac{a_n}{a'_n}$. Odtud pro délku strany n -úhelníku vepsaného do kružnice dostáváme $a_n = 2 \sin \frac{180^\circ}{n} a'_n$ a pro obvod uvažovaného vepsaného n -úhelníku pak platí

$$o_n = 2n \sin \frac{180^\circ}{n}. \quad (38)$$

V pravoúhlém trojúhelníku CQS platí: $\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = \frac{a'_n}{1} = \frac{a'_n}{2}$. Odtud pro délku strany n -úhelníku opsaného kružnici dostáváme $a'_n = 2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$ a pro obvod uvažovaného opsaného n -úhelníku pak platí

$$o'_n = 2n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}. \quad (39)$$

Dosadíme-li nyní vztahy (38) a (39) do vztahu (36), dostaneme podmínku: $2n \sin \frac{180^\circ}{n} < 2\pi < 2n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$, odkud po vydělení soustavy nerovnic číslem 2 dostaneme podmínku

$$n \sin \frac{180^\circ}{n} < \pi < n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}. \quad (40)$$

Analogicky můžeme dosadit také vztahy (38) a (39) do vztahu (37) a dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n \sin \frac{180^\circ}{n} \right) = 2\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \right)$. Tyto vztahy můžeme dále postupně upravit. Nejdříve podle vztahu (32) vytkneme z limit konstantu 2 a dostaneme $2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{180^\circ}{n} \right) = 2\pi = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \right)$. Po vydělení touto konstantou získáme vztah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{180^\circ}{n} \right) = \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \right). \quad (41)$$

Postupným dosazováním za n je možné určit π na libovolný počet desetinných míst. Např. pro $n = 10000$ dostáváme $\pi = 3,14159$, tj. s přesností na pět desetinných míst.

V současné době se přesné výpočty čísla π provádějí na výkonných počítačích pomocí nekonečných řad, které byly pro ten účel odvozeny. (Pojem *nekonečná řada* je vysvětlen v kapitole 3.3).

3.1.3.2 Výpočet čísla e

S Eulerovým číslem e jsme se již setkali v učivu o komplexních číslech, exponenciálních funkcích a přirozených logaritmech. Toto iracionální číslo, které hraje důležitou roli při řešení řady aplikačních úloh v přírodních vědách a technice, lze definovat také pomocí limit posloupnosti.

Uvažujme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Určíme nyní prvních několik členů této posloupnosti:

$$\begin{array}{llll} a_1 = 2 & a_3 = 2,370370 & a_{10} = 2,593742 & a_{1000} = 2,716923 \\ a_2 = 2,25 & a_4 = 2,441406 & a_{100} = 2,704813 & a_{10000} = 2,718145 \end{array}$$

Je možné ukázat, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a omezená, a je tedy i konvergentní. Platí:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (42)$$

Dále je možné uvažovat posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Určíme nyní prvních několik členů této posloupnosti:

$$\begin{array}{llll} b_1 = 4 & b_3 = 3,160494 & b_{10} = 2,853117 & b_{1000} = 2,719641 \\ b_2 = 3,375 & b_4 = 3,051758 & b_{100} = 2,731862 & b_{10000} = 2,718418 \end{array}$$

Je možné ukázat, že posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající a omezená, a je tedy i konvergentní. A dále platí

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (43)$$

Na základě limit (42) a (43) tedy pro všechna $n \in \mathbb{N}$ tedy platí $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, a proto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (44)$$

Právě uvedený výpočet Eulerova čísla konverguje k přesné hodnotě e pomaleji, než výpočet čísla π uvedený v kapitole 3.1.3.1.

3.1.3.3 Výpočet druhé odmocniny reálných čísel

Chceme-li vypočítat druhou odmocninu z kladného reálného čísla a , zvolíme nejprve kladné číslo x_1 , jehož druhá mocnina je větší než a . Pak je x_1 větší než \sqrt{a} a číslo $\frac{a}{x_1}$ je menší než \sqrt{a} . Tj. platí

$$\frac{a}{x_1} < \sqrt{a} < x_1. \quad (45)$$

Pro číslo x_1 tedy platí $x_1^2 > a$. Z toho plyne, že $x_1 > \sqrt{a}$ (čísla a i x_1 jsou kladná, proto není nutné psát nikde absolutní hodnotu). Vydělíme-li číslo a číslem x_1 , které je větší než \sqrt{a} , dostaneme číslo menší než \sqrt{a} . Platí totiž: $\frac{a}{x_1} = \sqrt{a}$; a když budeme dělit číslem větším, než je \sqrt{a} , získáme číslo menší než \sqrt{a} .

Uvažujme dále posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentně takto:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x_n} + x_n \right). \quad (46)$$

O posloupnosti definované vztahem (46) lze dokázat, že platí:

1. pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{a}{x_n} < \sqrt{a} < x_n$;
2. posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající;
3. posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená;
4. posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní.

Skutečnost, že je posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní vyplývá z předchozích dvou vlastností této posloupnosti.

Posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(x_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ mají stejnou limitu, kterou označíme c a pro kterou platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = c. \quad (47)$$

Posloupnost $(x_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ se od posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ liší pouze „přechíslováním“ svých členů o jedničku. A vzhledem k tomu, že pro výpočet limity posloupnosti je důležité chování členů posloupnosti pro hodně velká n , je zřejmé, že posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(x_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ mají stejnou limitu.

Uvědomíme-li si, že pro hodně velká přirozená čísla můžeme místo x_n a x_{n+1} dosazovat c (jak vyplývá z limit (47)), můžeme definiční vztah (46) posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ psát ve tvaru $c = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} + c \right)$.

Tento vztah můžeme dále upravit. Vynásobením dvěma dostaneme $2c = \frac{a}{c} + c$. Převedením c na levou stranu získáme $c = \frac{a}{c}$ a po vynásobení nenulovým c dostaneme $c^2 = a$, a tedy

$$c = \sqrt{a}. \quad (48)$$

Porovnáním vztahů (47) a (48) zjistíme, že limitou posloupností $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(x_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ je číslo \sqrt{a} , které jsme chtěli určit.

Při přibližném výpočtu druhé odmocniny z čísla a tedy stačí zvolit za první člen posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dané rekurentně vztahem (46) libovolné kladné číslo x_1 , jehož druhá mocnina je větší než a . Poté je možné již dopočítávat další členy pomocí vztahu (46), které budou velmi rychle konvergovat ke hledanému číslu \sqrt{a} .

„Velmi rychle konvergovat“ znamená, že se dané členy budou rychle blížit k hledané odmocnině. Tj. členy vypočítávané posloupnosti se rychle přestanou na prvních desetinných místech za desetinnou čárkou měnit. Měnit se budou číslice na místě tisícín, desetitisícín, stotisícín, ... – podle toho, s jakou přesností danou odmocninu budeme chtít určit.

3.2 Nevlastní limita posloupnosti

Pojem nevlastní limity posloupnosti vysvětlíme na ilustračním příkladu.

Ilustrační příklad: Uvažujme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = 2^n$. Zjistěte, pro která přirozená čísla n je $a_n > 100$.

Řešení: Podle zadání je třeba vyřešit nerovnici: $2^n > 100$ pro $n \in \mathbb{N}$. Exaktní řešení této nerovnice získáme zlogaritmováním dekadickým logaritmem, čím dostaneme nerovnici ve tvaru $\log 2^n > \log 100$. Levou stranu nerovnice upravíme podle pravidel pro počítání s logaritmy, na pravé straně vypočteme. Získáme tak nerovnici $n \cdot \log 2 > 2$, z níž již vyjádříme $n > \frac{2}{\log 2} \doteq 6,64$. Řešením této nerovnice je tedy každé přirozené číslo $n \geq 7$.

Nerovnici $2^n > 100$ můžeme řešit rychleji „odhadem“. Uvědomíme-li si, že $2^6 = 64$ a $2^7 = 128$, je zřejmé, že nerovnice $2^n > 100$ je splněna pro $n \geq 7$.

U uvedené posloupnosti bychom mohli podobným způsobem hledat její členy, které jsou větší než 1000, 10^6 , ... zkrátka větší než jakékoliv reálné číslo, a v každém případě bychom našli přirozené n , od kterého dále jsou členy posloupnosti vyšší než zadané číslo.

Analogickým postupem bychom mohli vyšetřovat např. i posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $b_n = 4 - 0,5n$ a zkoumat, od jakého přirozeného čísla n výše jsou její členy menší než -100 , -10^9 , ...

Na základě právě uvedených příkladů a na základě toho, že posloupnosti jsou zvláštními případy funkcí, je možné zavést pojem **nevlastní limita posloupnosti**:

ŘÍKÁME, ŽE POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ MÁ NEVLASTNÍ LIMITU PLUS NEKONEČNO, PŘÁVĚ KDYŽ PRO KAŽDÉ REÁLNÉ ČÍSLO K EXISTUJE $n_0 \in \mathbb{N}$ TAKOVÉ, ŽE PRO VŠECHNA PŘIROZENÁ ČÍSLA $n \geq n_0$ JE $a_n > K$. TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty. \quad (49)$$

Analogicky můžeme zavést nevlastní limitu, která je rovna $-\infty$.

ŘÍKÁME, ŽE POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ MÁ NEVLASTNÍ LIMITU MÍNUS NEKONEČNO, PŘÁVĚ KDYŽ PRO KAŽDÉ REÁLNÉ ČÍSLO L EXISTUJE $n_0 \in \mathbb{N}$ TAKOVÉ, ŽE PRO VŠECHNA PŘIROZENÁ ČÍSLA $n \geq n_0$ JE $a_n < L$. TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty. \quad (50)$$

Posloupnosti, které mají nevlastní limitu jsou **divergentní posloupnosti**.

Pro každou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nastává právě jeden z následujících případů:

1. posloupnost je konvergentní a její limitou je reálné číslo a , tj. platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$;
2. posloupnost je divergentní a má nevlastní limitu ∞ , tj. platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$;
3. posloupnost je divergentní a má nevlastní limitu $-\infty$, tj. platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$;
4. posloupnost je divergentní a přitom nemá ani nevlastní limitu ∞ ani nevlastní limitu $-\infty$.

Příkladem takové posloupnosti je např. $\left((-2)^n\right)_{n=1}^{\infty}$, která stále mění znaménka a přitom její členy v absolutní hodnotě rostou. Limitu ale nemá, protože pro velká n nevíme, jestli bude hodnota daného členu kladná nebo záporná.

3.3 Nekonečná geometrická řada

Pojem nekonečná řada velmi úzce souvisí s geometrickou posloupností (viz kapitola 2.2).

Ilustrační příklad: Uvažujme geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Vytvoříme nyní další posloupnost tak, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ byl její n -tý člen roven součtu prvních n členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Půjde tedy o posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Určete limitu této posloupnosti.

Řešení: Vypočítejme nyní prvních několik členů této nově definované posloupnosti (s využitím toho, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost, což lze snadno dokázat): $s_1 = 1$, $s_2 = \frac{3}{2}$, $s_3 = \frac{7}{4}$, $s_4 = \frac{15}{8}$, $s_5 = \frac{31}{16}$, $s_6 = \frac{63}{32}$, $s_7 = \frac{127}{64}$, ... Zdá se, že limita posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je číslo 2. To lze dokázat pomocí vět o počítání s limitami (viz kapitola 3.1.2). Pro součet prvních n členů uvažované geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí vztah (19) ve tvaru $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dostaneme $s_n = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}$ a postupnými úpravami získáme výsledný vztah:

$$s_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}} = -2 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right).$$

Hledanou limitu uvažované posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ tedy můžeme psát ve tvaru

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)\right) = -2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) = -2 \cdot (0 - 1) = 2.$$

Nyní můžeme vyslovit větu, která zobecňuje to, co jsme vypočítali v minulém konkrétním příkladě.

VĚTA: JE-LI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST, PRO JEJÍŽ KVOCIENT q PLATÍ $|q| < 1$, PAK POSLOUPNOST $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ JE KONVERGENTNÍ A PŘITOM PLATÍ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q}. \quad (51)$$

Důkaz: Právě uvedenou větu je možné dokázat rozepsáním posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ a vypočtením limity $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$.

Důkaz bude probíhat stejně jako výpočet v ilustračním příkladu této kapitoly, jen budeme uvažovat obecné posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

Posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ se velmi často v tomto kontextu nazývá **posloupnost částečných součtů**.

V úvodu tohoto odstavce jsme řešili úlohu, kdy jsme od zadané posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ přešli k posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ (jde tedy o součet prvních n členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$), a zkoumali jsme, zda je nově vytvořená posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní. V tomto případě hovoříme o určování součtu nekonečné řady.

NEKONEČNOU ŘADOU SE NAZÝVÁ SYMBOL

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (52)$$

Nekonečnou řadou se v matematice opravdu nazývá právě uvedený součet. Nekonečnou řadou není žádné číslo, funkce, ... je to prostě součet nekonečně mnoha členů nějaké posloupnosti.

Nekonečná řada, která je zapsaná ve formě právě uvedeného součtu, nepředstavuje ve skutečnosti příklad na sčítání, ale příklad na hledání limity. Není totiž možné sečíst nekonečně mnoho sčítanců.

Mohou nastat dva případy:

1. Posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, pak říkáme, že **nekonečná řada (52) je konvergentní**. Limitu (51) pak označujeme symbolem s a nazýváme ji **součet nekonečné řady**, přičemž tuto skutečnost zapisujeme zápisem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

2. Posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je divergentní, pak říkáme, že **nekonečná řada (52) je divergentní**.

Je-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická a její kvocient je q , nazýváme příslušnou nekonečnou řadu (52) **nekonečná geometrická řada** s kvocientem q .

Z výše uvedeného vyplývá tato věta:

VĚTA: NEKONEČNÁ GEOMETRICKÁ ŘADA, PRO KTEROU JE $a_1 \neq 0$, JE KONVERGENTNÍ, PŘÁVĚ KDYŽ PRO JEJÍ KVOCIENT q PLATÍ $|q| < 1$. V TOM PŘÍPADĚ PRO JEJÍ SOUČET PLATÍ

$$s = \frac{a_1}{1 - q}. \quad (53)$$

Tento vztah je velmi podobný vztahu pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti, ale chybí v něm člen q^n . To je dáno tím, že uvažujeme NEKONEČNOU geometrickou řadu, pro jejíž kvocient q platí $|q| < 1$. A číslo menší než jedna umocněné na velmi velké číslo je rovno skoro nule (je to maličké číslo ležící na číselné ose v blízkosti nuly).

Pomocí nekonečné geometrické řady můžeme řešit i určitý typ rovnic.

Příklad: Řešte v množině reálných čísel rovnici $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x} \right)^{n-1} = \frac{4x-3}{3x-4}$.

Řešení: Levou stranu rovnice ze zadání si přepíšeme tak, abychom měli představu o jednotlivých členech nekonečné řady: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x} \right)^{n-1} = \left(\frac{2}{x} \right)^0 + \left(\frac{2}{x} \right)^1 + \left(\frac{2}{x} \right)^2 + \dots = 1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \dots$ Ačkoliv je z tohoto zápisu jasně vidět, čemu je roven kvocient dané geometrické posloupnosti, je matematicky korektnější

ho vyjádřit pomocí n -tého a $(n + 1)$ -ního členu geometrické posloupnosti. Ze zadání úlohy je zřejmé, že $a_n = \left(\frac{2}{x}\right)^{n-1}$ a $a_{n+1} = \left(\frac{2}{x}\right)^n$. Pro kvocient q geometrické posloupnosti platí $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Po dosazení

$$\text{tedy dostaneme: } q = \frac{\left(\frac{2}{x}\right)^n}{\left(\frac{2}{x}\right)^{n-1}} = \left(\frac{2}{x}\right)^1 = \frac{2}{x}.$$

To je zřejmé i z rozpisu levé strany zadané rovnice: každý další člen je roven předcházejícímu členu řady vynásobenému zlomkem $\frac{2}{x}$. Ale právě provedené odvození je matematicky korektnější.

Nyní si uvědomíme, že nekonečná geometrická posloupnost je konvergentní (tj. má součet vyjádřený reálným číslem), pokud pro její kvocient q platí $|q| < 1$. To znamená, že ne pro všechna reálná x bude mít nekonečná geometrická řada ze zadání úlohy definovaný součet. Ta reálná x , pro které existuje reálný součet (tj. zadaná posloupnost je konvergentní) musí splňovat podmínku $\left|\frac{2}{x}\right| < 1$. Tuto nerovnici postupně vyřešíme: $\frac{2}{|x|} < 1$ a tedy $|x| > 2$. To znamená, že pouze pro $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ má nekonečná geometrická řada součet a tedy pouze na tomto intervalu můžeme řešit danou rovnici.

Tento interval se tedy musí promítnout i do množiny D (definiční obor řešené rovnice), která je součástí kompletního řešení rovnice. A v závislosti na této množině pak posuzujeme, zda nalezené řešení je skutečně kořenem zadané rovnice.

Pro součet nekonečné geometrické řady, jejíž první člen je 1 a kvocient je $q = \frac{2}{x}$ tedy dostáváme:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{\frac{x-2}{x}} = \frac{x}{x-2}. \text{ Nyní už můžeme postupně řešit zadanou rovnici:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-1} = \frac{4x-3}{3x-4}$$

$$\frac{x}{x-2} = \frac{4x-3}{3x-4}$$

$$3x^2 - 4x = 4x^2 - 3x - 8x + 6$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(x-1)(x-6) = 0$$

Dostáváme tedy dva kořeny a to $x_1 = 1$ a $x_2 = 6$.

Nyní je nutné určit definiční obor dané rovnice. Ze zadání je zřejmé, že musí být $x \neq 0$ a zároveň $x \neq \frac{4}{3}$. Současně ale musíme vzít v úvahu podmínku, která zaručí, že zadaná nekonečná řada bude konvergentní, tj. podmínku $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$.

Nyní již můžeme vyslovit závěr: $O = \mathbb{R}$, $D = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ a $P = \{6\}$.